А.Г. ЦЫПКИН
А.И. ПИНСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

А. Г. ЦЫПКИН, А. И. ПИНСКИЙ

СПРАВОЧНИК ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Издание второе,
переработанное и дополненное

МОСКВА «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1989

ББК 22.1
Ц97
УДК 51(03)

Цыпкин А. Г., Пинский А. И.

Ц97 Справочник по методам решения задач по математике для средней школы. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 576 с.
ISBN 5-02-013792-8

Содержит основные методы решения задач школьного курса математики, а также некоторые задачи, не входящие в существующую программу средней школы. Приводятся необходимые теоретические сведения. Изложение метода сопровождается разбором типичных задач. Приводятся задачи для самостоятельного решения.

Методически связан со справочником: Цыпкин А. Г. Справочник по математике для средних учебных заведений.

Для школьников старших классов и учащихся техникумов. Может быть полезен для поступающих в вузы и техникумы.

Табл. 18. Ил. 73.

Ц $\frac{1602020000-062}{053(02)-89}$ 42-89 ББК 22.1

ISBN 5-02-013792-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ

В справочнике изложены методы решения задач из курса математики средней школы. Цель книги — помочь учащимся систематизировать свои знания по решению задач курса средней школы, а также ознакомиться с некоторыми методами решения задач, которым в школе по тем или иным причинам не уделяется достаточно внимания. Попыткой достигнуть этой цели и определяется структура настоящего справочника: в начале каждого параграфа кратко изложен теоретический материал (определения, основные теоремы и формулы), знание которого необходимо для решения задач данного раздела. Это позволяет использовать справочник, не прибегая к учебникам. Далее указывается метод решения задач какого-либо вида и разбирается конкретный пример на использование метода. После этого даны условия задач для самостоятельного решения.

Такая форма изложения, по мнению авторов, наиболее удобна для активного усвоения методов решения задач. В ряде случаев при разборе конкретных примеров приводится, возможно, не самое короткое и изящное решение задачи. Это объясняется прежде всего тем, что при разборе примера авторы в первую очередь стремились дать наглядное применение предложенного метода, а вовсе не продемонстрировать примеры нестандартных подходов к решению различных задач. Задачи для самостоятельного решения в основном взяты из вариантов, предлагавшихся в последние годы на вступительных экзаменах по математике в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов.

Авторы попытались расположить задачи для самостоятельного решения по возрастанию их сложности, сознавая при этом, что каждый читатель, в зависимости от своих знаний и наклонностей, возможно, изменил бы порядок следования задач. Такие традиционные разделы школьного курса математики, как планиметрия и стереометрия, в основном представлены задачами на вычисление, так как именно эти задачи преобладают среди задач этих разделов в вариантах письменных экзаменационных работ, При изложении материала, посвященного стереометрии, авторы несколько отошли от изложенной выше структуры параграфов, так как в отличие от задач планиметрии, методы решения которых допускают достаточно четкую классификацию, решение любой нетривиальной задачи по стереометрии содержит набор различных методов. В связи с этим примеры, рассмотренные в главе 13, имеют довольно подробные решения, в которых выделены основные приемы, сводящие исходную задачу к более простым. Приведенные решения также могут служить иллюстрацией правильного оформления решения стереометрических задач в письменной экзаменационной работе.

В главах 7—10 собраны и классифицированы задачи по началам математического анализа. Заметную долю в этих главах представляют задачи, при решении которых следует использовать также сведения из традиционных разделов курса школьной математики. Среди задач, собранных в главе 14, наряду с обычными упражнениями присутствуют довольно трудные геометрические задачи, решение которых значительно упрощается благодаря применению векторов и метода координат. Следует сказать, что, включая задачи в эти главы, авторы старались следить за тем, чтобы решение опиралось только на сведения, входящие в школьную программу.

Задачи, собранные в главе 6 (комплексные числа) и главе 15 комбинаторика и элементы теории вероятностей), основаны на материале, который сейчас не входит в программу.

Включение в справочник комбинаторики и элементов теории вероятностей объясняется тем значительным вниманием, которое уделяется в последнее время теории вероятностей и связанным с ней разделам математики. Авторы учли, что для большинства читателей этот материал — совершенно новый, и поэтому в этой главе позволили себе несколько отойти от принятой в книге очень сжатой формы перечисления основных сведений, необходимых для решения задач.

В справочнике принята двойная нумерация задач и примеров в каждой главе. Первое число указывает номер параграфа, а второе — порядковый номер задачи (или примера) в этом параграфе. Звездочка при номере задачи указывает на более трудную задачу, а две звездочки — на наличие полного решения (они приводятся в разделе «Ответы»).

Справочник в основном предназначен для учащихся старших классов средних школ и учащихся средних специальных учебных заведений.

ГЛАВА 1
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

При преобразованиях алгебраических выражений используются формулы сокращенного умножения:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2, \quad (1)$$

$$(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3, \quad (2)$$

$$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3, \quad (3)$$

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2, \quad (4)$$

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3, \quad (5)$$

и правила действий со степенями.

Если $a>0$, то

$$a^m a^n=a^{m+n}, \quad (6)$$

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}, \quad (7)$$

$$a^0=1, \quad (8)$$

$$a^m : a^n=a^{m-n}, \quad (9)$$

$$\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}, \quad n\neq 0, \quad (10)$$

$$a^{-n}=\left(\frac{1}{a}\right)^n. \quad (11)$$

Если $a>0$, $b>0$, $n\in \mathrm{N}$, то

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}, \quad (12)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad (13)$$

Если $a<0$, $b<0$, $n=2k$, $k\in \mathrm{N}$, то

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{|a|}\,\sqrt[n]{|b|}, \quad (14)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}. \quad (15)$$

Если $n=2k+1$, $k\in\mathbf{N}$, то

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},\qquad(16)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\quad b\neq 0.\qquad(17)$$

Если n, $m\in\mathbf{N}$, то

$$\sqrt[2n]{a^{2m}}=\sqrt[n]{|a|^m}.\qquad(18)$$

§ 1. Упрощение иррациональных алгебраических выражений

Под упрощением иррационального алгебраического выражения понимается приведение его к виду, содержащему меньшее число алгебраических операций над входящими в исходное выражение переменными.

Упрощение иррационального алгебраического выражения часто достигается разложением исходного выражения на множители с последующим вынесением общего множителя за скобки.

$$\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}.\qquad(*)$$

Решение. Выделим общий множитель в числителе и знаменателе первой дроби данного выражения. Для этого представим числитель дроби в виде

$$a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=a^{3/2}+b^{3/2}=(a^{1/2})^3+(b^{1/2})^3.$$

Используя (3), получаем

$$(a^{1/2})^3+(b^{1/2})^3=(a^{1/2}+b^{1/2})(a-a^{1/2}b^{1/2}+b).$$

Множитель $a^{1/2}+b^{1/2}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ является общим для числителя и знаменателя. Проведя сокращение, представим (*) в виде

$$\frac{a-\sqrt{ab}+b}{a-b}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}.\qquad(**)$$

После приведения (**) к общему знаменателю имеем

$$\frac{a-\sqrt{ab}+b+2\sqrt{ab}-2b-\sqrt{ab}}{a-b}=\frac{a-b}{a-b}=1.$$

Ответ. 1.

Упростить следующие алгебраические выражения:

1.1. $$\frac{\dfrac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\dfrac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\frac{2\sqrt{xy}}{y-x}.$$

1.2. $$\left(\frac{1}{(a^{1/2}+b^{1/2})^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right)(ab)^{-1/2}.$$

1.3. $$a\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1}+b\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}.$$

1.4. $$\left(\frac{x^{1/2}+y^{1/2}}{x^{1/2}-y^{1/2}}-\frac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x^{1/2}+y^{1/2}}\right)(y^{-1/2}-x^{-1/2}).$$

1.5. $$\left(\left(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)^{-2}+\left(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}\right)^{-2}\right):\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^{2}.$$

1.6. $$\frac{(a^{1/m}-a^{1/n})^2+4a^{(m+n)/m\cdot n}}{(a^{2/m}-a^{2/n})\left(\sqrt[m]{a^{m+1}}+\sqrt[n]{a^{n+1}}\right)}.$$

1.7. $$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a-1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}.$$

1.8. $$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b):\left(\sqrt{\dfrac{1}{b}}+3\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)}:\frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}}.$$

1.9. $$\frac{2\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}-\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}.$$

В выражениях, содержащих произведение радикалов с различными показателями степени, в ряде случаев удается добиться упрощения, приведя все радикалы к одному показателю.

Пример 1.2. Упростить выражение

$$\sqrt[4]{x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{3x}}.$$

Решение. Представляя выражение $\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{3x}}$ в виде

$$\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{3x}}=\sqrt[4]{(2\sqrt{x}-\sqrt{3x})^2}=\sqrt[4]{4x-4\sqrt{3}\,x+3x}=$$
$$=\sqrt[4]{7x-4\sqrt{3}\,x}$$

и подставляя его в исходное выражение, получаем

$$\sqrt[4]{x(7+4\sqrt{3})}\,\sqrt{2\sqrt{x}-\sqrt{3x}}=\sqrt[4]{x^2(7+4\sqrt{3})(7-4\sqrt{3})}=$$
$$=\sqrt[4]{x^2(49-48)}=\sqrt[4]{x^2}=\sqrt{x}$$

(при переходе к последнему выражению знак абсолютной величины может быть опущен, так как исходное выражение определено только при $x\geqslant 0$).

Ответ. $\sqrt{x}$.

При преобразовании радикалов необходимо учитывать, что по определению корень четной степени есть величина неотрицательная, в то время как корень нечетной степени может быть как неотрицательной, так и отрицательной величиной.

Пример 1.3. Упростить выражение

$$\sqrt[6]{x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3x}-2\sqrt{x}}.$$

Решение. Так как $\sqrt{3x}-2\sqrt{x}\leqslant 0$ (в чем можно убедиться, сравнив квадраты уменьшаемого и вычитаемого), то перед приведением радикалов к общему показателю представим второй сомножитель в виде

$$\sqrt[3]{\sqrt{3x}-2\sqrt{x}}=-\sqrt[3]{2\sqrt{x}-\sqrt{3x}}=-\sqrt[6]{(2\sqrt{x}-\sqrt{3x})^2}.$$

Дальнейшее упрощение проводится по схеме предыдущего примера:

$$\sqrt[6]{x(7+4\sqrt{3})}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3x}-2\sqrt{x}}=$$
$$=-\sqrt[6]{x(7+4\sqrt{3})}\sqrt[6]{(\sqrt{3x}-2\sqrt{x})^2}=$$
$$=-\sqrt[6]{x^2(49-48)}=-\sqrt[3]{x}.$$

Ответ. $-\sqrt[3]{x}$.

Упростить следующие выражения:

1.10. $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\cdot\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

1.11. $\sqrt[6]{4x(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{2\sqrt{3x}-4\sqrt{2x}}$.

1.12. $\dfrac{\sqrt{(2p+1)^3}+\sqrt{(2p-1)^3}}{\sqrt{4p+2\sqrt{4p^2-1}}}$.

1.13. $\dfrac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\cdot\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}$.

1.14. $\dfrac{\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})}{7-4\sqrt{3}}$.

1.15. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\right.$
$\left.+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}\right):\left(\dfrac{a-1}{2(\sqrt{a}+1)}+1\right)$.

1.16. $\dfrac{\sqrt{2b-2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}-(b+2)}$.

§ 2. Преобразование алгебраических выражений, содержащих знак абсолютной величины

Преобразование алгебраических выражений, в которых наряду с арифметическими операциями присутствует знак абсолютной величины (модуля) от некоторой функции, обычно производится отдельно на каждом промежутке знакопостоянства этой функции.

Пример 2.1. Упростить выражение

$$\frac{\dfrac{|x-1|}{x}+x|x-1|+2-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{x-2+\dfrac{1}{x}}}. \qquad (*)$$

Решение. Преобразуем выражение, стоящее в знаменателе

$$\sqrt{x-2+\frac{1}{x}}=\sqrt{\frac{x^2-2x+1}{x}}=\sqrt{\frac{(x-1)^2}{x}}=\frac{|x-1|}{\sqrt{x}}, \qquad (**)$$

и подставим его в исходную дробь. Получим выражение

$$\frac{\left(\dfrac{|x-1|}{x}+x(x-1)+2-\dfrac{2}{x}\right)\sqrt{x}}{|x-1|}.$$

Разделим действительную ось на два промежутка $(-\infty;\ 1]$ и $(1;\ \infty)$ знакопостоянства функции $f(x)=x-1$ и проведем упрощение исходного выражения на каждом из указанных промежутков отдельно.

Так как выражение (**) определено только при $x>0$, $x\neq 1$, то вместо промежутка $(-\infty;\ 1]$ будем рассматривать промежуток $x\in(0;\ 1)$. На этом промежутке по определению модуля имеем $|x-1|=1-x$ и исходное выражение приобретает вид

$$\frac{\sqrt{x}\,(1-x)\left(\frac{1}{x}+x-\frac{2}{x}\right)}{(1-x)}=\frac{\sqrt{x}}{x}\cdot(1+x^2-2)=\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}.$$

При $x\in(1;\ \infty)$ по определению модуля имеем $|x-1|=x-1$ и

$$\left[\frac{|x-1|}{x}+x\,|x-1|+2\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]\cdot\frac{\sqrt{x}}{|x-1|}=$$
$$=\frac{(x-1)\sqrt{x}\left[\frac{1}{x}+x+\frac{2}{x}\right]}{x-1}=\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}.$$

Ответ. При $x\in(0,\ +1)$ исходное выражение равно $\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$, а при $x\in(1;\ \infty)$ равно $\frac{x^2+3}{\sqrt{x}}$.

Упростить следующие выражения и найти область допустимых значений параметров, если они не указаны:

2.1. $\dfrac{y^5+y^4\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4y^9}}{|y^3-1|-1}$. ✓

2.2. $\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}\,|x-3|$.

2.3. $\dfrac{x\,|x-3|}{(x^2-x-6)\,|x|}$.

2.4. $\dfrac{x\,|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$.

2.5. $\dfrac{2\,|y+5|-y+\frac{25}{y}}{3y^2+10y-25}$.

2.6. $\dfrac{\sqrt{4x+4+x^{-1}}}{\sqrt{x}\,|2x^2-x-1|}$.

2.7. $\dfrac{|z-1|\cdot|z|}{z^2-z+1-|z|}$.

2.8. $\dfrac{\sqrt{a^2-2ab+b^2}}{\sqrt{a^2+2ab+b^2}}+\dfrac{2a}{a+b}$ при $0<a<b$.

2.9. $\left(\dfrac{1+\sqrt{1-x}}{1-x+\sqrt{1-x}}+\dfrac{1-\sqrt{1+x}}{1+x-\sqrt{1+x}}\right)^2\cdot\dfrac{x^2-1}{2}+1$.

2.10. $\sqrt{2}\,(2a+\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$ при $a>0$, $b>0$, $a>b$.

Упрощение иррациональных выражений, содержащих полный квадрат под знаком радикала. Для того чтобы убедиться, что под радикалом стоит полный квадрат некоторого выражения, иногда удобно сделать замену, рационализирующую это выражение.

Пример 2.2. Упростить выражение

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}-\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}. \qquad (*)$$

Решение. Сделаем замену

$$t=\sqrt{2x-4}.$$

Тогда $x=\dfrac{t^2+4}{2}$, и выражение (*) приобретает вид

$$\sqrt{\frac{t^2+4t+4}{2}}-\sqrt{\frac{t^2-4t+4}{2}}=\sqrt{\frac{(t+2)^2}{2}}-$$
$$-\sqrt{\frac{(t-2)^2}{2}}=\frac{|t+2|}{\sqrt{2}}-\frac{|t-2|}{\sqrt{2}}.$$

Дальнейшее упрощение проводится по схеме, рассмотренной в примере 2.1. Разбиваем все множество допустимых значений t последнего выражения на три области: $(-\infty;\ -2]$; $(-2;\ 2]$; $(2;\ \infty)$. В каждой из них получаем

$$\frac{-t-2+t-2}{\sqrt{2}}=-\sqrt{2},\qquad t\in(-\infty;\ -2],$$
$$\frac{t+2+t-2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\,t,\qquad t\in(-2;\ 2],$$
$$\frac{t+2-t+2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},\qquad t\in(2;\ \infty).$$

Для того чтобы вернуться к исходной переменной x, необходимо решить неравенства

$$\sqrt{2x-4}\leqslant -2,\quad -2<\sqrt{2x-4}\leqslant 2,\quad \sqrt{2x-4}>2.$$

Их решениями будут, соответственно, следующие множества значений:

$$\varnothing,\quad 2\leqslant x\leqslant 4,\quad x>4,$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}}-\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=\begin{cases}\sqrt{2x-4}, & 2\leqslant x\leqslant 4,\\ 2, & x>4.\end{cases}$$

Ответ. При $x\in[2;\,4]$ данное выражение равно $\sqrt{2x-4}$, а при $x\in(4;\,\infty)$ равно 2.

Упростить следующие выражения:

2.11. $\sqrt{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-2}\cdot\left(2x+\sqrt{x^2-1}\right)$.

2.12. $\left(\dfrac{x-9}{x+3x^{0,5}+9}:\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right)^{0,5}-x^{0,5}$.

2.13. $\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\cdot\dfrac{1}{x}}$.

2.14. $\sqrt{x+6\sqrt{x-2}+7}+\sqrt{x-6\sqrt{x+2}+7}$.

2.15. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}$.

2.16. $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$.

2.17. $(x+2\sqrt{2x-4})^{-1/2}+(x-2\sqrt{2x-4})^{-1/2}$.

Вычисление значений алгебраического выражения с предварительным упрощением данного выражения. В некоторых случаях для того, чтобы вычислить алгебраическое выражение при конкретных значениях входящих в него переменных, целесообразно его предварительно упростить.

Пример 2.3. Вычислить значение выражения

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}}\quad \text{при}\quad x=3.$$

Решение. Упрощая исходное выражение, имеем

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2}}=$$
$$=\frac{(x-2\sqrt{2})^{1/2}}{|x-2\sqrt{2}|}-\frac{(x+2\sqrt{2})^{1/2}}{|x+2\sqrt{2}|}.$$

Значение $x=3$ принадлежит промежутку $(2\sqrt{2};\,\infty)$ знакопостоянства функций, стоящих под знаком абсолютной величины. На этом промежутке имеем

$$|x-2\sqrt{2}|=x-2\sqrt{2}\ \text{ и }\ |x+2\sqrt{2}|=x+2\sqrt{2},$$

следовательно,

$$\frac{1}{(x-2\sqrt{2})^{1/2}}-\frac{1}{(x+2\sqrt{2})^{1/2}}=$$
$$=\frac{(x+2\sqrt{2})^{1/2}-(x-2\sqrt{2})^{1/2}}{(x^2-8)^{1/2}}.\qquad (*)$$

Подставив $x=3$ в выражение $(*)$, получим

$$(3+2\sqrt{2})^{1/2}-(3-2\sqrt{2})^{1/2}=$$
$$=(3+2\sqrt{2})^{1/2}\left[1-\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\right)^{1/2}\right].\qquad (**)$$

Умножим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}$ на $3+2\sqrt{2}$. Имеем

$$\frac{3-2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}}\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{(3+2\sqrt{2})}=\frac{9-8}{(3+2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{(3+2\sqrt{2})^2}.$$

Теперь, с учетом равенства $(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$, получим

$$(3+2\sqrt{2})^{1/2}\left[1-\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\right]=\frac{(3+2\sqrt{2})^{1/2}}{3+2\sqrt{2}}\,[2+2\sqrt{2}]=$$
$$=2\cdot\frac{(3+2\sqrt{2})^{1/2}(1+\sqrt{2})}{3+2\sqrt{2}}=2\,\frac{(1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})^2}=2.$$

Ответ. 2.

Вычислить значения следующих алгебраических выражений при указанных значениях неизвестного:

2.18. $\dfrac{x+\sqrt{3}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+\sqrt{3}}}+\dfrac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-\sqrt{3}}},\quad x=2.$

2.19. $\dfrac{1+z}{1+\sqrt{1+z}}-\dfrac{1-z}{1-\sqrt{1-z}},\quad z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

2.20. $\left(\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{1+x}}-2\right)^{1/2},\quad x=\dfrac{a^3+1}{a^3-1}.$

2.21. $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,(x^{1/p}+x^{1/q}),\quad x=\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{2pq/(q-p)}.$

2.22. $x^3-3x-2\,\dfrac{A^2+B}{A^2-B},$

$$x=\sqrt[3]{\frac{A+\sqrt{B}}{A-\sqrt{B}}}+\sqrt[3]{\frac{A-\sqrt{B}}{A+\sqrt{B}}}.$$

2.23. $$\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\times$$
$$\times\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{1/2}, \quad x=9,\ y=0{,}04.$$

2.24. $$\left(\frac{(x^2+a^2)^{1/2}+(x^2-a^2)^{1/2}}{(x^2+a^2)^{1/2}-(x^2-a^2)^{1/2}}\right)^{-2}, \quad x=a\left(\frac{m^2+n^2}{2mn}\right)^{1/2},$$

где $a>0,\ m>0,\ n>0,\ m>n$.

Упрощение численных иррациональных выражений. В примере 2.3 после подстановки значения $x=3$ решение свелось к упрощению иррационального числового выражения. Приведем некоторые приемы, упрощающие решение задач подобного типа.

Числовое иррациональное выражение удается упростить, если под знаком квадратного радикала стоит полный квадрат некоторого выражения. Так в случае радикала второй степени вида $\sqrt{a^2\pm 2b}$, упрощение достигается представлением

$$\sqrt{a^2\pm 2|b|}=\sqrt{(\sqrt{x}\pm\sqrt{y})^2}=|\sqrt{x}\pm\sqrt{y}|, \qquad (1)$$

где x и y находятся как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x+y&=a^2,\\ xy&=b^2. \end{aligned} \qquad (2)$$

Так, в примере 2.3 упрощение

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})^2$$

проводилось согласно (1), а система (2) при этом имела вид

$$\begin{aligned} x+y&=3,\\ xy&=2. \end{aligned}$$

Пример 2.4. Вычислить

$$\frac{\sqrt{30-12\sqrt{6}}}{(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})}\cdot(5+2\sqrt{6}).$$

Решение. Система (2) для выражения, стоящего в числителе дроби, записывается в виде

$$\begin{aligned} x+y&=30,\\ xy&=216 \end{aligned}$$

и имеет решения $(12;\ 18)$, $(18;\ 12)$.

Следовательно, согласно (1), получаем

$$\sqrt{30-12\sqrt{6}}=\sqrt{18}-\sqrt{12}=3\sqrt{2}-2\sqrt{3}.$$

Домножая числитель и знаменатель дроби $\dfrac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ на $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$, имеем

$$\frac{(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}{18-12}=\frac{30-12\sqrt{6}}{6}=5-2\sqrt{6}.$$

Перемножив $5-2\sqrt{6}$ и $5+2\sqrt{6}$, окончательно получаем

$$(5-2\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})=25-24=1.$$

Ответ. 1.

Вычислить значения следующих иррациональных выражений:

2.25. $\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{12}}-\sqrt{2}}{\sqrt{8-2\sqrt{12}}+\sqrt{2}}$.

2.26. $\dfrac{3}{4+\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{5}}}{\sqrt{8-2\sqrt{5}}}$.

2.27. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}$.

2.28. $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$.

2.29. $\sqrt{6m+2\sqrt{9m^2-n^2}}-\sqrt{6m-2\sqrt{9m^2-n^2}}$.

§ 3. Доказательство тождеств

Доказательство тождеств непосредственной проверкой.

Пример 3.1. Доказать, что

$$(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc=(b+c)(c+a)(a+b). \qquad (*)$$

Решение. Раскроем скобки в левой части выражения и приведем подобные члены. Имеем

$$abc+b^2c+bc^2+a^2c+abc+c^2a+a^2b+ab^2+abc-abc=$$
$$=2abc+b^2c+bc^2+a^2c+c^2a+a^2b+b^2a.$$

Раскрытие скобок в правой части выражения приводит к такому же выражению. Действительно,

$$abc+c^2a+a^2b+a^2c+b^2c+bc^2+abc=$$
$$=2abc+c^2a+a^2b+a^2c+b^2c+bc^2.$$

Исходное тождество доказано, так как если каждое из двух выражений равно третьему, то эти выражения равны между собой.

Доказать следующие тождества:

3.1. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=(ax-by)^2+(bx+ay)^2.$

3.2. $$(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+t^2)= \\ =(ax-by-cz-dt)^2+(bx+ay-dz+ct)^2+ \\ +(cx+dy+az-bt)^2+(dx-cy+bz+at)^2.$$

3.3. $(a^2-b^2)^2+(2ab)^2=(a^2+b^2)^2.$

3.4. $$(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2+ \\ +(a+d-b-c)^2=4(a^2+b^2+c^2+d^2).$$

3.5. $$\frac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\dfrac{1}{b}}-\frac{1}{b(abc+a+c)}=1.$$

3.6. $$\frac{a+3}{2a-1}-\frac{a^2-5}{4a^2-4a+1}-\frac{2a^3-a(1-5a)-1}{8a^3-12a^2+6a-1}= \\ =\frac{2a+1}{(2a-1)^2}.$$

3.7. $$\frac{\dfrac{a^2(c-b)}{bc}+\dfrac{b^2(a-c)}{ac}+\dfrac{c^2(b-a)}{ab}}{\dfrac{a(c-b)}{bc}+\dfrac{b(a-c)}{ac}+\dfrac{c(b-a)}{ab}}=a+b+c.$$

3.8. $$\frac{\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}-\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}{\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}}=\frac{a}{x}.$$

3.9. $$\frac{x^{0,5}+1}{x+x^{0,5}+1}:\frac{1}{x^{1,5}-1}=x-1.$$

3.10. $$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}= \\ =\frac{\sqrt{2a+4}}{\sqrt[4]{a}}.$$

Доказательство тождеств с помощью условия равенства двух многочленов. Если в левой и в правой частях тождества стоят некоторые алгебраические выражения, которые можно рассматривать как два многочлена одной и той же степени, то доказательство таких тождеств может быть основано на следующем свойстве многочленов. Два

многочлена n-й степени одной переменной x равны (тождественно равны), если значения этих многочленов совпадают при $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_n$, $x=x_{n+1}$, где все $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}$ — произвольные, не равные между собой числа.

Пример 3.2. Доказать тождество

$$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+ \\ +\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

Решение. Сравнивая значения левой и правой частей при $x=a$, $x=b$, $x=c$, можно убедиться, что при этих значениях переменной многочлены совпадают. Так как левая и правая части представляют собой многочлены второй степени относительно x, которые совпадают более чем при двух значениях переменной, то эти многочлены тождественно равны.

Доказать следующие тождества:

3.11. $$\frac{a}{(x-a)(a-b)(a-c)}+\frac{b}{(x-b)(b-a)(b-c)}+ \\ +\frac{c}{(x-c)(c-a)(c-b)}=\frac{x}{(x-b)(x-a)(x-c)}.$$

3.12. $$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+ \\ +\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

3.13. $$\frac{b+c+d}{(b-a)(c-a)(d-a)(x-a)}+ \\ +\frac{c+d+a}{(c-b)(d-b)(a-b)(x-b)}+ \\ +\frac{d+a+b}{(d-c)(a-c)(b-c)(x-c)}+ \\ +\frac{a+b+c}{(a-d)(b-d)(c-d)(x-d)}= \\ =\frac{x-a-b-c-d}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}.$$

3.14*. $$\frac{a-b}{a+b}+\frac{b-c}{b+c}+\frac{c-a}{c+a}+ \\ +\frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=0$$

3.15. $$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}= \\ =\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

3.16*. $$\frac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\frac{b^2-ac}{(b+c)(b+a)}+\frac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}=0.$$

К доказательству алгебраических тождеств близко примыкают и задачи, связанные с проверкой некоторых числовых равенств. Обычно эта проверка осуществляется теми же методами, что и доказательство тождеств (сюда же включаются методы упрощения алгебраических выражений, см. § 1).

Однако существуют и специальные методы проверки числовых равенств.

Пример 3.3. Доказать, что

$$\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}=3.$$

Решение. Обозначим

$$x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}. \qquad (*)$$

Тогда, уединяя один из радикалов и возводя в куб обе части получившегося уравнения, имеем

$$\left(x-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^3=9-\sqrt{80},$$

$$x^3-3x^2\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+3x\left(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)^2-9-\sqrt{80}=9-\sqrt{80},$$

$$x^3-3x^2\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+3x\sqrt[3]{(9+\sqrt{80})^2}=18,$$

$$x^3-3x\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\left(x-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\right)=18.$$

Выражение $x-\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}$ в силу (*) равно $\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$, и, следовательно, уравнение приводится к виду

$$x^3-3x\sqrt[3]{81-80}=18 \Leftrightarrow x^3-3x-18=0. \qquad (**)$$

Очевидно, что $x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$ является корнем уравнения (**). Кроме того, непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что $x=3$ также является корнем уравнения (**). Других действительных корней уравнение (**) не имеет, так как кубичный многочлен (**) может быть записан в виде

$$x^3-3x-18=(x-3)(x^2+3x+6),$$

а дискриминант квадратного трехчлена x^2+3x+6 отрицателен.

Таким образом, исходное равенство следует из существования единственного действительного корня уравнения (*).

§ 4. Условные тождества

Тождества, справедливость которых требуется установить лишь при выполнении некоторых условий относительно входящих в исходное тождество переменных, называют *условными тождествами*.

Пример 4.1. Доказать, что если

$$a+b+c=0,$$

то

$$a^3+b^3+c^3=3abc.$$

Решение. Из условия

$$a+b+c=0$$

получаем

$$c^3=-(a+b)^3.$$

Используя тождество (5), имеем

$$-c^3=-a^3-b^3-3ab(a+b)$$

или, заменяя $a+b$ на $-c$,

$$a^3+b^3+c^3=3abc,$$

что и требовалось доказать.

4.1. Доказать, что если

$$a+b+c=0,$$

то

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}.$$

4.2. Показать, что из равенства

$$a^2+b^2+c^2=ab+bc+ac$$

следует равенство $a=b=c$.

4.3. Доказать, что если $a^{1/3}+b^{1/3}+c^{1/3}=0$, то $(a+b+c)^3=27abc$.

4.4. Доказать, что если

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \quad \text{и} \quad \frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0,$$

то

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

4.5. Доказать, что если

$$\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a,$$

то

$$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}.$$

4.6. Доказать, что если $a+b+c=0$, то

а) $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

б) $2(a^5+b^5+c^5)=5abc(a^2+b^2+c^2)$.

в) $5(a^3+b^3+c^3)\cdot(a^2+b^2+c^2)=6(a^5+b^5+c^5)$.

4.7*. Доказать, что если $\dfrac{x_1}{x_2}\neq\dfrac{y_1}{y_2}$, то из системы уравнений

$$\begin{aligned}\alpha x_1+\beta x_2&=0,\\ \alpha y_1+\beta y_2&=0\end{aligned}$$

следует, что $\alpha^2+\beta^2=0$.

4.8. Доказать, что если $x\neq y$, $y\neq z$, $z\neq x$ и

$$\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}=0,$$

то

$$\frac{x}{(y-z)^2}+\frac{y}{(z-x)^2}+\frac{z}{(x-y)^2}=0.$$

4.9*. Доказать, что если

$$a_1^2+a_2^2+\ \ldots\ +a_n^2=p^2,$$

$$b_1^2+b_2^2+\ \ldots\ +b_n^2=q^2,\qquad p\neq 0,\qquad q\neq 0,$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\ \ldots\ +a_nb_n=pq,$$

то $a_1=\lambda b_1$, $a_2=\lambda b_2$, $\ldots$, $a_n=\lambda b_n$, где $\lambda=\dfrac{p}{q}$.

4.10. Доказать, что если

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c},$$

то

$$\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}.$$

4.11. Доказать, что если

$$\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a},$$

то

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

4.12. Доказать, что если

$$x=\frac{a-b}{a+b},\qquad y=\frac{b-c}{b+c},\qquad z=\frac{c-a}{c+a},$$

то

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z).$$

§ 5. Преобразование логарифмических выражений

Пусть a — положительное число, отличное от единицы, а M — любое положительное число. *Логарифмом числа M по основанию a* называется такое число, обозначаемое $\log_a M$, что

$$a^{\log_a M}=M.$$

Основные свойства логарифмов. Пусть $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c>0$, тогда

$$\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c, \tag{1}$$

$$\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c, \tag{2}$$

$$\log_{a^p}b^q=\frac{q}{p}\log_a b, \tag{3}$$

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a},\qquad c\neq 1, \tag{4}$$

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a},\qquad b\neq 1. \tag{5}$$

Тождественные преобразования логарифмических выражений проводятся с помощью формул (1)—(5) и определения логарифма.

Пример 5.1. Упростить выражение

$$\frac{\log_a\sqrt{a^2-1}\,\log_{1/a}^2\sqrt{a^2-1}}{\log_{a^2}(a^2-1)\,\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}}.$$

Решение. Согласно свойству (3) имеем

$$\left(\log_{1/a}\sqrt{a^2-1}\right)^2=\left(-\log_a\sqrt{a^2-1}\right)^2=\left(\log_a\sqrt{a^2-1}\right)^2, \tag{*}$$

$$\log_{\sqrt[3]{a}}\sqrt[6]{a^2-1}=\log_{(\sqrt[3]{a})^3}\left(\sqrt[6]{a^2-1}\right)^3=\log_a\sqrt{a^2-1}, \tag{**}$$

$$\log_{a^2}(a^2-1)=\log_{(a^2)^{1/2}}(a^2-1)^{1/2}=\log_a\sqrt{a^2-1}. \tag{***}$$

Подставляя правые части выражений (*)—(***) в исходную дробь, получаем

$$\frac{\log_a\sqrt{a^2-1}\,\log_a^2\sqrt{a^2-1}}{\log_a\sqrt{a^2-1}\,\log_a\sqrt{a^2-1}}=\log_a\sqrt{a^2-1}.$$

Ответ. $\log_a\sqrt{a^2-1}$.

Пример 5.2. Вычислить

$$81^{1/\log_5 3}+27^{\log_9 36}+3^{4/\log_7 9}.$$

Решение. Согласно свойству (5) имеем

$$81^{1/\log_5 3} = 81^{\log_3 5}.$$

Используя свойства степеней, получим далее

$$81^{\log_3 5} = (3^4)^{\log_3 5} = (3^{\log_3 5})^4.$$

Согласно определению логарифма $3^{\log_3 5} = 5$. Таким образом,

$$81^{1/\log_5 3} = 5^4 = 625.$$

Аналогично,

$$3^{4/\log_7 9} = 3^{4\log_9 7} = (3^2)^{2\log_9 7} = (9^{\log_9 7})^2 = 7^2 = 49,$$
$$27^{\log_9 36} = 27^{\log_3 6} = 3^{3\log_3 6} = (3^{\log_3 6})^3 = 216.$$

Складывая полученные значения, получаем искомое число.

Ответ. 890.

Упростить следующие выражения:

5.1. $\dfrac{81^{1/\log_5 9} + 3^{3/\log_{\sqrt{6}} 3}}{409}\left((\sqrt{7})^{2/\log_{25} 7} - 125^{\log_{25} 6}\right).$

5.2. $a^{1+2/\log_b a}b - 2a^{\log_a b+1}b^{\log_b a+1} + ab^{1+2/\log_a b}.$

5.3. $\left(2^{\log_{\sqrt[4]{2}} a} - 3^{\log_{27}(a^2+1)^3} - 2a\right) : (7^{4\log_{49} a} - a - 1).$

5.4*. $\log_3 2 \log_4 3 \log_5 4 \log_6 5 \log_7 6 \log_8 7.$

5.5. $\log_2 2x^2 + \log_2 x x^{\log_x(\log_2 x+1)} + \frac{1}{2}\log_4^2 x^2 + 2^{-3\log_{1/2}\log_2 x}.$

5.6. $\dfrac{\log_a b + \log_a\left(b^{\frac{1}{2}\log_b a^2}\right)}{\log_a b - \log_{ab} b} \cdot \dfrac{\log_{ab} b \log_a b}{b^{2\log_b \log_a b} - 1}.$

5.7. $5^{\log_{1/5}(1/2)} + \log_{\sqrt{2}} \dfrac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} + \log_{1/2} \dfrac{1}{10+2\sqrt{21}}.$

Связь между логарифмами составных чисел обычно удается установить, используя логарифмы их простых сомножителей.

Пример 5.3. Найти $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$.

Решение. Представим $\log_{30} 8$ в виде

$$\log_{30} 8 = \frac{\lg 8}{\lg 30}.$$

Разлагая числа 30 и 8 на простые множители и используя свойства логарифмов, получаем

$$\log_{30} 8 = \frac{3\lg 2}{\lg 5 + \lg 3 + \lg 2}.$$

Учитывая, что

$$\lg 2 = \lg\frac{10}{5} = 1 - \lg 5,$$

и используя условия задачи, получаем

$$\log_{30} 8 = \frac{3(1-a)}{b+1}.$$

Ответ. $\dfrac{3(1-a)}{b+1}.$

5.8. Вычислить без помощи таблиц

$$\frac{\log_3 135}{\log_{15} 3} - \frac{\log_3 5}{\log_{405} 3}.$$

5.9. Зная, что $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$, найти $\lg 56$.

5.10. Зная, что $\lg 3 = a$, $\lg 2 = b$, найти $\log_5 6$.

5.11. Известно, что $\log_3 7 = a$, $\log_7 5 = b$, $\log_5 4 = c$. Найти $\log_3 12$.

5.12. Зная, что $b = 8^{1/(1-\log_8 a)}$ и $c = 8^{1/(1-\log_8 b)}$, выразить $\log_8 a$ через $\log_8 c$.

5.13*. Известно, что

$$\log_a x = \alpha, \quad \log_b x = \beta, \quad \log_c x = \gamma, \quad \log_d x = \delta; \quad x \neq 1.$$

Найти $\log_{abcd} x$.

Для доказательства тождественности двух логарифмических выражений при выполнении некоторых условий иногда удобно сначала преобразовать данные условия, а затем их прологарифмировать.

Пример 5.4. Доказать, что

$$\lg\frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b),$$

если $a^2 + b^2 = 7ab$, $a > 0$, $b > 0$.

Решение. Преобразуем условие $a^2 + b^2 = 7ab$, выделяя в левой части полный квадрат:

$$a^2 + b^2 + 2ab = 9ab,$$

т. е.

$$(a+b)^2 = 9ab.$$

Логарифмируя последнее равенство по основанию 10 и приводя подобные члены, получаем

$$2\lg(a+b)-2\lg 3=\log a+\lg b.$$

Разделив обе части равенства на 2 и используя свойство логарифмов (2), получаем искомое равенство.

5.14. Показать, что при условии $x>0$, $y>0$ из равенства $x^2+4y^2=12xy$ следует равенство

$$\lg(x+2y)-2\lg 2=\frac{1}{2}(\lg x+\lg y).$$

5.15. Доказать, что

$$\log_{a+b}m+\log_{a-b}m=2\log_{a+b}m\log_{a-b}m,$$

если известно, что $m^2=a^2-b^2$.

5.16. Доказать, что если a, b, c — последовательные (положительные) члены геометрической прогрессии, то

$$\frac{\log_a N-\log_b N}{\log_b N-\log_c N}=\frac{\log_a N}{\log_c N}.$$

5.17. Доказать, что если

$$(ac)^{\log_a b}=c^2,$$

то для любого положительного числа N числа $\log_a N$, $\log_b N$, $\log_c N$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии.

При доказательстве тождеств обычно используются те же приемы, что и при упрощении логарифмических и показательных выражений.

П р и м е р 5.5. Доказать, что

$$\log_p\log_p\underbrace{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots\sqrt[p]{p}}}}_{n}=-n$$

при $p>1$.

Р е ш е н и е. Записывая иррациональное выражение, стоящее под знаком второго логарифма, в виде

$$\underbrace{\sqrt[p]{\sqrt[p]{\ldots\sqrt[p]{p}}}}_{n}=p^{1/p^n}$$

и логарифмируя два раза это равенство по основанию p, получаем

$$\log_p p^{1/p^n}=\frac{1}{p^n},\qquad \log_p\frac{1}{p^n}=-n.$$

Таким образом, исходное тождество доказано.

5.18*. Доказать, что для любых допустимых положительных чисел a и N имеет место равенство

$$\frac{1}{\log_a N}+\frac{1}{\log_{a^2} N}+\frac{1}{\log_{a^3} N}+\frac{1}{\log_{a^4} N}=10\log_N a.$$

5.19*. Доказать, что

$$2\left(\sqrt{\log_a\sqrt[4]{ab}+\log_b\sqrt[4]{ab}}-\sqrt{\log_a\sqrt[4]{\frac{b}{a}}+\log_b\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}\right)\times$$
$$\times\sqrt{\log_a b}=\begin{cases}2, & 1<a\leqslant b,\\ 2\log_a b, & 1<b<a.\end{cases}$$

5.20*. Доказать, что

$$\log_a N\log_b N+\log_b N\log_c N+\log_c N\log_a N=$$
$$=\frac{\log_a N\log_b N\log_c N}{\log_{abc}N}.$$

5.21*. Доказать тождество

$$\log_{a/b}x=\frac{\log_a x\log_b x}{\log_b x-\log_a x}.$$

При сравнении двух логарифмических выражений удобно пользоваться эквивалентностью следующих неравенств. Если основания логарифмов одинаковы, то

при $a>1$:

$$0<b<c\Leftrightarrow\log_a b<\log_a c,\qquad(6)$$

при $0<a<1$:

$$0<b<c\Leftrightarrow\log_a b>\log_a c.\qquad(7)$$

Если одинаковы числа, от которых вычисляются логарифмы, и $a>1$, $b>1$ или $0<a<1$ и $0<b<1$, то

при $c>1$:

$$\log_a c<\log_b c\Leftrightarrow a>b,\qquad(8)$$

при $0<c<1$:

$$\log_a c<\log_b c\Leftrightarrow b>a.\qquad(9)$$

П р и м е р 5.6. Не пользуясь таблицами, определить, что больше:

$$\log_8 9\quad\text{или}\quad\log_7 8?$$

Решение. Представим исследуемые логарифмы в виде

$$\log_8 9 = \log_8 (8+1) = 1 + \log_8\left(1 + \frac{1}{8}\right),$$

$$\log_7 8 = \log_7 (7+1) = 1 + \log_7\left(1 + \frac{1}{7}\right).$$

В силу (8) и (6) справедливы неравенства

$$\log_8\left(1 + \frac{1}{8}\right) < \log_7\left(1 + \frac{1}{8}\right) < \log_7\left(1 + \frac{1}{7}\right).$$

Таким образом,

$$\log_8 9 < \log_7 8.$$

Не пользуясь таблицами, доказать неравенства:

5.22*. $\log_3 75 < \log_2 22.$

5.23*. $\log_3 70 < \log_2 20.$

5.24. $\log_{\log_3 2}\left(\frac{1}{2}\right) > 1.$

5.25*. Доказать, что для любого натурального $N > 3$ справедливо неравенство

$$\log_N (N+1) < \log_{N-1} N.$$

ГЛАВА 2

УРАВНЕНИЯ

В алгебре рассматриваются два вида равенств — тождества и уравнения. *Тождество* — это равенство, которое выполняется при всех (допустимых) значениях входящих в него букв. Для записи тождества наряду со знаком = также используется знак $\equiv$.

Уравнение — это равенство, которое выполняется лишь при некоторых значениях входящих в него букв. Буквы, входящие в уравнение, по условию задачи могут быть неравноправными: одни могут принимать все свои допустимые значения и называются *коэффициентами* (реже *параметрами*) уравнения; другие, значения которых требуется отыскать, называются *неизвестными* (их обычно обозначают последними буквами латинского алфавита: x, y, z, или теми же буквами, снабженными индексами: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ или $y_1, y_2, \ldots, y_k$ *)).

В общем виде уравнение с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ может быть записано в виде

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \tag{1}$$

где $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функция указанных переменных. В зависимости от числа неизвестных уравнение называют уравнением с одним, двумя и более неизвестными.

Значения неизвестных, обращающие уравнение в тождество, называют *решениями* уравнения. Уравнение считается решенным, если найдены все его решения или показано, что уравнение решений не имеет.

Если все решения уравнения $F = 0$ являются решениями уравнения $G = 0$, то говорят, что уравнение $G = 0$ есть *следствие* уравнения $F = 0$, и пишут

$$F = 0 \Rightarrow G = 0.$$

Два уравнения

$$F = 0 \quad \text{и} \quad G = 0$$

называют *эквивалентными*, если каждое из них является следствием другого, и пишут

$$F = 0 \Leftrightarrow G = 0.$$

Таким образом, два уравнения считаются эквивалентными, если множества решений этих уравнений совпадают.

Уравнение $F = 0$ считают эквивалентным двум (или нескольким) уравнениям $F_1 = 0$, $F_2 = 0$, если множество корней уравнения $F = 0$ совпадает с объединением множеств корней уравнений $F_1 = 0$, $F_2 = 0$.

Некоторые эквивалентные уравнения:

1. Уравнение $F + G = G$ эквивалентно уравнению $F = 0$, рассматриваемому на множестве допустимых значений исходного уравнения.

2. Уравнение $\frac{F}{G} = 0$ эквивалентно уравнению $F = 0$, рассматриваемому на множестве допустимых значений исходного уравнения.

*) Если специально не оговорено, то считается, что неизвестные принимают действительные значения.

3. Уравнение $F \cdot G = 0$ эквивалентно двум уравнениям $F = 0$ и $G = 0$, каждое из которых рассматривается на множестве допустимых значений исходного уравнения.

4. Уравнение $F^n = 0$ эквивалентно уравнению $F = 0$.

5. Уравнение $F^n = G^n$ при нечетном n эквивалентно уравнению $F = G$, а при четном n эквивалентно двум уравнениям: $F = G$ и $F = -G$.

Алгебраическим уравнением с одним неизвестным называется уравнение, сводящееся к уравнению вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0,$$

где n — неотрицательное целое число; коэффициенты многочлена $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ называются *коэффициентами* (или *параметрами*) уравнения и считаются заданными; x называется неизвестным и является искомым. Число n называется *степенью* уравнения.

Значения неизвестного x, обращающие алгебраическое уравнение в тождество, называются *корнями* (или *решениями*) алгебраического уравнения.

§ 1. Нахождение корней многочленов

Многочленом (*полиномом*) n-й степени относительно переменной величины x называется выражение вида

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где n — неотрицательное целое число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — коэффициенты многочлена, причем коэффициент a_0, называемый старшим коэффициентом, считается не равным нулю.

Многочлен первой степени называют также *линейным* многочленом, многочлен второй степени — *квадратным*, а многочлен третьей степени — *кубичным* многочленом.

Число c называется *корнем* многочлена, если $P(c) = 0$.

Уравнение вида

$$ax + b = 0, \qquad a \neq 0, \tag{1}$$

называется *линейным* уравнением. Линейное уравнение имеет единственный корень $x = -b/a$.

Уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0, \tag{2}$$

называется *квадратным* уравнением. Выражение $b^2 - 4ac = D$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения. Если $D > 0$, уравнение (2) имеет два действительных корня:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D = 0$, то уравнение (2) имеет один действительный корень кратности 2: $x = -\frac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то уравнение (2) действительных корней не имеет.

Решение уравнений методом замены неизвестного. Решение многих уравнений заключается в сведении их к уравнениям вида (1) или (2). Одним из таких способов является введение вспомогательного неизвестного.

Пример 1.1. Решить уравнение

$$(x^2 - 2x)^2 - (x - 1)^2 + 1 = 0.$$

Решение. Обозначая $y = (x - 1)^2$, запишем исходное уравнение в виде

$$(y - 1)^2 - y + 1 = 0. \tag{*}$$

Несложные преобразования приводят уравнение (*) к виду

$$y^2 - 3y + 2 = 0. \tag{**}$$

Решая (**), получаем, что исходное уравнение эквивалентно двум квадратным уравнениям

$$(x - 1)^2 = 1 \quad \text{и} \quad (x - 1)^2 = 2,$$

корни которых $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ и $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$.

Решить уравнения:

1.1. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 = 55$.

1.2. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12 = 0$.

1.3*. $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 0$.

1.4*. $(x - 2)(x + 1)(x + 4)(x + 7) = 19$.

1.5*. $(2x^2 + 3x - 2)(5 - 6x - 4x^2) = -5(2x^2 + 3x + 2)$.

1.6. $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

1.7. $2x^8 + x^4 - 15 = 0$.

1.8. $(2x - 1)^6 + 3(2x - 1)^3 = 10$.

1.9*. $(1 + x)^8 + (1 + x^2)^4 = 2x^4$.

1.10. $(x - 2)^6 - 19(x - 2)^3 = 216$.

Решение уравнений методом разложения на множители. Один из способов решения уравнения n-й степени $(n \geqslant 2)$

$$P_n(x) = 0$$

состоит в разложении многочлена $P_n(x)$ на множители, что позволяет свести решение исходного уравнения к решению нескольких уравнений более низких степеней. Этот способ основан на следующем *свойстве корней многочлена n-й степени*. Если $x = c$ является корнем многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

то этот многочлен можно записать в виде

$$P_n(x) = (x - c)\,Q_{n-1}(x), \tag{3}$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $n - 1$, т. е. многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $x - c$.

Разложение многочлена на множители равносильно нахождению корней многочлена. Нахождение корней многочлена является трудной задачей, и в общем случае для многочлена n-й степени с действительными коэффициентами нельзя указать универсального способа нахождения корней. Однако для многочленов с целыми коэффициентами существует теорема, позволяющая отыскивать их рациональные корни.

Рациональными корнями многочлена

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — целые числа, могут быть лишь числа вида m/p (m — целое, p — натуральное), при этом число $|m|$ является делителем числа $|a_n|$, а число p — делителем числа $|a_0|$.

Пример 1.2. Найти корни уравнения

$$3x^3 - 4x^2 + 5x - 18 = 0.$$

Решение. Делителями числа 18 будут числа 1, 2, 3, 6, 9, а делителями числа 3 — числа 1, 3. Множеством значений m будет множество $\{-9, -6, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 6, 9\}$, а множеством значений p — множество $\{1, 3\}$. Множеством всевозможных различных значений чисел вида m/p будет следующее множество рациональных чисел: $\left\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\right\}$. Подставляя эти числа в уравнение, получаем корень уравнения — число 2. Следовательно, многочлен, стоящий в левой части уравнения, делится на $(x-2)$.

Произведя деление углом, находим частное — многочлен $3x^2 + 2x + 9$, который действительных корней не имеет. Следовательно, $x = 2$ — единственный действительный корень исходного уравнения.

Ответ. $x = 2$.

Решить уравнения методом разложения на множители:

1.11. $8x^4 + 6x^3 - 13x^2 - x + 3 = 0.$ ✓

1.12. $x^3 + 6x + 4x^2 + 3 = 0.$

1.13. $2x^4 - x^3 - 9x^2 + 13x - 5 = 0.$ ✓

1.14*. $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8.$ ✓

1.15. $x^3 - (2a+1)x^2 + (a^2+a)x - (a^2-a) = 0.$ ✓

1.16. $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0.$ ✓

Некоторые уравнения специального вида. Уравнение четвертой степени вида

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = m$$

при условии

$$a + b = c + d = l$$

приводится к квадратному уравнению относительно неизвестной

$$y = x^2 + lx.$$

Пример 1.3. Решить уравнение

$$x(x+1)(x+2)(x+3) = 0{,}5625. \qquad (*)$$

Решение. Перемножив попарно $x(x+3)$ и $(x+1)(x+2)$, имеем

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 0{,}5625.$$

Вводя вспомогательное неизвестное $y = x^2 + 3x$, после очевидных преобразований получаем квадратное уравнение

$$y^2 + 2y - 0{,}5625 = 0,$$

корнями которого будут числа $y_1 = 0{,}25$ и $y_2 = -2{,}25$.

Возвращаясь к исходному неизвестному, заключаем, что (*) эквивалентно двум уравнениям:

$$x^2 + 3x - 0{,}25 = 0, \qquad x^2 + 3x + 2{,}25 = 0.$$

Первое уравнение имеет два различных корня: $x_1 = \frac{-3+\sqrt{10}}{2}$ и $x_2 = \frac{-3-\sqrt{10}}{2}$, второе — один корень $x_{3,4} = -\frac{3}{2}$ кратности два.

Ответ. $x_1 = \frac{-3+\sqrt{10}}{2}$, $x_2 = \frac{-3-\sqrt{10}}{2}$, $x_{3,4} = -\frac{3}{2}$.

Найти корни уравнений:

1.17. $(x+a)(x+2a)(x-3a)(x-4a) = b^4.$ ✓

1.18. $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680.$

1.19. $(6x+5)^2(3x+2)(x+1) = 35.$ ✓

1.20. $x^4 - 2x^3 + x - 132 = 0.$

1.21. $(x-1)(x+1)(x+2)x = 24.$

1.22. $(x-4)(x+2)(x+8)(x+14) = 354.$ ✓

1.23*. $(x^2+x+1)(2x^2+2x+3) = 3(1-x-x^2).$

Алгебраическое уравнение четвертой степени вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \qquad e \neq 0,$$

называется *возвратным*, если коэффициенты уравнения связаны равенством $d = \lambda b$, $c = \lambda^2 a$ (λ — некоторое отличное от нуля число).

Решение возвратного уравнения может быть сведено к решению квадратного уравнения заменой

$$y = x + \frac{\lambda}{x}.$$

Пример 1.4. Решить уравнение

$$18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0.$$

Решение. Так как $x=0$ не является корнем уравнения, то, разделив обе части уравнения на x^2, перейдем к эквивалентному уравнению

$$18x^2-3x-25+\frac{2}{x}+\frac{8}{x^2}=0.$$

Сгруппируем слагаемые в правой части этого уравнения следующим образом:

$$18\left(x^2+\frac{4/9}{x^2}\right)-3\left(x-\frac{2/3}{x}\right)-25=0.$$

Теперь очевидно, что если в качестве новой неизвестной выбрать $y=x-\frac{2/3}{x}$, то, так как $x^2+\frac{4/9}{x^2}=y^2+\frac{4}{3}$, исходное уравнение приобретает вид

$$18y^2-3y-1=0. \qquad (**)$$

Корни этого уравнения равны $\frac{1}{3}$ и $-\frac{1}{6}$ соответственно. Таким образом исходное уравнение оказывается эквивалентным следующим двум уравнениям:

$$x-\frac{2/3}{x}=\frac{1}{3} \quad \text{и} \quad x-\frac{2/3}{x}=-\frac{1}{6}.$$

Первое уравнение имеет корни $x_1=1$ и $x_2=-\frac{2}{3}$, а второе — $x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{97}}{12}$.

Ответ. $x_1=1,\ x_2=-\frac{2}{3},\ x_{3,4}=\frac{-1\pm\sqrt{97}}{12}$.

Решить уравнения:

1.24. $x^4+5x^3+2x^2+5x+1=0$.

1.25. $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$.

1.26. $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0$.

1.27. $6x^3-x^2-20x+12=0$.

1.28. $x^4+1=2(1+x)^4$.

Некоторые алгебраические уравнения n-й степени $(n>2)$ допускают понижение порядка, если использовать формулу бинома Ньютона (см. гл. 14, § 3).

Пример 1.5. Решить уравнение

$$8x^3+36x^2+54x=98.$$

Решение. Воспользовавшись тем, что

$$(2x+3)^3=8x^3+36x^2+54x+27,$$

запишем исходное уравнение в виде

$$(2x+3)^3=125,$$

или

$$2x+3=5.$$

Таким образом, единственным корнем исходного уравнения будет $x=1$.

Ответ. $x=1$.

Решить уравнения:

1.29. $8x^3-36x^2+54x=28$.

1.30. $16x^4+32x^3+12x^2+8x-80=0$.

1.31. $x^4-8x^3+24x^2-8x=65$.

Уравнение вида

$$a_1u^n+a_2u^{n-1}v+a_3u^{n-2}v^2+\ldots+a_nv^n=0$$

называется *однородным* уравнением n-й степени относительно неизвестных u и v. Деление обеих частей однородного уравнения на v^n сводят его к уравнению n-й степени относительно неизвестного $y=\frac{u}{v}$.

Если $a_n=0$, то следует отдельно рассмотреть случай, когда $v=0$.

Сводя уравнения к однородным и производя указанную выше замену, иногда удается понизить степень исходного уравнения.

Пример 1.6. Решить уравнение

$$(x^2+27)^2-5(x^2+27)(x^2+3)+6(x^2+3)^2=0. \qquad (*)$$

Решение. Обозначим $x^2+27=u$, $x^2+3=v$. Тогда исходное уравнение приобретает вид однородного уравнения второй степени относительно неизвестных u и v:

$$u^2-5uv+6v^2=0.$$

Производя замену $\frac{u}{v}=y$, получаем уравнение

$$y^2-5y+6=0,$$

корни которого $y=2$ и $y=3$.

Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем, что уравнение $(*)$ эквивалентно двум уравнениям

$$x^2+27=3(x^2+3), \qquad x^2+27=2(x^2+3),$$

корнями которых являются числа ± 3 и $\pm\sqrt{21}$ соответственно.

Ответ. $x_{1,2}=\pm 3$, $x_{3,4}=\pm\sqrt{21}$.

Решить уравнения:

1.32. $(x^2-1)^2+5(x^4-1)-6(x^2+1)^2=0.$

1.33. $(x^2-3)^2-7(x^4-9)+6(x^2+3)^2=0.$

1.34. $(x-2)^2(x+1)^2-(x-2)(x^2-1)-2(x-1)^2=0.$

Если уравнение может быть записано в виде $f[f(x)]=x$, то среди корней этого уравнения содержится корень уравнения $f(x)=x$.

Пример 1.7. Решить уравнение

$$(x^2-4x+6)^2-4(x^2-4x+6)+6=x.$$

Решение. Найдем корни квадратного уравнения

$$x^2-4x+6=x. \qquad (*)$$

Его корни $x=2$ и $x=3$. Следовательно, многочлен, стоящий в левой части исходного уравнения, делится на произведение $(x-2)(x-3)$.

Производя деление углом, находим многочлен частного: x^2-3x+3.

Таким образом, исходное уравнение можно представить в виде

$$(x^2-5x+6)(x^2-3x+3)=0,$$

и, следовательно, оно эквивалентно двум уравнениям

$$x^2-5x+6=0, \quad x^2-3x+3=0. \qquad (**)$$

Второе из уравнений (**) действительных корней не имеет, и действительными корнями исходного уравнения являются корни уравнения (*).

Ответ. $x_1=2$, $x_2=3$.

Решить уравнения:

1.35. $(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x.$

1.36. $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)-3=x.$

§ 2. Рациональные уравнения

Рациональным алгебраическим уравнением называется уравнение вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=0, \qquad (1)$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Далее для определенности будем полагать, что $P(x)$ — многочлен m-й степени, а $Q(x)$ — многочлен n-й степени.

Множество допустимых значений рационального алгебраического уравнения (1) определяется условием $Q(x)\neq 0$, откуда

следует, что $x\neq c_1$, $x\neq c_2$, ..., $x\neq c_n$, где c_1, c_2, ..., c_n — корни многочлена $Q(x)$.

Метод решения уравнения (1) заключается в следующем. Решаем уравнение

$$P(x)=0,$$

корни которого обозначим через x_1, x_2, x_3, ..., x_m. Сравниваем множества корней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Те корни многочлена $P(x)$, которые не являются корнями многочлена $Q(x)$, являются корнями (решениями) рационального уравнения (1).

Пример 2.1. Решить уравнение

$$\frac{9-x}{x-4}=\frac{5}{x-4}-3.$$

Решение. Исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$9-x-5+3(x-4)=0$$

при условии $x-4\neq 0$. Решая полученное уравнение, находим: $x=4$. Так как $x=4$ не входит в область допустимых значений неизвестного, то данное уравнение решений не имеет.

Пример 2.2. Решить уравнение

$$\frac{1}{x(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{12}.$$

Решение. Обозначая $z=x^2+2x$, запишем исходное уравнение в виде

$$\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}=\frac{1}{12}. \qquad (*)$$

Несложные преобразования сводят уравнение (*) к уравнению

$$\frac{z^2+z-12}{12z(z+1)}=0, \qquad (**)$$

которое эквивалентно уравнению $z^2+z-12=0$. Эквивалентность этих уравнений следует из того, что корни последнего уравнения $z=-4$, $z=3$ принадлежат множеству допустимых значений уравнения (**). Таким образом, исходное уравнение эквивалентно двум квадратным уравнениям: $x^2+2x-3=0$ и $x^2+2x+4=0$. Корни первого уравнения: $x_1=1$, $x_2=-3$. Второе уравнение действительных корней не имеет.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=-3$.

Найти корни следующих уравнений:

2.1. $\dfrac{12x+1}{6x-2}-\dfrac{9x-5}{3x+1}=\dfrac{108x-36x^2-9}{4(9x^2-1)}.$

2.2. $\dfrac{1}{2x+3}-\dfrac{1}{x^2-16}+\dfrac{1}{2x^2+11x+12}-\dfrac{x-8}{2x^3+3x^2-32x-48}=0.$

2.3. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{7}{9}\,\dfrac{x+1}{x-1}.$

2.4. $\dfrac{x+1}{2(x-1)}=\dfrac{9}{2(x+4)}+\dfrac{1}{x-1}.$

2.5. $\dfrac{x^2}{x^2-4}+\dfrac{x+1}{2(x-2)}=\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{x+2}.$

2.6. $\dfrac{4x^2+29x+45-(x+1)(2x+15)}{(2(x-1))^2-2(x+1)(x-2)}=\dfrac{(x+1)(x+5)}{(x-1)(x-2)}.$

2.7*. $\dfrac{(a-x)^4+(x-b)^4}{(a+b-2x)^2}=\dfrac{a^4+b^4}{(a+b)^2}.$

2.8. $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}.$

2.9. $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6.$

2.10. $\dfrac{4}{x^2+4}+\dfrac{5}{x^2+5}=2.$

2.11. $\dfrac{(x^2-6x)^2}{(x-3)^2}-2=\dfrac{81}{(x-3)^2}.$

2.12. $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2.$

2.13. $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9.$

2.14. $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}.$

2.15. $20\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\,\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0.$

2.16. $\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^2+\dfrac{x+1}{x-4}=12\left(\dfrac{x-2}{x-4}\right)^2.$

2.17. $\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2-2\,\dfrac{x-2}{x-1}-3\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2=0.$

Уравнение вида

$$\frac{ax}{cx^2+hx+d}+\frac{bx}{cx^2+rx+d}=c$$

сводится к уравнению

$$\frac{a}{y+h}+\frac{b}{y+r}=c$$

введением вспомогательного неизвестного

$$y=cx+\frac{d}{x}.$$

Пример 2.3. Решить уравнение

$$\frac{x}{x^2-x+1}+\frac{2x}{x^2+x+1}=1.$$

Решение. Подстановкой проверяем, что $x=0$ не является корнем исходного уравнения. Поделив числитель и знаменатель каждой дроби на x, получаем эквивалентное уравнение

$$\frac{1}{x+\frac{1}{x}-1}+\frac{2}{x+\frac{1}{x}+1}=1.$$

Обозначая $x+\dfrac{1}{x}=y$, получаем уравнение

$$\frac{1}{y-1}+\frac{2}{y+1}=1,$$

сводящееся к квадратному уравнению, корнями которого будут $y_1=0$, $y_2=3$.

Таким образом, исходное уравнение эквивалентно двум уравнениям

$$x+\frac{1}{x}=0,\quad x+\frac{1}{x}=3,$$

первое из которых не имеет действительных корней, а корни второго суть $x_{1,2}=(3\pm\sqrt{5})/2$.

Ответ. $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}.$

Решить уравнения:

2.18. $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3}+\dfrac{13x}{2x^2+x+3}=6.$

2.19. $\dfrac{3x}{x^2+1-4x}-\dfrac{2x}{x^2+1+x}=\dfrac{8}{3}.$

2.20. $\dfrac{3x^2-1}{x}+\dfrac{5x}{3x^2-x-1}=\dfrac{119}{18}.$

§ 3. Уравнения, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины

Если в уравнении некоторые выражения, содержащие неизвестное, стоят под знаком абсолютной величины, то решение исходного уравнения ищется отдельно на каждом из промежутков знакопостоянства этих выражений.

Пример 3.1. Решить уравнение

$$|2x-5|=x-1.$$

Решение. Выражение $2x-5$, стоящее под знаком абсолютной величины, неотрицательно при $x \geqslant 5/2$ и отрицательно при $x < 5/2$. Рассмотрим исходное уравнение отдельно на каждом из этих промежутков.

Пусть $x \geqslant 5/2$. Тогда по определению абсолютной величины $|2x-5| = 2x-5$, и данное уравнение преобразуется к виду

$$2x-5=x-1.$$

Решая это уравнение, находим $x=4$. Так как число 4 принадлежит рассматриваемому промежутку, то $x=4$ является решением исходного уравнения.

Пусть теперь $x<5/2$. Тогда по определению абсолютной величины $|2x-5| = -(2x-5)$, и данное уравнение преобразуется к виду

$$-(2x-5)=x-1.$$

Решая это уравнение, находим $x=2$. Так как число 2 принадлежит рассматриваемому промежутку, то $x=2$ является решением исходного уравнения.

Ответ. $x_1=2$, $x_2=4$.

Пример 3.2. Решить уравнение

$$|x-1|-2|x-2|+3|x-3|=4.$$

Решение. Данное уравнение эквивалентно следующим уравнениям:

1) $1-x+2(x-2)-3(x-3)=4$ для $x \leqslant 1$;
2) $x-1+2(x-2)-3(x-3)=4$ для $1<x\leqslant 2$;
3) $x-1-2(x-2)-3(x-3)=4$ для $2<x\leqslant 3$;
4) $x-1-2(x-2)+3(x-3)=4$ для $x>3$.

Первое уравнение имеет решение $x=1$; второе уравнение обращается в тождество для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $1<x\leqslant 2$; третье не имеет решений; четвертое имеет решение $x=5$.

Ответ: $x \in [1; 2]$, $x=5$.

Решить уравнения:

3.1. $|x|=x+2$.
3.2. $|-x+2|=2x+1$. ✓
3.3. $|x-1|+|x-2|=1$. ✓
3.4. $|x-1|+|x+2|-|x-3|=4$. ✓
3.5. $|2-|1-|x|||=1$. ✓
3.6. $\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|=1$.
3.7. $|5x-x^2-6|=x^2-5x+6$.
3.8. $|x^2-1|=-|x|+1$.
3.9. $\left|\dfrac{1}{2}x^2-2x+\dfrac{3}{2}\right|+\left|\dfrac{1}{2}x^2-3x+4\right|=\dfrac{3}{4}$.

§ 4. Иррациональные уравнения

Иррациональным уравнением называют уравнение, в котором неизвестная величина содержится под знаком радикала. Область допустимых значений неизвестных иррационального уравнения состоит из тех значений неизвестного, при которых неотрицательны все выражения, стоящие под знаками радикалов четной степени.

Решение иррационального уравнения возведением в степень. Один из способов решения иррационального уравнения заключается в последовательном возведении обеих частей уравнения в степень, являющуюся наименьшим общим кратным показателей всех радикалов, входящих в данное уравнение. Если степень, в которую возводится уравнение, четная, то полученное уравнение может иметь корни, не являющиеся корнями исходного уравнения. Поэтому необходима проверка корней.

Пример 4.1. Решить уравнение

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x-4}=2\sqrt{x}. \qquad (*)$$

Решение. Возводим обе части данного уравнения в квадрат:

$$3x+4+2\sqrt{(3x+4)(x-4)}+x-4=4x. \qquad (**)$$

Приводя подобные члены, получаем уравнение

$$2\sqrt{(3x+4)(x-4)}=0,$$

корни которого $x=-4/3$ и $x=4$. Один из полученных корней, а именно $x=-4/3$, не удовлетворяет исходному уравнению, так как не входит в область его допустимых значений. Проверкой убеждаемся, что при $x=4$ исходное уравнение обращается в тождество.

Ответ. $x=4$.

Решить уравнения:

4.1. $\sqrt{x+1}=8-\sqrt{3x+1}$.

4.2. $\sqrt{x+\sqrt{x+11}}+\sqrt{x-\sqrt{x+11}}=4$.

4.3. $\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2$.

4.4. $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$.

4.5. $\sqrt{25-x}=2-\sqrt{9+x}$.

4.6. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2x+3}=3$.

4.7. $\sqrt{x^2+x-5}+\sqrt{x^2+8x-4}=5$.

4.8. $\sqrt{x^2+x+1}=\sqrt{x^2-x+1}+1$.

4.9. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

4.10. $\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x+1}=\sqrt{15x+4}$.

4.11. $\sqrt{x+5}+\sqrt{x+3}=\sqrt{2x+7}$.

4.12. $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$.

4.13. $\sqrt{4x+2}+\sqrt{4x-2}=4$.

4.14. $\sqrt{x-\sqrt{x-2}}+\sqrt{x+\sqrt{x-2}}=2$.

4.15. $\sqrt{x+7}-x+3=0$.

4.16. $\sqrt[3]{x+34}-\sqrt[3]{x-3}=1$.

4.17. $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$.

4.18. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

4.19. $\sqrt[3]{x+5}+\sqrt[3]{x+6}=\sqrt[3]{2x+11}$.

4.20. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{x-1}$.

4.21. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

4.22. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$.

4.23. $\sqrt[3]{5x+7}-\sqrt[3]{5x-12}=1$.

4.24. $\sqrt[3]{9-\sqrt{x+1}}+\sqrt[3]{7+\sqrt{x+1}}=4$.

4.25. $\sqrt[3]{24+\sqrt{x}}-\sqrt[3]{5+\sqrt{x}}=1$.

Некоторые специальные приемы решения иррациональных уравнений. В некоторых случаях можно освободиться от иррациональности в уравнении умножением обеих частей уравнений на некоторое не обращающееся в нуль выражение.

Пример 4.2. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1. \qquad (*)$$

Решение. Умножим обе части уравнения на выражение $\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}$, являющееся сопряженным левой части уравнения (*). После приведения подобных членов получаем уравнение

$$7=\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}, \qquad (**)$$

которое эквивалентно исходному, так как уравнение

$$\sqrt{3x^2+5x+8}+\sqrt{3x^2+5x+1}=0$$

действительных корней не имеет.

Складывая уравнения (*) и (**), получаем

$$\sqrt{3x^2+5x+8}=4.$$

Возводя последнее уравнение в квадрат, получаем квадратное уравнение

$$3x^2+5x-8=0,$$

корни которого $x_1=-8/3$, $x_2=1$. Делая проверку, убеждаемся, что оба корня являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1=1$, $x_2=-8/3$.

Решить уравнения:

4.26. $\sqrt{3x^2-2x+15}+\sqrt{3x^2-2x+8}=7$.

4.27. $\sqrt{x^2+9}-\sqrt{x^2-7}=2$.

4.28. $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$.

4.29. $\sqrt{Ax^2+Bx+C}+\sqrt{Ax^2+Bx+C_1}=p$.

4.30*. $\dfrac{\sqrt{21+x}+\sqrt{21-x}}{\sqrt{21+x}-\sqrt{21-x}}=\dfrac{21}{x}$, $x\neq 0$.

Введение вспомогательных неизвестных в ряде случаев позволяет перейти от иррационального уравнения к системе рациональных уравнений.

Пример 4.3. Решить уравнение

$$x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}.$$

Решение. Обозначая $\sqrt{2x^2-8x+12}=y$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} y^2&=2x^2-8x+12,\\ y&=x^2-4x-6. \end{aligned} \qquad (*)$$

Исключая из системы (*) неизвестное x, получаем уравнение

$$y^2-2y-24=0.$$

Корнями этого уравнения являются $y_1=6$, $y_2=-4$. Так как через y обозначен арифметический корень, то из двух найденных корней уравнения выбираем положительный. Подставляя его во второе уравнение системы (*), получаем уравнение

$$x^2-4x-12=0,$$

корни которого $x_1 = -2$, $x_2 = 6$. Делая проверку, убеждаемся, что оба корня являются корнями исходного уравнения.

Ответ. $x_1 = 6$, $x_2 = -2$.

Пример 4.4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+1} = \sqrt{x-3}.$$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{x+1} = u$, $\sqrt{x-3} = v$. Исключая x из уравнений $u^3 = x+1$, $v^2 = x-3$, приходим к системе

$$u = v, \quad u^3 - v^2 = 4.$$

Ее решение сводится к решению уравнения

$$v^3 - v^2 - 4 = 0,$$

единственный действительный корень которого $v = 2$. Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем линейное уравнение $4 = x - 3$, корень которого является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ. $x = 7$.

Решить уравнения:

4.31. $\sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = 7.$

4.32*. $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11.$

4.33. $\sqrt[4]{47-2x} + \sqrt[4]{35+2x} = 4.$

4.34. $(x+4)(x+1) - 3\sqrt{x^2+5x+2} = 6.$

4.35. $\sqrt[5]{\dfrac{16z}{z-1}} + \sqrt[5]{\dfrac{z-1}{16z}} = 2{,}5.$

4.36. $\sqrt{x^2+32} - 2\sqrt[4]{x^2+32} = 3.$

4.37*. $\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}}{2} = x + \sqrt{x^2-16} - 6.$

4.38*. $\sqrt[7]{\dfrac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\dfrac{x+3}{5-x}} = 2.$

4.39. $\sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56.$

4.40. $\dfrac{(5-x)\sqrt{5-x} + (x-3)\sqrt{x-3}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x-3}} = 2.$

4.41. $x\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2} + 4 = 0.$

4.42. $x^2 + 3x - 18 + 4\sqrt{x^2+3x-6} = 0.$

4.43. $\sqrt{3y^2+6y+16} + \sqrt{y^2+2y} = 2\sqrt{y^2+2y+4}.$

4.44*. $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+66^2}+x}{x}} - \sqrt{x\sqrt{x^2+66^2} - x^2} = 5.$

4.45. $\dfrac{3(x-2) + 4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)} = 1.$

4.46. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}.$

4.47*. $(x-3)^2 + 3x - 22 = \sqrt{x^2-3x+7}.$

4.48. $\dfrac{3+x}{3x} = \sqrt{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4}{9} + \dfrac{2}{x^2}}}.$

Решение иррациональных уравнений методом выделения полного квадрата в подкоренных выражениях.

Пример 4.4. Решить уравнение

$$\sqrt{x-1+2\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-1-2\sqrt{x-2}} = 1.$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x-2} = t$; тогда исходное уравнение приобретает вид

$$\sqrt{t^2+2t+1} - \sqrt{t^2-2t+1} = 1. \qquad (*)$$

Так как под радикалами в левой части уравнения (*) стоят полные квадраты, то уравнение сводится к следующему уравнению:

$$|t+1| - |t-1| = 1.$$

Единственным корнем этого уравнения является $t = 0{,}5$. Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем уравнение

$$\sqrt{x-2} = 0{,}5,$$

корнем которого является $x = 2{,}25$.

Ответ. $x = 2{,}25$.

Решить уравнения:

4.49. $\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 2.$

4.50. $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}} = 1.$

4.51. $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4.$

4.52. $\sqrt{x^2+2\sqrt{x^2-1}} - \sqrt{x^2-2\sqrt{x^2-1}} = 1.$

4.53. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = 3.$

4.54. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1.$

4.55. $\sqrt{2x-2\sqrt{2x-1}} - 2\sqrt{2x+3-4\sqrt{2x-1}} + 3\sqrt{2x+8-6\sqrt{2x-1}} = 4.$

4.56. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$

4.57. $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-x}} - \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-x}} = \sqrt{3}.$

4.58. $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2.$

4.59. $2\sqrt{5\sqrt[4]{x+1}+4}-\sqrt{2\sqrt[4]{x+1}-1}=$
$$=\sqrt{20\sqrt[4]{x+1}+5}$$

4.60. $\sqrt{2x^2-9x+4}+3\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^2+21x-11}.$

4.61. $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}.$

4.62*. $\sqrt[3]{4-4x+x^2}+\sqrt[3]{49+14x+x^2}=$
$$=3+\sqrt[3]{14-5x-x^2}.$$

4.63*. $\sqrt{2x^2+8x+6}+\sqrt{x^2-1}=2x+2.$

4.64. $\sqrt{x-2}+\sqrt{1-x}=2.$

4.65. $\frac{1}{4}x=(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1-x}+1).$

4.66. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}=\dfrac{2}{2-x}.$

4.67. $\sqrt[3]{(a+x)^2}+4\sqrt[3]{(a-x)^2}=5\sqrt[3]{a^2-x^2}.$

4.68. $\sqrt[n]{(x+1)^2}+\sqrt[n]{(x-1)^2}=4\sqrt[n]{x^2-1}.$

4.69. $\dfrac{\sqrt{x^2+8x}}{\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+7}=\dfrac{7}{\sqrt{x+1}}.$

4.70. $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30.$

4.71. $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}=3.$

§ 5. Показательные уравнения

Показательными называются уравнения, в которых неизвестное входит только в показатели степеней при постоянных основаниях. Простейшим показательным уравнением является уравнение вида
$$a^x=b. \qquad (1)$$

Его решением при $a>0$ и $b>0$, $a\neq 1$, является
$$x=\log_a b.$$

Если вместо x в показателе степени стоит некоторая функция $f(x)$, т. е. уравнение имеет вид
$$a^{f(x)}=b,\quad a>0,\quad a\neq 1,\quad b>0, \qquad (2)$$

то, логарифмируя обе части этого уравнения, приходим к эквивалентному уравнению
$$f(x)=\log_a b.$$

Решение простейших показательных уравнений. Некоторые показательные уравнения приводятся к виду (1) или (2) с помощью равенств
$$a^{x+y}=a^x\cdot a^y,$$
$$(a^x)^y=a^{xy},$$
$$\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y},$$
$$(a\cdot b)^x=a^x\cdot b^x,$$
$$\left(\frac{a}{b}\right)^x=\frac{a^x}{b^x}.$$

Пример 5.1. Решить уравнение
$$6^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде
$$3^{2x+4}\cdot 2^{2x+4}=3^{3x}\cdot 2^{x+8}.$$

Используя свойство членов пропорции, имеем
$$\frac{3^{2x+4}}{3^{3x}}=\frac{2^{x+8}}{2^{2x+4}},$$

или после упрощения $3^{4-x}=2^{4-x}$. Преобразуя данное уравнение к виду
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}=1,$$

получаем $4-x=0$, откуда следует, что $x=4$.

Ответ. 4.

Решить уравнения:

5.1. $\sqrt{3^x}\cdot\sqrt{5^x}=225.$

5.2. $2^{3x}\cdot 5^x=1600.$

5.3. $9^{3-5x}\cdot 7^{5x-3}=1.$

5.4. $3^{2x-1}\cdot 5^{3x+2}=\frac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}.$

5.5. $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}.$

5.6. $7^{\frac{2x^2-5x-9}{2}}=(\sqrt{2})^{3\log_2 7}.$

5.7. $4\cdot 3^{x+2}+5\cdot 3^x-7\cdot 3^{x+1}=40.$

5.8. $5\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x} + 4\cdot 5^{\cos 2x} = 25^{\frac{1}{2}\sin 2x}$

5.9. $16^{\frac{x+5}{x-7}} = 512\cdot 64^{\frac{x+17}{x-3}}$.

5.10. $5^{|4x-6|} = 25^{3x-4}$.

5.11. $\sqrt{3}\cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81$.

5.12. $8^{\frac{x-3}{3x-7}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{0{,}25^{\frac{3x-1}{x-1}}}} = 1$.

5.13. $0{,}6^{x}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^{x^2-12} = \left(\frac{27}{125}\right)^{3}$.

5.14. $(2{,}4)^{1-\sin x}\cdot[0{,}41(6)]^{\sin x+1/2} = \left(\frac{12}{5}\right)^{1/2}$.

5.15. Найти решение уравнения

$$3^{x^2+4x} = \frac{1}{25},$$

удовлетворяющее условию $x > -3$.

Решения показательных уравнений, сводящихся заменой переменных к алгебраическому уравнению.

Если показательное уравнение имеет вид

$$g\left(a^{f(x)}\right) = 0, \qquad (3)$$

то заменой $y = a^{f(x)}$ оно сводится к уравнениям вида

$$a^{f(x)} = y_i,$$

где y_i — корни уравнения $g(y) = 0$.

Пример 5.2. Решить уравнение

$$4^{\sqrt{x^2-2}+x} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Решение. Обозначая $2^{\sqrt{x^2-2}+x} = y$ и производя замену переменных, получаем квадратное уравнение

$$y^2 - \frac{5}{2}y - 6 = 0,$$

корнями которого будут $y_1 = 4$ и $y_2 = -3/2$. Таким образом, решение данного уравнения свелось к решению уравнений

$$2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 4, \qquad 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = -3/2.$$

Второе уравнение решений не имеет, так как $2^{x+\sqrt{x^2-2}} > 0$ при всех допустимых значениях x. Из первого уравнения получаем

$$x + \sqrt{x^2-2} = 2.$$

Уединяя радикал и возводя обе части уравнения в квадрат, имеем

$$x^2 - 2 = 4 - 4x + x^2.$$

Приводя подобные члены, получаем единственный корень $x = 3/2$. Проверкой убеждаемся, что этот корень удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ. $x = 3/2$.

Решить уравнения:

5.16. $9^{x^2-1} - 36\cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$.

5.17. $3\sqrt[x]{81} - 10\sqrt[x]{9} + 3 = 0$.

5.18. $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^{x} + 9^{-x} = 6$.

5.19. $64^{1/x} - 2^{2+3/x} + 12 = 0$.

5.20. $4^{\log_9 x} - 6\cdot 2^{\log_9 x} + 2^{\log_3 27} = 0$.

5.21. $4^{\sqrt{3x^2-2x}+1} + 2 = 9\cdot 2^{\sqrt{3x^2-2x}}$.

Показательные уравнения, основания степеней которых являются последовательными членами геометрической прогрессии, а показатели степеней одинаковы, приводятся к уравнениям вида (3) делением на любой из крайних членов.

Пример 5.3. Решить уравнение

$$6\cdot 4^{x} - 13\cdot 6^{x} + 6\cdot 9^{x} = 0.$$

Решение. Разделим обе части уравнения на 9^x. Имеем

$$6\left(\frac{4}{9}\right)^{x} - 13\left(\frac{6}{9}\right)^{x} + 6 = 0.$$

Обозначая $\left(\frac{2}{3}\right)^{x} = y$ и производя замену переменных, получаем уравнение

$$6y^2 - 13y + 6 = 0,$$

корнями которого будут $y_1 = 3/2$ и $y_2 = 2/3$. Таким образом, решение уравнения сводится к решению двух простейших показательных уравнений

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = \frac{3}{2}, \qquad \left(\frac{3}{2}\right)^{x} = \frac{2}{3}.$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Решить уравнения:

5.22. $7\cdot 4^{x^2}-9\cdot 14^{x^2}+2\cdot 49^{x^2}=0.$

5.23. $3\cdot 16^x+36^x=2\cdot 81^x.$

5.24. $8^x+18^x=2\cdot 27^x.$

5.25. $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0.$

5.26. $16^x-5\cdot 8^x+6\cdot 4^x=0.$

5.27. $2^{3x-3}-5+6\cdot 2^{3-3x}=0.$

5.28. $27^x+12^x=2\cdot 8^x.$

5.29. $(4+\sqrt{15})^x+(4-\sqrt{15})^x=62.$

5.30. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x=10.$

5.31. $9^{1/x}+12^{1/x}=16^{1/x}.$

5.32. $5^{1+x^2}-5^{1-x^2}=24.$

5.33. $5^{x-1}+5\cdot 0{,}2^{x-2}=26.$

5.34. $10^{2/x}+25^{1/x}=4{,}25\cdot 50^{1/x}.$

Уравнения вида

$$[a(x)]^{b(x)}=[a(x)]^{c(x)}$$

эквивалентны уравнению

$$a(x)=1$$

и системе

$$b(x)=c(x),$$
$$a(x)>0.$$

Пример 5.4. Решить уравнение

$$|x-2|^{10x^2-1}=|x-2|^{3x}.$$

Решение. Исходное уравнение эквивалентно уравнению

$$|x-2|=1$$

и системе

$$10x^2-1=3x,$$
$$|x-2|\neq 0.$$

Первые два уравнения имеют корни $x_1=3$, $x_2=1$, а система — $x_3=1/2$, $x_4=-1/5$.

Ответ. $x_1=3$, $x_2=1$, $x_3=1/2$, $x_4=-1/5$

Решить уравнения:

5.35. $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}}=\sqrt{|x-3|^{x-2}}.$

5.36. $|x-3|^{3x^2-10x+3}=1.$

5.37. $x^{\log_a x}=(a^{\pi})^{\log_a^3 x}.$

5.38. $(\sqrt{x})^{\log_5 x-1}=5.$

5.39. $x^{\lg x+7}=10^{(\lg x+1)\cdot 4}.$

Некоторые специальные методы решения показательных уравнений. Некоторые уравнения сводятся к рассмотренным выше, если преобразовать отдельные их элементы, используя основное логарифмическое тождество.

Пример 5.5. Решить уравнение

$$3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=162.$$

Решение. Согласно сделанному замечанию преобразуем второе слагаемое в левой части уравнения:

$$x^{\log_3 x}=\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}=3^{\log_3^2 x}. \qquad (*)$$

Подставляя полученное выражение в исходное уравнение, получаем

$$2\cdot 3^{\log_3^2 x}=162. \qquad (**)$$

Уравнение (**) эквивалентно уравнению $\log_3^2 x=4$, которое в свою очередь эквивалентно двум уравнениям

$$\log_3 x=2,\quad \log_3 x=-2.$$

Решая последние уравнения, получаем $x_1=9$, $x_2=\frac{1}{9}$.

Ответ: $x_1=9$, $x_2=\frac{1}{9}$.

Решить уравнения:

5.40. $5^{\lg x}=50-x^{\lg 5}.$

5.41. $10^{\lg^2 x}+x^{\lg x}=20.$

5.42. $x^{2\lg 2}-5\cdot 2^{\lg x}+6=0.$

Некоторые уравнения, содержащие неизвестное в показателе степени, удается решить с помощью исследования функций, входящих в левую и правую части уравнений.

Пример 5.6. Решить уравнение

$$7^{6-x}=x+2.$$

Решение. Корень $x=5$ может быть найден подбором. Других решений уравнение не имеет, так как функция $f(x)=7^{6-x}$ монотонно убывает, а $g(x)=x+2$ монотонно возрастает, и, следовательно, графики этих функций могут пересечься не более одного раза.

Ответ. $x=5$.

Решить уравнения:

5.43*. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x=2^x$.

5.44*. $3^{x-1}+5^{x-1}=34$.

5.45*. $2^{3x^2-2x^3}=\frac{x^2+1}{x}$.

5.46*. $4^x+(x-1)\,2^x=6-2x$.

5.47*. $(x+1)\,9^{x-3}+4x\cdot 3^{x-3}-16=0$.

5.48*. $x^2-x+1=2\cdot 2^{x-1}-4^{x-1}$.

5.49. $5^{\sqrt{x}}+12^{\sqrt{x}}=13^{\sqrt{x}}$.

5.50. $3^{x^2}+4^{x^2}=5^{x^2}$.

5.51. $\left(\frac{4}{3}\right)^x=-2x^2+6x-9$.

§ 6. Логарифмические уравнения

Логарифмическим называется уравнение, содержащее неизвестную величину под знаком логарифма. Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x=b,\quad a>0,\quad a\neq 1, \tag{1}$$

с множеством допустимых значений $x>0$ имеет решение $x=a^b$.

Логарифмическое уравнение, в котором под знаком логарифма стоит некоторая функция $f(x)$,

$$\log_a f(x)=b,\quad a>0,\quad a\neq 1, \tag{2}$$

имеет множесто допустимых значений x, задаваемых неравенством $f(x)>0$, и эквивалентно уравнению

$$f(x)=a^b.$$

Решение логарифмических уравнений сведением к простейшим логарифмическим уравнениям. Некоторые логарифмические уравнения решаются с использованием основных свойств логарифмов (1)—(5) (гл. 1, § 5), сводящих решение уравнения к решению простейшего логарифмического уравнения.

Пример 6.1. Решить уравнение

$$2-x+3\log_5 2=\log_5(3^x-5^{2-x}).$$

Решение. Перенесем логарифм, стоящий в левой части уравнения, в правую часть и, воспользовавшись свойствами логарифмов, запишем уравнение в виде

$$2-x=\log_5\left(\frac{3^x-5^{2-x}}{8}\right).$$

Последнее уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{3^x-5^{2-x}}{8}=5^{2-x},$$

которое можно записать в виде

$$3^x=9\cdot 5^{2-x},\quad \text{или}\quad 3^{x-2}=5^{2-x},\quad \text{или}\quad 15^{x-2}=1.$$

Полученное показательное уравнение эквивалентно уравнению $x-2=0$, решение которого $x=2$.

Множество допустимых значений x данного уравнения определяется как решение неравенства

$$3^x-5^{2-x}>0.$$

При $x=2$ данное неравенство справедливо, и, следовательно, $x=2$ является решением исходного логарифмического уравнения.

Ответ. $x=2$.

Решить уравнения:

6.1. $\log_5[2+\log_3(3+x)]=0$. √1

6.2. $\lg(5-x)-\frac{1}{3}\lg(35-x^3)=0$.

6.3. $\log_3(3^x-8)=2-x$. √

6.4. $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)-\log_{\sqrt{5}}(2^x-2)=2$.

6.5. $\lg(3x^2+12x+19)-\lg(3x+4)=1$.

Логарифмическое уравнение вида

$$\log_{a(x)} f(x)=\log_{a(x)} g(x)$$

эквивалентно уравнению

$$f(x)=g(x),$$

рассматриваемому на множестве допустимых значений x, задаваемом системой неравенств

$$f(x)>0,\quad g(x)>0,\quad a(x)>0,\quad a(x)\neq 1.$$

Если в данное уравнение входят логарифмы по разным основаниям, то предварительно необходимо привести все логарифмы к одному основанию.

Пример 6.2. Решить уравнение

$$\lg\sqrt{x-1}+\frac{1}{2}\lg(2x+15)=1. \tag{*}$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестного x в данном уравнении находится как решение системы

$$x-1>0, \quad 2x+15>0$$

и представляет собой промежуток $(1;\ \infty)$. Используя свойства логарифмов, преобразуем данное логарифмическое уравнение к следующему виду:

$$\lg\left(\sqrt{(x-1)}\sqrt{2x+15}\right)=1.$$

Из последнего уравнения по определению логарифма получаем иррациональное уравнение

$$\sqrt{(x-1)(2x+15)}=10,$$

решение которого $x_1=5$, $x_2=-23/2$. Множеству допустимых значений x исходного уравнения принадлежит лишь корень $x_1=5$, который и является решением исходного уравнения.

Ответ. $x=5$.

Решить уравнения:

6.6 $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$.

6.7. $\log_5\left(\dfrac{2+x}{10}\right)=\log_5\left(\dfrac{2}{x+1}\right)$.

6.8. $\dfrac{1}{2}\lg(x^2-10x+25)+\lg(x^2-6x+3)=$

$$=2\lg(x-5)+\frac{1}{2}\lg 25.$$

6.9. $\dfrac{1}{10}\lg\sqrt[3]{x^2-4x+4}-\dfrac{1}{2}\lg x-\lg\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$.

6.10. $\lg(x(x+9))+\lg\dfrac{x+9}{x}=0$.

6.11. $\log_2(2x^2-2)=\log_2(5x-4)$.

6.12. $\dfrac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)}=3$.

6.13. $\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$.

6.14. $\log_{x^3+2x^2-3x+5}(x^3+3x^2+2x-1)=\log_{2x}x+\log_{2x}2$.

6.15. $\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3$.

6.16. $\log_{x+1}(x^3-9x+8)\log_{x-1}(x+1)=3$.

6.17. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$.

6.18. $\log_{(3-4x^2)}(9-16x^4)=2+\dfrac{1}{\log_2(3-4x^2)}$

6.19. $\log_{3x}\dfrac{3}{x}+\log_3^2 x=1$.

6.20. $\log_x 16+\log_{2x}64=3$.

6.21 $20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{x/2}x^2=0$.

6.22. $\log_x 2-\log_4 x+\dfrac{7}{6}=0$.

6.23. $2-\log_{b^2}(1+x)=3\log_b\sqrt{x-1}-\log_{b^4}(x^2-1)^2$.

6.24. $3\log_x 4+2\log_{4x}4+3\log_{16x}4=0$.

Решение логарифмических уравнений, сводящихся заменой переменных к алгебраическому уравнению. Если логарифмическое уравнение имеет вид

$$f(\log_a x)=0,$$

где f — некоторая функция, то заменой $y=\log_a x$ оно сводится к уравнениям вида (1):

$$\log_a x=y_i,$$

где y_i — корни уравнения $f(y)=0$.

Пример 6.3. Решить уравнение

$$(\log_2 x)^2-5(\log_2 x)+6=0.$$

Решение. Обозначая $\log_2 x=y$, получаем уравнение

$$y^2-5y+6=0,$$

корни которого $y_1=2$, $y_2=3$. Таким образом, исходное уравнение эквивалентно двум уравнениям вида (1):

$$\log_2 x=2, \quad \log_2 x=3,$$

решения которых: $x_1=4$ и $x_2=8$.

Ответ. $x_1=4$, $x_2=8$.

Решить уравнения:

6.25. $\lg^3 x-\lg^2 x-6\lg x=0$.

6.26. $2\sqrt[3]{2\log_{16}^2 x}-\sqrt[3]{\log_2 x}-6=0$.

6.27. $\dfrac{3}{4}\log_{\sqrt{3}}^3 x-30\sqrt{\log_3^3 x}+36=0$.

6.28. $\log_{1/9}\left(\dfrac{x}{27}\right)\log_{1/9}\left[x\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}\right]=2\cos^2\dfrac{4\pi}{3}$.

6.29. $\sqrt{1+\log_x\sqrt{27}}\,\log_3 x+1=0$.

6.30. $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$.

6.31. $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{1/x}=2$.

6.32*. $\sqrt{\lg(-x)}=\lg\sqrt{x^2}$.

6.33. $\log_3(3^x-1)\log_3(3^{x+1}-3)=6$.

6.34. $2\log_2\log_2 x+\log_{1/2}\log_2(2\sqrt{2}\,x)=1$.

Решение логарифмических уравнений методом логарифмирования. Если неизвестное входит в уравнение как под знаком логарифма, так и в основании степени, то в некоторых случаях уравнения указанного типа могут решаться логарифмированием обеих частей уравнения с последующим использованием приведенных выше методов решения логарифмических уравнений.

Пример 6.4. Решить уравнение

$$x^{2+\log_3 x}=3^8.$$

Решение. Прологарифмируем обе части уравнения

$$\log_3\left(x^{2+\log_3 x}\right)=\log_3 3^8;$$

используя свойства логарифмов, получаем уравнение

$$(2+\log_3 x)\log_3 x=8.$$

Обозначая $\log_3 x=y$ и производя замену переменных, находим корни квадратного уравнения

$$y^2+2y-8=0,$$
$$y_1=-4,\quad y_2=2.$$

Решая простейшие логарифмические уравнения, получаем значения

$$\log_3 x=-4\Rightarrow x=3^{-4},$$
$$\log_3 x=2\Rightarrow x=3^2.$$

Ответ. $x_1=3^2$, $x_2=3^{-4}$.

Решить уравнения:

6.35. $x^{(2\lg^3 x-1.5\lg x)}=\sqrt{10}.$

6.36. $x^{\lg^2 x+\lg x^3+3}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}.$

6.37. $x^{2\lg^2 x}=10x^3.$

6.38. $15^{\log_5 3}x^{\log_5 9x+1}=1.$

6.39. $9x^{\lg x}+9x^{-\lg x}=60.$

6.40. $x^{\log_2^2(x^2)-\log_2(2x)-2}-(x+2)^{\log_{(x+2)^2}4}=3.$

6.41. $x^{\frac{3}{(\log_3 x^2)^3}}=(\sqrt{x})^{-\log_3 x+\frac{1}{\log_3\sqrt{x}}}.$

6.42. $7\cdot x^{\frac{3}{\left(\log_2 x^2\right)^3}+\log 2}=5+(x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}}$

Решение логарифмических уравнений с помощью свойств логарифмической функции. Некоторые логарифмические уравнения удается решить с помощью исследования поведения функций, входящих в левую и правую части уравнения.

Пример 6.5. Решить уравнение

$$\log_7(x+2)=6-x.$$

Решение. Подстановкой проверяем, что $x=5$ является решением уравнения. Других решений уравнение не имеет, так как функция, стоящая в левой части, возрастает, а в правой — убывает, и, следовательно, графики этих функций не могут иметь более одного пересечения.

Ответ. $x=5$.

Решить уравнения:

6.43. $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0.$

6.44. $3x^2-2x^3=\log_2(x^2+1)-\log_2 x.$

6.45. $3^x=10-\log_2 x.$

6.46. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x.$

§ 7. Разные задачи

Решить уравнения:

7.1. $12^{2x+4}=3^{3x}\cdot 4^{x+8}.$

7.2. $2^x+4^{(x+1)/2}=8\cdot 3^{x/3}.$

7.3. $2^x-3^{x/2}=1.$

7.4. $(\sin 1)^x+(\cos 1)^x=1.$

7.5. $10x^2=2\cdot 100^x.$

7.6. $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x.$

7.7** $5x\ \sqrt[x+1]{8^x}=100.$

7.8. $11^{3x-2}+13^{3x-2}=13^{3x-1}-11^{3x-1}.$

7.9*. $10^{(x+1)(3x+4)}-2\cdot 10^{(x+1)(x+2)}=10^{1-x-x^2}.$

7.10. $x^{\sqrt[3]{x^2}}=(\sqrt{x})^x.$

7.11. $9^x-5\cdot 12^x+6\cdot 16^x=0.$

7.12. $\log_3[(x+2)(x-3)]=4\log_x(2x+1)-\log_{\sqrt{7}}7.$

7.13. $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0.$

7.14. $|1-\log_{1/6}x|+2=|3-\log_{1/6}x|.$

7.15. $\log_{\sqrt{x}}(x+|x-2|)=\log_x(5x-6+5|x-2|).$

7.16. $\log_{x+1}(x^2+x-6)^2=4$.

7.17. $\dfrac{1+\log_2(x-4)}{\log_{\sqrt{2}}(\sqrt{x+3}-\sqrt{x-3})}=1$.

7.18. $\log_5\left[(2+\sqrt{5})^x-(\sqrt{5}-2)^x\right]=\frac{1}{2}-3\log_{1/5}2$.

7.19. $5\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{\sin^2 x}+4\cdot 5^{\cos 2x}=25^{\frac{1}{2}\sin 2x}$.

7.20. $\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}+\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{\cos x}=\frac{5}{2}$.

7.21. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_9(x^2+2x+4)}=6^{\log_{1/6}(x+2)}$.

ГЛАВА 3
СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Несколько уравнений

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\ \ldots,\ F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

рассматриваемых совместно, называют *системой уравнений*. Решением этой системы называется упорядоченный набор значений неизвестных, обращающий все уравнения системы в тождества.

Если система уравнений имеет решения, то говорят, что она *совместная*. Если система уравнений не имеет решений, то говорят, что она *несовместная*.

Линейным уравнением с n неизвестными называют уравнение вида

$$a_1x_1+a_2x_2+\ \ldots\ +a_nx_n=b,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — некоторые числа.

Система уравнений называется *линейной*, если все уравнения системы линейные. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение (т. е. существует единственный набор чисел $k_1, \ldots, k_n$, обращающий все уравнения системы в тождества).

Совместная система уравнений называется *неопределенной*, если она имеет более одного решения. Две совместные системы уравнений *эквивалентны*, если множества их решений совпадают.

При решении систем уравнений часто используются следующие преобразования системы, приводящие к системе уравнений, эквивалентной исходной.

1. Если обе части какого-либо уравнения системы домножить на одно и то же (не равное нулю) число, то полученная система будет эквивалентна первоначальной (т. е. они или обе несовместны, или же обе совместны и множества их решений совпадают).

2. Если обе части какого-либо уравнения системы, умноженные на некоторое (отличное от нуля) число, вычесть из соответствующих частей другого уравнения и составить систему, в которой вместо одного из упомянутых уравнений стоит уравнение, полученное в результате вычитания, а остальные уравнения оставлены без изменений, то полученная система будет эквивалентна исходной.

§ 1. Системы линейных уравнений

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса. При нахождении решений системы m линейных уравнений с n неизвестными удобно использовать *метод Гаусса*, состоящий в том, что систему приводят к треугольному или трапецеидальному виду. Проиллюстрируем метод Гаусса на примере.

Пример 1.1. Решить систему

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=8,\\ 3x+y+z&=6,\\ 2x+y+2z&=6. \end{aligned}$$

Решение. Умножая обе части первого уравнения на -3 и складывая со вторым уравнением, получаем уравнение $-5y-8z=-18$, или

$$5y+8z=18.$$

Умножая обе части первого уравнения на (-2) и складывая с третьим уравнением системы, получаем уравнение $-3y-4z=-10$, или

$$3y+4z=10.$$

Следовательно, данную систему можно записать в виде эквивалентной системы, в которой второе и третье уравнения не содержат неизвестного x:

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=8,\\ 5y+8z&=18,\\ 3y+4z&=10. \end{aligned} \qquad (*)$$

Умножая обе части второго уравнения на 3, а третьего — на (-5) и складывая эти уравнения, получаем уравнение $4z=4$; таким образом, система $(*)$ записывается в виде эквивалентной системы

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=8,\\ 5y+8z&=18,\\ z&=1. \end{aligned}$$

Итак, исходная система приведена к треугольному виду. Подставляя $z=1$ во второе уравнение системы, находим $y=2$. Подставляя значения $z=1$ и $y=2$ в первое уравнение, находим $x=1$.

Ответ. $x=1$, $y=2$, $z=1$.

Решить системы линейных уравнений методом Гаусса:

1.1. $2x+y+z=7,\quad x+2y+z=8,\quad x+y+2z=9.$

1.2. $3x-4y+5z=18,\quad 2x+4y-3z=26,\quad x-6y+8z=0.$

1.3. $10x-9z=19,\quad 8x-y=10,\quad y-12z=10.$

1.4. $x+2y+z+7=0,\quad 2x+y-z-1=0,\quad 3x-y+2z-2=0.$

1.5. $\dfrac{x}{a^3}-\dfrac{y}{a^2}+\dfrac{z}{a}=1,\quad \dfrac{x}{b^3}-\dfrac{y}{b^2}+\dfrac{z}{b}=1,\quad \dfrac{x}{c^3}-\dfrac{y}{c^2}+\dfrac{z}{c}=1.$ V

1.6. $x+a^2y+b^2z=0,\quad x+ay+bz=0,\quad x+y+z=1.$ V

Решение и исследование систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y&=b_1,\\ a_{21}x+a_{22}y&=b_2 \end{aligned} \qquad (*)$$

при условии, что хотя бы один из коэффициентов отличен от нуля. Пусть Δ, Δ_x и Δ_y — определители системы $(*)$:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12}\\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12},$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1\\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}=a_{11}b_2-a_{21}b_1.$$

При $\Delta\neq 0$ система имеет единственное решение $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

При $\Delta=0$:

1) если хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y не равен нулю, то система $(*)$ *несовместная* (т. е. не имеет решений);

2) если $\Delta_x=\Delta_y=0$, то система $(*)$ *совместная и неопределенная* (т. е. имеет бесконечно много решений).

Каждое из уравнений системы $(*)$ задает линейное соответствие между переменными x и y. Всякое линейное соответствие между переменными x и y определяет в прямоугольной системе координат некоторую прямую. Если система имеет единственное решение, то прямые, задаваемые первым и вторым уравнениями, пересекаются. Если система имеет бесчисленное множество решений, прямые совпадают; если система несовместна, прямые параллельны.

Пример 1.2. Решить и исследовать систему

$$\begin{aligned} ax+y&=2,\\ x+ay&=2a. \end{aligned}$$

Решение. Вычислим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1,$$
$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2a & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0,$$
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 2a^2 - 2.$$

1) Пусть $\Delta = a^2 - 1 \neq 0$, т. е. $a \neq \pm 1$. В этом случае система имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{0}{a^2 - 1} = 0, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2a^2 - 2}{a^2 - 1} = 2.$$

2) Пусть $\Delta = a^2 - 1 = 0$, т. е. $a = \pm 1$. В этом случае $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$, т. е. система совместная и неопределенная.

При $a = 1$ система принимает вид

$$x + y = 2, \quad x + y = 2,$$

и ее решениями будут все пары чисел (x, y), связанные равенством $x + y = 2$.

При $a = -1$ имеем

$$\begin{aligned} -x + y &= 2, \\ x - y &= -2, \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} x - y &= -2, \\ x - y &= -2, \end{aligned}$$

и ее решениями будут все пары чисел (x, y), связанные равенством $x - y = -2$.

Ответ. При $a \neq \pm 1$ система имеет единственное решение $x = 0$, $y = 2$;

при $a = 1$ система имеет своими решениями все пары чисел (x, y), связанные равенством $x + y = 2$;

при $a = -1$ система имеет своими решениями все пары чисел (x, y), связанные равенством $x - y = -2$.

Решить и исследовать системы уравнений:

1.7. $\begin{aligned} x + ay - 1 &= 0, \\ ax - 3ay - (2a + 3) &= 0. \end{aligned}$ **1.8.** $\begin{aligned} 3x + ay &= 5a^2, \\ 3x - ay &= a^2. \end{aligned}$

1.9. $\begin{aligned} (a + 5)x + (2a + 3)y - (3a + 2) &= 0, \\ (3a + 10)x + (5a + 6)y - (2a + 4) &= 0. \end{aligned}$

1.10. $\begin{aligned} a(a - 1)x + (a + 1)ay &= a^3 + 2, \\ (a^2 - 1)x + (a^3 + 1)y &= a^4 - 1. \end{aligned}$ **1.11.** $\begin{aligned} ax - y &= b, \\ bx + y &= a. \end{aligned}$

1.12. $\begin{aligned} (a^2 + b^2)x + (a^2 - b^2)y &= a^2, \\ (a + b)x + (a - b)y &= a. \end{aligned}$

1.13. Найти такие значения параметров m и p, при которых система

$$\begin{aligned} (3m - 5p + b)x + (8m - 3p - a)y &= 1, \\ (2m - 3p + b)x + (4m - p)y &= 2 \end{aligned}$$

была бы неопределенной.

1.14. Совместны ли уравнения

$$\begin{aligned} x + ay &= b + c, \\ x + by &= c + a, \\ x + cy &= a + b, \end{aligned}$$

где $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, a, b, c — действительные числа?

1.15. Числа a и b таковы, что система

$$\begin{aligned} a^2x - ay &= 1 - a, \\ bx + (3 - 2b)y &= 3 + a \end{aligned}$$

имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Найти числа a и b.

1.16. При каких значениях a и b система

$$\begin{aligned} a^2x - by &= a^2 - b, \\ bx - b^2y &= 2 + 4b \end{aligned}$$

имеет бесконечно много решений?

1.17. При каких значениях a система

$$\begin{aligned} a^2x + (2 - a)y &= 4 + a^3, \\ ax + (2a - 1)y &= a^5 - 2 \end{aligned}$$

не имеет решений?

1.18. Числа a, b и c таковы, что система

$$\begin{aligned} ax - by &= 2a - b, \\ (c + 1)x + cy &= 10 - a + 3b \end{aligned}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x = 1$, $y = 3$ — одно из этих решений. Найти a, b и c.

1.19. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{aligned} ax - 4y &= a + 1, \\ 2x + (a + 6)y &= a + 3 \end{aligned}$$

не имеет решений?

1.20. При каких значениях параметра a система

$$\begin{aligned} 2x + ay &= a + 2, \\ (a + 1)x + 2ay &= 2a + 4 \end{aligned}$$

имеет бесконечно много решений?

§ 2. Системы нелинейных уравнений

Решение систем, содержащих линейное уравнение. Если одно из уравнений системы двух уравнений с двумя неизвестными линейное, а второе — нелинейное, то эта система решается следующим способом. Из линейного уравнения выражают одно неизвестное через другое и подставляют во второе уравнение, которое после этого превращается в алгебраическое уравнение с одним неизвестным.

Решить системы уравнений:

2.1. $(x-y)(x^2-y^2)=45,\quad x+y=5.$

2.2. $(x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1,\quad x+y=0{,}9.$

2.3. $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{13}{6},\quad x+y=5.$

2.4. $(x+y)^4+4(x+y)^2-117=0,\quad x-y=25.$

2.5. $x^2+y^2=2(xy+2),\quad x+y=6.$

2.6. $x^2+y^2+10x-10y=2xy-21,\quad x+y=5.$

Решение систем, содержащих однородное уравнение. В тех случаях, когда одно из двух уравнений нелинейной системы однородное, можно с помощью этого уравнения линейно выразить одно неизвестное системы через другое.

Пример 2.1. Решить систему

$$\begin{aligned} x^2-5xy+6y^2&=0,\\ x^2+y^2&=10. \end{aligned}\qquad (*)$$

Решение. Разделив первое уравнение на y^2, получаем относительно неизвестного $t=x/y$ квадратное уравнение

$$t^2-5t+6=0,$$

корнями которого являются $t_1=2$, $t_2=3$. Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем следующие линейные зависимости между неизвестными, входящими в исходную систему (*):

$$x=2y,\quad x=3y.\qquad (**)$$

Подставляя последовательно $x=3y$ и $x=2y$ во второе уравнение данной системы, получаем относительно неизвестного y квадратные уравнения $y^2=1$ и $y^2=2$, корни которых $y_{1,2}=\pm1$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{2}$. Соответствующие значения x_1, x_2, x_3, x_4 находятся из равенств (**).

Ответ. Пары чисел (3, 1), (−3, −1), $(2\sqrt{2},\ \sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$.

Система вида

$$\begin{aligned} a_1x^2+b_1y^2+c_1xy&=d_1,\\ a_2x^2+b_2y^2+c_2xy&=d_2, \end{aligned}\qquad d_1\ne0,\ d_2\ne0,$$

сводится к системе, содержащей однородное уравнение, следующим образом: умножаем обе части первого уравнения на d_2, обе части второго — на $(-d_1)$ и складываем первое уравнение со вторым. В результате сложения получается однородное уравнение. Далее исходную систему заменяем эквивалентной системой, состоящей из полученного однородного уравнения и одного из уравнений исходной системы.

Пример 2.2. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x^2-y^2&=1,\\ x^2+xy&=2. \end{aligned}$$

Решение. Умножив обе части первого уравнения на 2, обе части второго — на (−1) и складывая полученные уравнения, получаем однородное уравнение

$$x^2-2y^2-xy=0.$$

Поделив обе части однородного уравнения на y^2, получим относительно $z=\frac{x}{y}$ квадратное уравнение

$$z^2-z-2=0,$$

корни которого $z_1=-1$, $z_2=2$.

Исходная система, таким образом, эквивалентна двум системам

$$\begin{aligned} x^2-y^2&=1,\\ \frac{x}{y}&=-1 \end{aligned}\quad \text{и}\quad \begin{aligned} x^2-y^2&=1,\\ \frac{x}{y}&=2, \end{aligned}$$

первая из которых несовместная, а решения второй имеют вид $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ответ. $\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Решить системы уравнений:

2.7. $x^2y^3+x^3y^2=12,\quad x^2y^3-x^3y^2=4.$

2.8. $x^3+y^3=65,\quad x^2y+xy^2=20.$

2.9. $x^4-y^4=15,\quad x^3y-xy^3=6.$

Решение симметрических систем. Система уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется *симметрической*, если она не меняется при перестановке неизвестных. Если неизвестных два (x и y), то часто решение таких систем может быть найдено с помощью введения новых неизвестных $u=x+y$,

$v = xy$. При этом удобно использовать следующие равенства:

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$
$$x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy\,(x+y) = u^3 - 3uv,$$
$$x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x+y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = (u^2-2v)^2 - 2v^2,$$

позволяющие выразить комбинации неизвестных x^2+y^2, x^3+y^3, x^4+y^4 через неизвестные u и v.

Пример 2.3. Решить систему уравнений

$$x^2 + y^2 = 2\,(xy+2),$$
$$x + y = 6.$$

Решение. Обозначим $v = xy$, $u = x + y$. Тогда, используя равенство

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy,$$

получаем относительно новых неизвестных систему

$$u^2 - 2v = 2v + 4,$$
$$u = 6,$$

единственным решением которой является $u = 6$, $v = 8$. Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем, что решение исходной системы сводится к решению более простой системы

$$x + y = 6, \quad xy = 8.$$

корни которой можно найти, используя, например, теорему Виета.

Ответ. (2, 4); (4, 2).

Решить системы уравнений:

2.10. $x^2y + y^2x = 20,$ $\quad \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{4}.$

2.11. $x^2 + y^2 = a,$ $\quad \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = b.$

2.12. $x^2y + xy^2 = 6,$ $\quad xy + x + y = 5.$

2.13. $x^4 + y^4 = 82,$ $\quad x + y = 4.$

2.14. $x^3 + y^3 = 9,$ $\quad xy = 2.$

2.15. $x^3 + y^3 = 2,$ $\quad xy\,(x+y) = 2.$

2.16. $(x^2+y^2)\,xy = 78,$ $\quad x^4 + y^4 = 97.$

2.17. $5\,(x^4+y^4) = 41\,(x^2+y^2),$ $\quad x^2 + y^2 + xy = 13.$

2.18. $x^4 + y^4 = 97,$ $\quad xy = 6.$

Решить следующие системы уравнений с использованием комбинации изложенных выше методов:

2.19*. $(x^2 - x + 1)(y^2 - y + 1) = 3,$ $\quad (x+1)(y+1) = 6.$

2.20*. $\dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3},$ $\quad x^2 + y^2 = 5.$

2.21*. $2x^3y^2 - y^3x^2 = 36,$ $\quad 2x^2y - y^2x = 6.$

2.22. $xy - x + y = 1,$ $\quad x^2y - y^2x = 30.$

2.23. $xy + x - y = 3,$ $\quad x^2y - xy^2 = 2.$

2.24. $x^2 + xy + x = 10,$ $\quad y^2 + xy + y = 20.$

2.25. $x^2 + xy + 2y^2 = 37,$ $\quad 2x^2 + 2xy + y^2 = 26.$

2.26*. $x^2 - xy + y^2 = 19,$ $\quad x^4 + x^2y^2 + y^4 = 931.$

2.27*. $(x^2+1)(y^2+1) = 10,$ $\quad (x+y)(xy-1) = 3.$

2.28*. $x^5 - y^5 = 3093,$ $\quad x - y = 3.$

Симметрические системы трех уравнений с тремя неизвестными x, y, z обычно решаются с помощью введения новых неизвестных

$$u = x + y + z, \quad v = xy + yz + xz, \quad w = xyz.$$

При этом удобно использовать следующие равенства:

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2\,(xy + yz + zx) = u^2 - 2v,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3\,(x+y+z)(xy+yz+zx) + 3xyz = u^3 - 3uv + 3w.$$

Пример 2.4. Решить систему уравнений

$$x + y + z = 1,$$
$$xy + yz + zx = -4,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

Решение. Система симметрическая. Вводя вспомогательные неизвестные

$$x + y + z = u, \quad xy + yz + xz = v, \quad xyz = w$$

и пользуясь равенством

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^3 - 3uv + 3w,$$

получаем систему

$$u = 1, \quad v = -4, \quad u^3 - 3uv + 3w = 1,$$

или, возвращаясь к старым неизвестным, систему

$$x + y + z = 1,\quad xy + yz + xz = -4,\quad xyz = -4. \qquad (*)$$

Решение системы (*) может быть найдено с помощью теоремы Виета для кубичного многочлена: корни t_1, t_2, t_3 кубичного многочлена $t^3 + at^2 + bt + c$ связаны равенствами

$$t_1 + t_2 + t_3 = -a,$$
$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = b,$$
$$t_1t_2t_3 = -c.$$

Нетрудно заметить, что при $a=-1$, $b=-4$, $c=4$ корни кубичного уравнения

$$t^3-t^2-4t+4=0$$

связаны теми же равенствами, что и неизвестные x, y, z системы (*), и, следовательно, тройка значений неизвестных

$$x=t_1,\quad y=t_2,\quad z=t_3$$

будет решением системы (*). Кроме этой тройки значений неизвестных, в силу симметричности системы решениями также будут тройки значений неизвестных:

$$\begin{array}{lll} x=t_2, & y=t_1, & z=t_3,\\ x=t_3, & y=t_2, & z=t_1,\\ x=t_1, & y=t_3, & z=t_2,\\ x=t_2, & y=t_3, & z=t_1,\\ x=t_3, & y=t_1, & z=t_2. \end{array}$$

Таким образом, решение данной системы свелось к нахождению корней кубичного уравнения

$$t^3-t^2-4t+4=0.$$

Ими являются числа

$$t_1=2,\quad t_2=-2,\quad t_3=1.$$

Следовательно, решениями исходной системы будут следующие упорядоченные тройки чисел:

$$(2,\ -2,\ 1);\quad (-2,\ 2,\ 1);\quad (1,\ 2,\ -2);\quad (-2,\ 1,\ 2);$$
$$(1,\ -2,\ 2);\quad (2,\ 1,\ -2).$$

Решить системы уравнений:

2.29. $$\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ x^2+y^2+z^2&=x^3+y^3+z^3,\\ xyz&=2. \end{aligned}$$

2.30. $$\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ x^2+y^2+z^2&=1,\\ x^3+y^3+z^3&=1. \end{aligned}$$

Иногда системы трех уравнений с тремя неизвестными решаются с помощью введения вспомогательных неизвестных.

Пример 2.5. Решить систему уравнений

$$\frac{3xy}{x+y}=5,\quad \frac{2xz}{x+z}=3,\quad \frac{yz}{y+z}=4.$$

Решение. Данная система равносильна системе

$$\frac{x+y}{xy}=\frac{3}{5},\quad \frac{x+z}{xz}=\frac{2}{3},\quad \frac{y+z}{yz}=\frac{1}{4}.$$

Произведя почленное деление в левых частях уравнений, приведем ее к виду

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{3}{5},\quad \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4}.$$

Обозначая $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$, $\frac{1}{z}=w$, получаем линейную систему относительно введенных неизвестных:

$$u+v=\frac{3}{5},\quad u+w=\frac{2}{3},\quad w+v=\frac{1}{4}.$$

Ее решением будет тройка чисел $\left(\frac{61}{120},\ \frac{11}{120},\ \frac{19}{120}\right)$. Следовательно, решением исходной системы будет тройка чисел $\left(\frac{120}{61},\ \frac{120}{11},\ \frac{120}{19}\right)$.

В отличие от систем линейных уравнений системы нелинейных уравнений могут быть определенными даже в тех случаях, когда число уравнений меньше чисел неизвестных. Простейшим примером такой системы является система, состоящая из одного уравнения

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=0,$$

единственным решением которого является $x=1$, $y=2$, $z=3$.

Пример 2.6. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x+y+z&=4,\\ 2xy-z^2&=16. \end{aligned}$$

Решение. Возводя обе части первого уравнения в квадрат, имеем

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz=16. \qquad (*)$$

Вычитая из уравнения (*) второе уравнение системы, получаем уравнение

$$x^2+y^2+2z^2+2yz+2zx=0,$$

которое можно записать в виде

$$(x+z)^2+(y+z)^2=0.$$

Последнее уравнение выполняется только при $x=-z$, $y=-z$.

Возвращаясь к исходной системе, получаем из первого уравнения $z=-4$ и, следовательно, $x=4$, $y=4$.

Полученное решение $(4,\ 4,\ -4)$ и будет решением исходной системы.

Ответ. $(4,\ 4,\ -4)$.

Решить системы уравнений:

2.31. $y^2+xy-z^2=4,\quad x+5y=8.$

2.32. $x^2-2yz=-1,\quad y+z-x=1.$

2.33*. $3xy-\dfrac{16}{xz}=-5,\quad xy+\dfrac{8}{yz}=5,\quad yz-\dfrac{3}{yx}=1.$

2.34. $x+y=\dfrac{xy}{1+xy},\quad x+z=\dfrac{xz}{1+xz},\quad y+z=\dfrac{yz}{1+yz}.$

2.35. $x^2-(y-z)^2=a,\quad y^2-(z-x)^2=b,\quad z^2-(x-y)^2=c.$

2.36. $\dfrac{xyz}{y+z}=a,\quad \dfrac{xyz}{z+x}=b,\quad \dfrac{xyz}{x+y}=c.$

2.37. $x+y+z=13,\quad x^2+y^2+z^2=91,\quad y^2=xz.$

2.38. $x+y+z=0,\quad x^2+y^2+z^2=2(y-x-z)-2,\quad x^3+y^3+z^3=3(x^2-y^2+z^2).$

2.39. $x+y+z=1,\quad 4x^2+y^2+z^2-5x=x^3+y^3+z^3-2,\quad xyz=2+yz.$

2.40. $xy+yz+zx=11,\quad x^2+y^2+z^2=14,\quad xyz=6.$

2.41. $2(x+y)=xy,\quad xy+yz+zx=108,\quad xyz=180.$

2.42. $x(x+y+z)=a,\quad y(x+y+z)=b,\quad z(x+y+z)=c.$

2.43. $x^2+y^2=axyz,\quad y^2+z^2=bxyz,\quad z^2+x^2=cxyz.$

2.44. $x^2y=x+y-z,\quad z^2x=x-y+z,\quad y^2x=y-x+z.$

2.45. $4xy+x^2+y^2=1,\quad 8xz+x^2+4z^2=-2,\quad 8yz+y^2+4z^2=1.$

2.46. $2(x^2+y^2)=xyz,\quad 10(y^2+z^2)=29xyz,\quad 5(z^2+x^2)=13xyz.$

2.47. $xyz^2=-y-2x,\quad 2x^2yz=-y-z,\quad 3xy^2z=2x-z.$

2.48. $xy+x+y=7,\quad yz+y+z=-3,\quad xz+x+z=-5.$

Если среди уравнений системы есть иррациональные, то при ее решении обычно освобождаются от иррациональности. При

этом применяются методы, используемые при решении иррациональных уравнений.

Пример 2.7. Решить систему уравнений

$$\sqrt[4]{1+5x}+\sqrt[4]{5-y}=3,\quad 5x-y=11.$$

Решение. Обозначая $\sqrt[4]{1+5x}=u$ и $\sqrt[4]{5-y}=v$, получаем симметрическую систему нелинейных уравнений

$$u+v=3,\quad u^4+v^4=17, \qquad (*)$$

решения которой $u=1$, $v=2$ и $u=2$, $v=1$. Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем следующие системы линейных уравнений:

$$1+5x=16,\quad 5-y=1;\qquad 1+5x=1,\quad 5-y=16.$$

Решение первой системы $x=3$, $y=4$. Решение второй системы $x=0$, $y=-11$.

Ответ. (3, 4); (0, —11).

Решить системы уравнений:

2.49. $\sqrt{2x+y+1}-\sqrt{x+y}=1,\quad 3x+2y=4.$

2.50. $\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\quad 2x+y=7.$

2.51. $\sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y),\quad x^2-y^2=41.$

2.52. $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2},\quad \sqrt{x}+\sqrt{y}=4.$

2.53. $\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5,\quad x^2+y^2=13.$

2.54. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2,\quad x-2y+1=0.$

2.55. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=8,\quad x+y-\sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{xy}=2.$

2.56. $xy+\sqrt{x^2y^2-y^4}=8(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}),\quad (x+y)^{3/2}-(x-y)^{3/2}=26.$

Используя изложенные выше методы, решить системы:

2.57. $3x^2+2xy+y^2=11,\quad x^2+2xy+3y^2=17.$

2.58*. $x^2+xy+y^2=19(x-y)^2,\quad x^2-xy+y^2=7(x-y).$

2.59. $(x-1)^2+(y+1)^2-z^2=0,$
$$x-z-1=0.$$

2.60. $$\frac{\sqrt[3]{2x+y}}{y}+\frac{\sqrt[3]{2x+y}}{2x}=\frac{81}{182},$$
$$\frac{\sqrt[3]{2x-y}}{y}-\frac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x}=\frac{1}{182}.$$

2.61. $x+y-z=2,$ $x^2+y^2+z^2=6,$ $x^3+y^3-z^3=8.$

2.62. $x^2+xy+y^2=1,$ $y^2+yz+z^2=3,$ $x^2+xz+z^2=7.$

§ 3. Системы показательных и логарифмических уравнений

Системы, содержащие показательные или логарифмические уравнения, обычно решаются сведением показательного (или логарифмического) уравнения к алгебраическому уравнению с последующим решением полученной алгебраической системы.

Пример 3.1. Решить систему уравнений
$$8\left(\sqrt{2}\right)^{x-y}=0{,}5^{y-3},$$
$$\log_3(x-2y)+\log_3(3x+2y)=3.$$

Решение. Множество допустимых значений неизвестных x и y определяется системой неравенств
$$x-2y>0,\quad 3x+2y>0. \qquad (*)$$
Из показательного уравнения исходной системы, записанного в виде
$$\left(\sqrt{2}\right)^{x-y+6}=\left(\sqrt{2}\right)^{6-2y},$$
получаем уравнение
$$x-y+6=6-2y;$$
из логарифмического уравнения, записанного в виде
$$\log_3[(x-2y)(3x+2y)]=3,$$
получаем уравнение
$$(x-2y)(3x+2y)=27.$$

Таким образом, решение исходной системы свелось к решению системы уравнений
$$x-y+6=6-2y,$$
$$(x-2y)(3x+2y)=27, \qquad (**)$$
рассматриваемой на множестве допустимых значений неизвестных, задаваемом системой (*). Выражая y из первого уравнения

системы (**) и подставляя $y=-x$ во второе уравнение, получаем уравнение
$$3x^2=27,$$
решения которого $x_1=3$, $x_2=-3$. Из первого уравнения системы находим $y_1=-3$, $y_2=3$. Из двух найденных пар чисел (3, −3), (−3, 3) решений системы (**) лишь пара (3, −3) удовлетворяет системе неравенств (*).

Ответ. (3, −3).

Решить системы уравнений:

3.1. $\log_y x+\log_x y=2,$ $x^2-y=20.$

3.2. $\log_4 x-\log_2 y=0,$ $x^2-2y^2-8=0.$

3.3. $4^{x+y}=2^{y-x},$ $4^{\log_{\sqrt{2}} x}=y^4-5.$

3.4. $\dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12,$ $2^{-\log_2 x}+5^{\log_5(1/y)}=\dfrac{1}{3}.$

3.5. $x+y=12,$ $2\left(2\log_{y^2} x-\log_{1/x} y\right)=5.$

3.6*. $4^x-7\cdot 2^{x-y/2}=2^{3-y},$ $y-x=3.$

3.7. $3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x-y}+7\left(\dfrac{2}{3}\right)^{(2x-y)/2}-6=0.$ $\lg(3x-y)+\lg(x+y)-4\lg 2=0.$

3.8. $4^{x/y+y/x}=32,$ $\log_3(x-y)=1-\log_3(x+y).$

3.9. $9^{\sqrt[4]{xy^2}}-27\cdot 3^{\sqrt{y}}=0,$ $\dfrac{1}{4}\lg x+\dfrac{1}{2}\lg y=\lg\left(4-\sqrt[4]{x}\right).$

3.10. $3^{-x}\cdot 2^y=1152,$ $\log_{\sqrt{5}}(x+y)=2.$

3.11. $2^x\cdot 3^y=6,$ $3^x\cdot 4^y=12.$

3.12. $\left(0{,}48^{x^2+2}\right)^{2x-y}=1,$ $\lg(x+y)-1=\lg 6-\lg(x+2y).$

3.13. $x^{x^2-y^2-16}=1,$ $x-y=2.$

Если основание степени в показательном уравнении системы является функцией неизвестных, то систему можно свести к системе рациональных уравнений, принимая в качестве одного из неизвестных логарифм этой функции по некоторому основанию

Пример 3.2. Решить систему уравнений

$$x^{2y^2-1}=5,$$
$$x^{y^2+2}=125.$$

Решение. Логарифмируя оба уравнения системы по основанию 5, получаем систему уравнений, эквивалентную исходной системе

$$(2y^2-1)\log_5 x=1,$$
$$(y^2+2)\log_5 x=3.$$

Обозначая $\log_5 x=z$, получаем систему рациональных уравнений

$$(2y^2-1)\,z=1,$$
$$(y^2+2)\,z=3.$$

Выражая z из первого уравнения системы и подставляя во второе, получаем уравнение

$$\frac{y^2+2}{2y^2-1}=3,$$

решение которого $y_1=1$, $y_2=-1$. Из первого уравнения системы находим (как при $y=1$, так и при $y=-1$), что $z=1$. Из уравнения

$$\log_5 x=1$$

находим $x=5$. Таким образом, решениями исходной системы будут две пары чисел: (5, 1) и (5, −1).

Ответ. (5, 1); (5, −1).

Решить системы уравнений:

3.14. $y=1+\log_4 x,\quad x^y=4^6.$

3.15. $y-\log_3 x=1,\quad x^y=3^{12}.$

3.16. $(x+y)\,3^{y-x}=\dfrac{5}{27},\quad 3\log_5(x+y)=x-y.$

3.17. $x^{x-2y}=36,\quad 4(x-2y)+\log_6 x=9.$

3.18. $(x+y)\cdot 2^{y-2x}=6{,}25,\quad (x+y)^{1/(2x-y)}=5.$

Некоторые системы логарифмических или показательных уравнений сводятся к системам рациональных уравнений непосредственной заменой входящих в них логарифмов (или, соответственно, степеней) новыми неизвестными.

Пример 3.3. Решить систему уравнений

$$5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200,$$
$$5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689.$$

Решение. Обозначая $z=5^{\sqrt[3]{x}}$ и $u=2^{\sqrt{y}}$, получаем систему рациональных уравнений

$$zu=200,\qquad z^2+u^2=689,$$

которая эквивалентна с учетом условий $z>0$ и $u>0$ системе

$$zu=200,$$
$$z+u=33.$$

Решениями этой системы являются следующие пары чисел: (25, 8); (8, 25).

Возвращаясь к исходным неизвестным, получаем следующие системы уравнений:

$$5^{\sqrt[3]{x}}=25,\qquad 5^{\sqrt[3]{x}}=8,$$
$$2^{\sqrt{y}}=8,\qquad 2^{\sqrt{y}}=25,$$

которые имеют решения $x=8$, $y=9$ и $x=(\log_5 8)^3$, $y=(\log_2 25)^2$.

Ответ. (8, 9); $\left(27\log_5^3 2,\ 4\log_2^2 5\right)$.

Решить системы уравнений:

3.19*. $2^{\sqrt{xy}-2}+4^{\sqrt{xy}-1}=5,\quad \dfrac{3(x+y)}{x-y}+\dfrac{5(x-y)}{x+y}=8.$

3.20*. $(x^2+y)\cdot 2^{y-x^2}=1,\quad 9(x^2+y)=6^{x^2-y}.$

3.21. $11^{xz}-2\cdot 5^y=71,\quad 11^z+2\cdot 5^{y/2}=21,\quad 11^{(x-1)z}+5^{y/2}=16.$

§ 4. Разные задачи

Решить системы уравнений:

4.1*. $y x^{\log_y x}=x^{2,5},\quad \log_3 y\log_y(y-2x)=1.$

4.2. $\log_2 x+\log_4 y+\log_4 z=2,\quad \log_3 y+\log_9 z+\log_9 x=2,\quad \log_4 z+\log_{16} x+\log_{16} y=2.$

4.3. $10^{\lg\frac{1}{2}(x^2+y^2)+1,5}=100\sqrt{10},\quad \dfrac{\sqrt{x^2+10y}}{3}=\dfrac{6}{2\sqrt{x^2+10y}-9}.$

4.4*. $x^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = y^2\sqrt[3]{y^2}$,
$y^{\sqrt[4]{x}+\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x^2}$.

4.5*. $\log_y |\log_y x| = \log_x |\log_x y|$,
$\lg^2 x + \lg^2 y = 8$.

4.6. $\log_{12} x \left(\frac{1}{\log_x 2} + \log_2 y\right) = \log_2 x$,
$\log_2 x [\log_3 (x+y)] = 3\log_3 x$.

4.7. $z^x = x, \quad z^y = y, \quad y^y = x$.

4.8. $\log_a x \log_a (xyz) = 48$,
$\log_a y \log_a (xyz) = 12, \quad a > 0, \quad a \neq 1$,
$\log_a z \log_a (xyz) = 84$.

ГЛАВА 4

НЕРАВЕНСТВА. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

Пусть $f(x)$ — числовая функция одного или нескольких переменных (аргументов). *Решить неравенство*

$$f(x) < 0 \qquad (f(x) > 0) \tag{1}$$

— это значит найти все значения аргумента (аргументов) функции f, при которых неравенство (1) справедливо. Множество всех значений аргумента (аргументов) функции f, при которых неравенство (1) справедливо, называется *множеством решений* неравенства или просто решением неравенства.

Множество решений нестрогого неравенства

$$f(x) \leqslant 0 \qquad (f(x) \geqslant 0) \tag{2}$$

представляет собой объединение множества решений неравенства (1) и множества решений уравнения $f(x) = 0$.

Два неравенства считаются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Под *множеством допустимых значений* неизвестных, входящих в неравенство, понимают область определения функции $f(x)$.

Неравенства вида (1) или (2), составленные для различных функций $f_i(x)$, могут быть сведены в систему неравенств. *Решить систему неравенств* — это значит найти множество всех значений аргументов функций $f_i(x)$, при которых справедливы все неравенства системы одновременно.

Говорят, что системы неравенств *эквивалентны*, если множества их решений совпадают.

§ 1. Рациональные и иррациональные неравенства

Алгебраические неравенства. *Линейными* (строгими и нестрогими) называются неравенства вида

$$ax+b > 0, \quad ax+b < 0, \quad ax+b \geqslant 0, \quad ax+b \leqslant 0, \qquad a \neq 0, \tag{1}$$

решениями которых будут:

при $a > 0$

$$x \in \left(-\frac{b}{a};\ \infty\right),\quad x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right),\quad x \in \left[-\frac{b}{a};\ \infty\right),\quad x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right],$$

при $a < 0$

$$x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right),\quad x \in \left(-\frac{b}{a};\ \infty\right),\quad x \in \left(-\infty;\ -\frac{b}{a}\right],\quad x \in \left[-\frac{b}{a};\ \infty\right).$$

Квадратными (строгими и нестрогими) называются неравенства вида

$$\begin{gathered} ax^2+bx+c > 0, \quad ax^2+bx+c < 0, \\ ax^2+bx+c \geqslant 0, \quad ax^2+bx+c \leqslant 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где a, b, c — некоторые действительные числа и $a \neq 0$.

Квадратное неравенство $ax^2+bx+c>0$ в зависимости от значений своих коэффициентов a, b и c имеет решения:

при $a>0$ и $D=b^2-4ac\geqslant 0$

$$x\in\left(-\infty;\ \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right)\cup\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\ \infty\right);$$

при $a>0$ и $D<0$ x — любое действительное число;

при $a<0$ и $D\geqslant 0$

$$x\in\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a};\ \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\right);$$

при $a<0$ и $D<0$

$$x=\varnothing \text{ (т. е. решений нет).}$$

Решение неравенства $ax^2+bx+c<0$ сводится к решению рассмотренного неравенства, если обе части неравенства умножить на (-1).

Метод интервалов. Пусть $P_n(x)$ — многочлен n-й степени с действительными коэффициентами, а $c_1, c_2, \ldots, c_l$ — все действительные корни многочлена с кратностями $k_1, k_2, \ldots, k_l$ соответственно, причем $c_1>c_2>\ldots>c_l$. Многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде

$$P_n(x)=(x-c_1)^{k_1}(x-c_2)^{k_2}\ldots(x-c_l)^{k_l}Q_m(x), \qquad (3)$$

где многочлен $Q_m(x)$ действительных корней не имеет и либо положителен, либо отрицателен при всех $x\in\mathbb{R}$. Положим для определенности, что $Q_m(x)>0$. Тогда при $x>c_1$ все сомножители в разложении (3) положительны и $P_n(x)>0$. Если c_1 — корень нечетной кратности (k_1 — нечетное), то при $x\in(c_2;\ c_1)$ все сомножители в разложении (3), за исключением первого, положительны и $P_n(x)<0$. В этом случае говорят, что многочлен $P_n(x)$ *меняет знак* при переходе через корень c_1. Если же c_1 — корень четной кратности (k_1 — четное), то все сомножители (в том числе и первый) при $x\in(c_2;\ c_1)$ положительны и, следовательно, $P_n(x)>0$ при $x\in(c_2;\ c_1)$. В этом случае говорят, что многочлен $P_n(x)$ *не меняет знака* при переходе через корень c_1.

Аналогичным способом, используя разложение (3), нетрудно убедиться, что при переходе через корень c_2 многочлен $P_n(x)$ меняет знак, если k_2 — нечетное, и не меняет знака, если k_2 — четное. Рассмотренное свойство многочленов используется для решения неравенств методом интервалов. Для того чтобы найти все решения неравенства

$$P_n(x)>0, \qquad (4)$$

достаточно знать все действительные корни многочлена $P_n(x)$ их кратности и знак многочлена $P_n(x)$ в произвольно выбранной точке, не совпадающей с корнем многочлена.

Пример 1.1. Решить неравенство

$$x^4+3x^3-4x>0. \qquad (*)$$

Решение. Разложим на множители многочлен $P_4(x)$, стоящий в левой части неравенства (*). Вынося множитель x за скобку, получаем

$$P_4(x)=x(x^3+3x^2-4).$$

Второй сомножитель, представляющий собой кубический многочлен, имеет корень $x=1$. Следовательно, он может быть представлен в виде

$$x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2.$$

Таким образом, $P_4(x)=x(x-1)(x+2)^2$ и неравенство (*) может быть записано в виде

$$x(x-1)(x+2)^2>0. \qquad (**)$$

Решим неравенство (**) методом интервалов. При $x>1$ все сомножители, стоящие в левой части неравенства, положительны.

Будем двигаться по оси Ox справа налево. При переходе через точку $x=1$ многочлен $P_4(x)$ меняет знак и принимает отрицательные значения, так как $x=1$ — простой корень (корень кратности 1); при переходе через точку $x=0$ многочлен также меняет знак и принимает положительные значения, так как $x=0$ — также простой корень; при переходе через точку $x=-2$ многочлен знака не меняет, так как $x=-2$ — корень кратности 2. Промежутки знакопостоянства многочлена $P_4(x)$ схематически представлены на рис. 4.1. Используя этот рисунок, легко выписать множество решений исходного неравенства.

Рис. 4.1

Ответ. $x\in(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ 0)\cup(1;\ \infty)$.

Рациональные неравенства.

Решение рационального неравенства

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}>0, \qquad (5)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены, сводится к решению эквивалентного неравенства (4) следующим образом: умножив обе части неравенства (5) на многочлен $[Q_m(x)]^2$, который положителен при всех допустимых значениях неизвестного x (т. е. при тех x, при которых $Q_m(x) \neq 0$), получим неравенство

$$P_n(x) \cdot Q_m(x) > 0,$$

эквивалентное неравенству (5).

Дробно-линейными называются неравенства вида

$$\frac{ax+b}{cx+d} > k, \qquad (6)$$

где a, b, c, d, k — некоторые действительные числа и $c \neq 0$, $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ (если $c=0$, то дробно-линейное неравенство превращается в линейное, если $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, то неравенство (6) не содержит аргумента). К дробно-линейным неравенствам относятся и неравенства вида (6), где вместо знака $>$ стоят знаки $<$, $\geqslant$, $\leqslant$. Решение дробно-линейного неравенства сводится к решению квадратного неравенства. Для этого необходимо умножить обе части неравенства (6) на выражение $(cx+d)^2$, положительное при всех $x \in \mathbb{R}$ и $x \neq -d/c$.

Пример 1.2. Решить рациональное неравенство

$$\frac{x+2}{x^2-x-2} < -1.$$

Решение. Прибавляя к обеим частям неравенства 1, получаем неравенство вида (5)

$$\frac{x^2}{x^2-x-2} < 0,$$

которое эквивалентно неравенству

$$x^2(x^2-x-2) < 0.$$

Множество решений последнего неравенства находится методом интервалов: $x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 2)$.

Ответ. $x \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 2)$.

Решить неравенства:

1.1. $\frac{1}{2-x} + \frac{5}{2+x} < 1.$ 1.2. $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}.$

1.3. $(x+1)(3-x)(x-2)^2 \geqslant 0.$ 1.4. $\frac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqslant 1.$

1.5. $\frac{x^3-x^2+x-1}{x+8} \leqslant 0.$ 1.6. $\frac{2x-5}{x^2-6x-7} < \frac{1}{x-3}.$

1.7. $\frac{3}{x^2-x+1} \geqslant 1.$ 1.8. $\frac{x^3-2x^2-5x+6}{x-2} > 0.$

1.9. $\frac{2-x^2}{1-x} \leqslant x.$ 1.10. $\frac{x-4}{4x^2-4x-3} < 0.$

1.11. $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3.$

Иррациональные неравенства. Под иррациональным неравенством понимается неравенство, в котором неизвестные величины (или некоторые функции неизвестных величин) находятся под знаком радикала. Для того чтобы найти множество решений иррационального неравенства, приходится, как правило, возводить обе части неравенства в натуральную степень. При этом (в силу принципиальной невозможности проверки полученных решений подстановкой) необходимо следить за тем, чтобы при преобразовании неравенств каждый раз получалось неравенство, эквивалентное исходному.

При решении иррациональных неравенств следует помнить, что при возведении обеих частей неравенства в нечетную степень всегда получается неравенство, эквивалентное исходному неравенству. Если же обе части неравенства возводить в четную степень, то будет получаться неравенство, эквивалентное исходному и имеющее тот же знак лишь в случае, если обе части исходного неравенства неотрицательны.

Пример 1.3. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}. \qquad (*)$$

Решение. Множество допустимых значений неравенства (*) представляет собой промежуток $[2;\ \infty)$.

Обе части неравенства (*) на промежутке $[2;\ \infty)$ неотрицательны, поэтому, возведя обе части исходного неравенства в квадрат и приведя подобные члены, получим эквивалентное неравенство

$$6 - x < 2\sqrt{x^2-3x+2}. \qquad (**)$$

Рассмотрим теперь два возможных случая:

1) если $6-x<0$ (т. е. $x>6$), то левая часть (**) отрицательна, а правая — неотрицательна и, следовательно, неравенство (**) справедливо при всех $x \in (6;\ \infty)$.

2) если $6-x \geqslant 0$, то для всех $x \in [2;\ 6]$ обе части неравенства (**) неотрицательны. Возведя обе части неравенства (**) в квадрат, получаем неравенство

$$3x^2 - 28 > 0, \qquad (***)$$

решениями которого с учетом сделанного предположения будут значения из промежутка $\left(\sqrt{\frac{28}{3}};\ 6\right]$.

Объединяя множества решений, соответствующие двум рассмотренным случаям, окончательно получаем решение исходного неравенства — промежуток $\left(\sqrt{\frac{28}{3}};\ \infty\right)$.

Ответ. $\left(\sqrt{\frac{28}{3}};\ \infty\right)$.

Решить неравенства:

1.12. $\sqrt{1-3x}-\sqrt{5+x}>1$.

1.13. $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x}>0$.

1.14. $\sqrt{x^2+4x-5}-2x+3>0$.

1.15. $x+4<\sqrt{x+46}$. **1.16.** $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}<\sqrt{x+4}$.

1.17. $\dfrac{\sqrt{24-2x-x^2}}{x}<1$. **1.18.** $\dfrac{\sqrt{x+5}}{1-x}<1$.

1.19. $\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+3}}\leqslant 3$. **1.20.** $\sqrt{8-x^2}-\sqrt{25-x^2}>x$.

1.21. $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}>\dfrac{1}{2-x}$. **1.22.** $\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 2x+3$.

1.23. $\sqrt{x^2+3x+4}>-2$.

1.24. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

1.25. $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$.

Неравенства, содержащие неизвестное под знаком абсолютной величины. При решении неравенств, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, используется тот же прием, что и при решении уравнений, содержащих неизвестное под знаком абсолютной величины, а именно: решение исходного неравенства сводится к решению нескольких неравенств, рассматриваемых на промежутках знакопостоянства выражений, стоящих под знаком абсолютной величины.

Пример 1.4. Решить неравенство

$$|x^2-2|+x<0. \qquad (*)$$

Решение. Рассмотрим промежутки знакопостоянства выражения x^2-2, стоящего под знаком абсолютной величины.

1) Предположим, что

$$x^2-2\geqslant 0,$$

тогда неравенство (*) принимает вид

$$x^2+x-2<0.$$

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства $x^2-2\geqslant 0$ представляет собой первое множество решений исходного неравенства (см. рис. 4.2): $x\in(-2;\,-\sqrt{2}]$.

2) Предположим, что $x^2-2<0$, тогда согласно определению абсолютной величины имеем $|x^2-2|=2-x^2$, и неравенство (*) приобретает вид

$$2-x^2+x<0.$$

Пересечение множества решений этого неравенства и неравенства $x^2-2<0$ дает второе множество решений исходного неравенства (см. рис. 4.3): $x\in(-\sqrt{2};\,-1)$.

Объединяя найденные множества решений, окончательно получаем $x\in(-2;\,-1)$.

Ответ. $x\in(-2;\,-1)$.

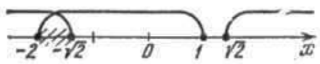


Рис. 4.2

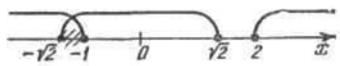


Рис. 4.3

В отличие от уравнений неравенства не допускают непосредственной проверки. Однако в большинстве случаев можно убедиться в правильности полученных результатов графическим способом. Действительно, запишем неравенство примера 1.4 в виде

$$|x^2-2|<-x.$$

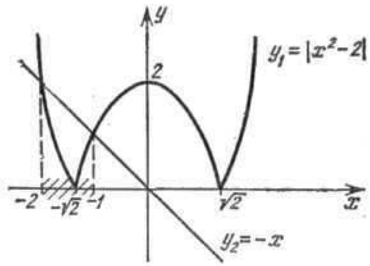


Рис. 4.4

Построим функции $y_1=|x^2-2|$ и $y_2=-x$, входящие в левую и правую часть рассматриваемого неравенства, и найдем те значения аргумента, при которых $y_1<y_2$.

На рис. 4.4 заштрихованная область оси абсцисс содержит искомые значения x.

Решение неравенств, содержащих знак абсолютной величины, иногда можно значительно сократить, используя равенство $|x|^2=x^2$.

Пример 1.5. Решить неравенство

$$\left|\frac{x-1}{x+2}\right|>1. \qquad (*)$$

Решение. Исходное неравенство при всех $x\neq-2$ эквивалентно неравенству

$$|x-1|>|x+2|. \qquad (**)$$

Возведя обе части неравенства (**) в квадрат, после приведения подобных членов получаем неравенство

$$6x < -3,$$

т. е. $x < -1/2$.

Учитывая множество допустимых значений исходного неравенства, определяемое условием $x \neq -2$, окончательно получаем, что неравенство (*) выполняется при всех $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1/2)$.

Ответ. $(-\infty; -2) \cup (-2; -1/2)$.

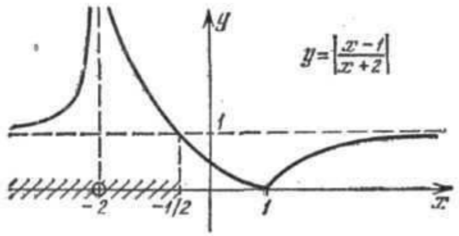


Рис. 4.5

На рис. 4.5 представлена графическая иллюстрация решения приведенного неравенства.

Решить неравенства:

1.26. $|x-3| > -1$. **1.27.** $|4-3x| \leqslant 1/2$.

1.28. $x^2 + 2|x+3| - 10 \leqslant 0$. **1.29.** $|x^2-1| - 2x < 0$.

1.30. $x^2 + x - 10 < 2|x-2|$.

1.31. $x^2 - |3x+2| + x \geqslant 0$.

1.32. $|x^2-3| + 2x + 1 \geqslant 0$.

1.33. $\dfrac{9}{|x-5|-3} \geqslant |x-2|$. **1.34.** $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right| > 2$.

1.35. $|x-2| \leqslant |x+4|$.

1.36. $|x^2+x+1| < 2x^2 - 4x + 7$.

§ 2. Показательные неравенства

Простейшими *показательными неравенствами* являются неравенства вида

$$a^x > b, \quad a^x < b, \tag{1}$$

где a и b — некоторые действительные числа ($a > 0$, $a \neq 1$).

В зависимости от значений параметров a и b множество решений неравенства $a^x > b$ представляется в виде:

при $a > 1$, $b > 0$ $x \in (\log_a b; \infty)$;
при $a < 1$, $b > 0$ $x \in (-\infty; \log_a b)$;
при $b < 0$ $x \in \mathbf{R}$.

Множество решений неравенства $a^x < b$ в зависимости от значений a и b представляется в виде:

при $a > 1$, $b > 0$ $x \in (-\infty; \log_a b)$;
при $a < 1$, $b > 0$ $x \in (\log_a b; \infty)$;
при $b < 0$ $x = \varnothing$.

Множество решений нестрогих неравенств $a^x \geqslant b$ и $a^x \leqslant b$ находится как объединение множеств решений соответствующих строгих неравенств и уравнения $a^x = b$.

Неравенства вида (1) могут быть обобщены на случай, когда в показателе степени стоит некоторая функция от x. Так, множество решений неравенства

$$2^{f(x)} > 3 \tag{2}$$

находится как множество решений неравенства

$$f(x) > \log_2 3,$$

эквивалентного неравенству (2).

Методы сведения более сложных показательных неравенств к неравенствам вида (1), (2) аналогичны методам, используемым при решении показательных уравнений. Так, например, решение показательного неравенства вида

$$P(a^x) > 0,$$

где $P(a^x)$ — многочлен указанного аргумента, заменой $a^x = y$ сводится к последовательному решению неравенства $P(y) > 0$ и решению простейших показательных неравенств вида (1) или систем простейших показательных неравенств.

Пример 2.1. Решить неравенство

$$4^x - 2\cdot 5^{2x} - 10^x > 0. \tag{*}$$

Решение. Так как числа 4, 10, 25 являются последовательными членами геометрической прогрессии, то неравенство (*) можно свести к квадратному относительно неизвестной $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. Для этого разделим обе части исходного неравенства на $25^x = 5^{2x}$:

$$\left(\frac{4}{25}\right)^x - 2 - \left(\frac{2\cdot 5}{25}\right)^x > 0.$$

Обозначая $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y$, получим

$$y^2 - y - 2 > 0. \tag{**}$$

Множество решений неравенства (**) представляет собой объединение промежутков $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$. Исходное неравенство, таким образом, эквивалентно двум простейшим показательным неравенствам

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x < -1, \quad \left(\frac{2}{5}\right)^x > 2.$$

Решением первого неравенства является пустое множесто, а второго — промежуток $(-\infty; \log_{2/5}2)$.

Ответ. $(-\infty; \log_{2/5}2)$.

Решить неравенства:

2.1. $4^x + 2^{x+1} - [illegible] \leqslant 0$. **2.2.** $4^{-x+1/2} - 7\cdot 2^{-x} - 4 < 0$.

2.3. $25^{-x} + 5^{-x+1} \geqslant 50$. **2.4.** $4^{x^2} - 3\cdot 2^{x^2} + 1 \geqslant 0$.

2.5. $2\cdot 3^{2x^4} + 4 \leqslant 3^{x^2+2}$.

2.6. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+4}} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+3x+4}}$.

2.7. $98 - 7^{x^2+5x-48} \geqslant 49^{x^2+5x-49}$.

2.8. $5\cdot 4^x + 2\cdot 25^x \leqslant 7\cdot 10^x$.

2.9. $\sqrt{13^x - 5} \leqslant \sqrt{2\cdot(13^x+12)} - \sqrt{13^x+5}$

2.10. $9^{\sqrt{x^2-3}} + 3 < 3^{\sqrt{x^2-3}-1}\cdot 28$.

2.11. $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4\cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$.

2.12. $\left(\frac{1}{4}\right)^x < 2^{3-x} + 25^{1/\log_3 5}$.

2.13. $25^x - 2^{2\log_4 6-1} < 10\cdot 5^{x-1}$.

2.14. $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x\cdot 30^x$.

2.15. $\sqrt{8 + 2^{\sqrt{3-x}+1} - 4^{\sqrt{3-x}}} + 2^{\sqrt{3-x}+1} > 5$.

2.16. $\sqrt{4^{x+1}+17} - 5 > 2^x$. **2.17.** $3^{x+1} < \dfrac{9^{4x^2}}{\sqrt{27}}$.

2.18. $4^x \leqslant 3\cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$.

2.19. $3^{2x+1} - 3^{x+2} + 6 > 0,$
$3^{2x+2} - 2\cdot 3^{x+2} - 27 < 0.$

2.20. $|3^{\operatorname{tg}\pi x} - 3^{1-\operatorname{tg}\pi x}| \geqslant 2$.

§ 3. Логарифмические неравенства

Простейшими *логарифмическими неравенствами* являются неравенства вида

$$\log_a x > b, \tag{1}$$

$$\log_a x < b, \tag{2}$$

где a и b — некоторые действительные числа $(a > 0,\ a \neq 1)$.

В зависимости от значений a множества решений неравенства (1) будут следующими:

при $a > 1$ $x \in (a^b; \infty)$;
при $a < 1$ $x \in (0; a^b)$.

В зависимости от значений a множества решений неравенства (2) будут следующими:

при $a > 1$ $x \in (0; a^b)$;
при $a < 1$ $x \in (a^b; \infty)$.

Множества решений нестрогих неравенств $\log_a x \geqslant b$ и $\log_a x \leqslant b$ находятся как объединение множества решений соответствующего строгого неравенства и уравнения

$$\log_a x = b.$$

Неравенство вида

$$\log_a f(x) > b \tag{3}$$

эквивалентно следующим системам неравенств *):

при $a > 1$ $f(x) > 0,\ f(x) > a^b$;
при $a < 1$ $f(x) > 0,\ f(x) < a^b$;

а неравенство вида

$$\log_a f(x) < b \tag{4}$$

эквивалентно следующим системам неравенств:

при $a > 1$ $f(x) > 0,$ $f(x) < a^b$;
при $a < 1$ $f(x) > 0,$ $f(x) > a^b$.

Более сложные логарифмические неравенства сводятся к неравенствам вида (1)—(4) методами, аналогичными используемым при решении логарифмических уравнений. Так, например, множество решений неравенства вида

$$P(\log_a x) > 0, \tag{5}$$

а также неравенств $P < 0$, $P \geqslant 0$, $P \leqslant 0$, где P — многочлен указанного аргумента, находится следующим образом. Вводится новое неизвестное $y = \log_a x$, и неравенство (5) решается как алгебраическое относительно неизвестного y. После этого решение исходного неравенства сводится к решению соответствующих простейших неравенств (1), (2) или систем этих неравенств.

Пример 3.1. Решить неравенство

$$(\log_{1/2} x)^2 - \log_{1/2} x^2 > (\log_{1/2} 3)^2 - 1. \tag{*}$$

*) В случае, если неравенство (3) нестрогое, вторые неравенства этих систем также нестрогие.

Решение. Учитывая, что множеством допустимых значений неравенства (*) является промежуток $(0;\infty)$, преобразуем неравенство (*) к виду

$$(\log_{1/2} x)^2 - 2\log_{1/2} x > (\log_{1/2} 3)^2 - 1.$$

Обозначая $y = \log_{1/2} x$, получаем относительно y неравенство

$$y^2 - 2y - (\log_{1/2} 3)^2 + 1 > 0.$$

Множество решений последнего неравенства представляет собой объединение промежутков $(-\infty; 1+\log_{1/2} 3) \cup (1-\log_{1/2} 3; \infty)$, а, следовательно, решения исходного неравенства определяются условиями

$$\log_{1/2} x < 1 + \log_{1/2} 3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2},$$

$$\log_{1/2} x > 1 - \log_{1/2} 3 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{6}.$$

Ответ. $\left(\frac{3}{2};\ \infty\right) \cup \left(0;\ \frac{1}{6}\right)$.

Решить неравенства:

3.1. $\log_{1/2}(2x+3) > 0$. **3.2.** $\log_2 \frac{x-3}{x+2} < 0$.

3.3. $\log_{5/8}\left(2x^2 - x - \frac{3}{8}\right) \geqslant 1$.

3.4. $\log_{1/4} \frac{2x-1}{x+1} < \cos\frac{2\pi}{3}$.

3.5. $\log_2^2 x + \log_2 x - 2 \leqslant 0$.

3.6. $2\log_4(2x^2+3) < \log_2(x^2+6)$.

3.7. $\log_2\sqrt{x} - 2\log_{1/4}^2 x + 1 > 0$.

3.8. $\log_{1/4}(2x+3) > \log_9 27$.

3.9. $\lg(x-4) + \lg x < \lg 21$.

3.10. $\log_7 x - \log_x\left(\frac{1}{7}\right) \geqslant 2$.

3.11. $\log_2[(x-3)(x+2)] + \log_{1/2}(x-3) < -\log_{1/\sqrt{2}} 3$.

3.12. $\log_{100}(x^2) + \log_{10}^2 x < 2$.

3.13. $\log_3(7-x) \leqslant \frac{9}{16}\log^2_{2\sqrt{2}}\frac{1}{4} + \log_{7-x} 9$.

3.14. $\log_3 x - \log_3^2 x \leqslant \frac{3}{2}\log_{1/(2\sqrt{2})} 4$.

3.15. $\log_{1/2}(4-x) \geqslant \log_{1/2} 2 - \log_{1/2}(x-1)$.

3.16. $\log_2(3-x) - \log_2 \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{5-x} > \frac{1}{2} + \log_2(x+7)$.

3.17. $2\log_{1/4}(x+5) > \frac{9}{4}\log_{1/(3/\sqrt{3})} 9 + \log_{\sqrt{x+5}} 2$.

3.18. $\log_4(3^x - 1)\log_{1/4}\left(\frac{3^x-1}{16}\right) \leqslant \frac{3}{4}$.

3.19. $\log_{1/2} x \leqslant \log_{1/4} x$.

3.20. $\log_3(3^{4x} - 3^{2x+1} + 3) < 2\log_9 7$.

3.21. $\log_{10}|2x+3|^3 + 2\log_{(2x+3)^2} 10 < 3$.

3.22. $\log_{x/2} 8 + \log_{x/4} 8 < \frac{\log_2 x^4}{\log_2 x^2 - 4}$.

3.23. $8^{\log_2 x} - 2x^2 > x - 2$.

3.24. $2\log_4 x - \frac{1}{2}\log_2(x^2 - 3x + 2) \leqslant \cos\frac{4\pi}{3}$.

3.25. $\log_{4/3}\cos x \geqslant \log_{4/9}\frac{3}{2}$ при $x \in (-2;\ 3)$.

3.26. $\log_{1/2}|x-3| > -1$.

3.27. $\log_2(\sqrt{x+3} - x - 1) \leqslant 0$.

3.28. $\frac{\sqrt{\log_{1/2}^2 x - 81} + 2}{\log_{1/2} x - 1} < 1$.

3.29. $\frac{\log_{1/2}\sqrt{x+4}}{\log_{1/2}(x+2)} \leqslant 1$.

3.30. $\log_3\sqrt{5-2x}\cdot\log_x 3 < 1$.

3.31. $\log_2 x\sqrt{\log_x\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)} \leqslant 1$.

3.32. $\sqrt{\log_4\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right)} + 1 > \log_2\left(\frac{2x^2-3x+3}{2}\right)$.

3.33. $\frac{1-\sqrt{1-8\log_2^2 x}}{2\log_2 x} < 1$.

3.34. $\frac{\log_8 x}{\log_2(1+2x)} \leqslant \frac{\log_2\sqrt[3]{1+2x}}{\log_2 x}$.

Логарифмическое неравенство вида

$$\log_{g(x)} f(x) > c \qquad (6)$$

эквивалентно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 1, \\ f(x) > [g(x)]^c; \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) > 0, \\ 0 < g(x) < 1, \\ f(x) < [g(x)]^c. \end{cases} \qquad (7)$$

Пример 3.2. Решить неравенство

$$\log_{2x}(x^2 - 5x + 6) < 1. \qquad (*)$$

Решение. Логарифмическое неравенство эквивалентно двум системам неравенств

$$\begin{cases} 0 < x^2 - 5x + 6 < 2x, \\ 2x > 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 2x, \\ 0 < 2x < 1, \end{cases}$$

и множество решений исходного неравенства получается как объединение множеств решений этих двух систем.

Ответ. $x \in (0;\ 1/2) \cup (1;\ 2) \cup (3;\ 6)$.

Решить неравенства:

3.35. $\log_{x}\left(x^2 - \frac{3}{16}\right) > 4$. **3.36.** $\log_{2x-x^2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^4 > 0$.

3.37. $\log_{x+4}(5x + 20) \leqslant \log_{x+4}[(x + 4)^2]$.

3.38. $\log_{1/x} \frac{2(x-2)}{(x+1)(x-5)} \geqslant 1$.

3.39. $\log_{(x+1/x)}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 4\right) \geqslant 1$.

3.40. $\log_{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}(x^2 - 3x + 1) \geqslant 0$.

3.41. $(\log_{|x+6|} 2) \log_2 (x^2 - x - 2) \geqslant 1$.

3.42. $\log_{(x+6)/3}(\log_2((x-1)/(2+x))) > 0$.

3.43. $\log_{9x^2}(6 + 2x - x^2) \leqslant \frac{1}{2}$.

3.44. $x^{\lg x} < 10 \cdot x^{-\lg x} + 3$.

3.45. $\log_{|x|}(\sqrt{9 - x^2} - x - 1) \geqslant 1$.

3.46. $\log_x \leqslant \sqrt{\log_x(2x^3)}$.

3.47. $\log_{\log_2(0{,}5x)}(x^2 - 10x + 22) > 0$.

Выражения, стоящие в левой и правой частях неравенств 3.48—3.52, положительны, поэтому для решения достаточно прологарифмировать обе части исходного неравенства:

3.48. $x^{\lg^2 x - 3\lg x + 1} > 1000$.

3.49. $x^3 > 2^{15\log_{2\sqrt{2}}\sqrt{3}} \cdot 3^{\log_{\sqrt{x}} 3}$.

3.50. $(x^2 - x - 1)^{x^2-1} < 1$. **3.51.** $|x|^{x^2-x-2} < 1$.

3.52. $x^{1/\lg x} \cdot \lg x < 1$.

Неравенства 3.53—3.58 эквивалентны системам тригонометрических неравенств или системам алгебраических и тригонометрических неравенств:

3.53. $\log_{|\sin x|}(x^2 - 8x + 23) > \frac{3}{\log_2|\sin x|}$.

3.54. $\log_{\cos(x^2)}\left(\frac{3}{2} - 2x\right) < \log_{\cos(x^2)}(2x - 1)$.

3.55. $(\log_{\sin x} 2)^2 < \log_{\sin x}(4 \sin^3 x)$.

3.56. $\sqrt{\operatorname{tg} x - 1}\,[\log_{\operatorname{tg} x}(2 + 4\cos^2 x) - 2] \geqslant 0$.

3.57. $\log_5 \sin x > \log_{125}(3 \sin x - 2)$.

3.58. $\log_{\sin x + \sqrt{3}\cos x}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{5x}{2} + 3\right) \geqslant 0$.

Найти все целые числа, удовлетворяющие неравенствам:

3.59*. $3^{\frac{5}{2}\log_3(12-3x)} - 3^{\log_2 x} > 83$.

3.60. $x - \frac{1}{2} < 2\log_5(x + 2)$.

3.61. $\log_{\left(2\cos\frac{2\pi}{7} - x + 8\right)}\left(\frac{\sqrt{x+5} - 1}{\sqrt{10 - x}}\right) \geqslant 0$.

§ 4. Решение неравенств, содержащих сложные функции

Рассмотрим неравенства, в которых функция, подлежащая сравнению, представляет собой сложную функцию, состоящую из некоторой композиции трансцендентных и алгебраических функций. Решение подобных неравенств сводится к последовательному решению простейших неравенств, возникающих при замене аргументов сложных функций новыми переменными.

Пример 4.1. Решить неравенство

$$(0{,}5)^{\log_3 \log_{1/5}(x^2 - 4/5)} < 1.$$

Решение. Если обозначить $z = \log_3 \log_{1/5}(x^2 - 4/5)$, то исходное неравенство сводится относительно z к простейшему показательному неравенству

$$(0{,}5)^z < (0{,}5)^0 \Leftrightarrow z > 0.$$

Обозначая далее $y = \log_{1/5}(x^2 - 4/5)$, имеем

$$\log_3 y > 0 \Leftrightarrow y > 1.$$

Положив $v = x^2 - \frac{4}{5}$, получаем

$$\log_{1/5} v > 1 \Leftrightarrow 0 < v < \frac{1}{5}.$$

Таким образом, мы получили неравенство, эквивалентное исходному:

$$0 < x^2 - \frac{4}{5} < \frac{1}{5}.$$

Ответ: $\left(-1;\ -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1\right)$.

При решении неравенств, рассмотренных в примере 4.1, полезно проводить графическую иллюстрацию каждого отдельного этапа решения.

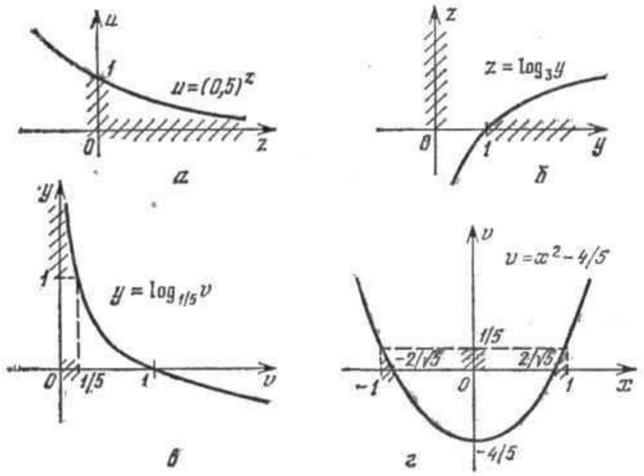


Рис. 4.6

На рис. 4.6 представлена графическая иллюстрация решения примера 4.1.

На каждом рисунке представлены графики функций, поэтапно возникающих в процессе решения. При этом на каждом графике на вертикальной оси откладывается интересующее нас множество значений очередной простейшей функции, а на горизонтальной оси ищется соответствующее ему множество значений аргументов. Найденное множество, обозначенное на рисунках штриховкой на горизонтальной оси, на следующем рисунке откладывается на вертикальной оси.

Решить неравенства:

4.1. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-1)} > 1.$ **4.2.** $5^{\log_5 x^2} < 1.$

4.3. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2+5x+8)} \leqslant 2{,}5.$

4.4. $(0{,}5)^{\log_5 \log_{0,3}(x-0.7)} < 1.$

4.5. $(0{,}5)^{\log_{1/3}\frac{x+5}{x^2+3}} > 1.$

4.6. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{1/9}\left(x^2-\frac{10}{3}x+1\right)} \leqslant 1.$

Найти область определения функций:

4.7. $y = \sqrt{\log_{1/2}\frac{x-1}{3x+5}}.$

4.8. $y = \sqrt{\log_{1/2}\frac{x}{x^2-1}}.$

4.9. $y = \log_2 \frac{\sin x - \cos x + 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}.$

4.10. $y = \sqrt{\log_{1/3}\log_3|x-3|}.$

Решить неравенства, используя комбинацию рассмотренных методов:

4.11. $\log_{1/\sqrt{5}}(6^{x+1} - 36^x) \geqslant -2.$

4.12. $\log_3 \log_{9/16}(x^2 - 4x + 3) \leqslant 0.$

4.13. $\log_x [\log_2(4^x - 6)] \leqslant 1.$

4.14. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3 \log_{1/5}(x^2-4/5)} < 1.$

4.15. $12x + \sqrt{3x^4 + 4x^5 - 4x^6}\cdot\log_2 x^2 >$
$> 3\sqrt{3 + 4x - 4x^2} + 4x^3 \log_4 x^4.$

§ 5. Уравнения и неравенства с параметрами

Уравнения и неравенства с параметрами являются наиболее трудными задачами курса элементарной математики. Это объясняется тем, что их решения следует получать при всех допустимых значениях входящих в них параметров.

Пример 5.1. Для всех значений a решить неравенство

$$ax > 1/x.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

$$\frac{ax^2 - 1}{x} > 0,$$

тогда исходное неравенство эквивалентно двум системам неравенств:

$$\begin{cases} ax^2 - 1 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} ax^2 - 1 < 0, \\ x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим первую систему. Первое неравенство запишем в виде

$$ax^2 > 1.$$

При $a > 0$ оно эквивалентно неравенству $x^2 > 1/a$, множество решений которого $x < -1/\sqrt{a}$ и $x > 1/\sqrt{a}$. В этом случае решения первой системы: $x \in (1/\sqrt{a};\ \infty)$. При $a \leqslant 0$ левая часть неравенства $ax^2 - 1 > 0$ отрицательна при любом x и неравенство решений не имеет, а следовательно, не имеет решений и вся первая система неравенств.

Рассмотрим вторую систему. При $a > 0$ решениями неравенства $ax^2 - 1 < 0$ будут значения $x \in (-1/\sqrt{a};\ 1/\sqrt{a})$, а решениями системы — значения $x \in (-1/\sqrt{a};\ 0)$. При $a \leqslant 0$ левая часть неравенства $ax^2 - 1 < 0$ отрицательна при любых значениях x, т. е. это неравенство выполняется при всех $x \in \mathbb{R}$ и, следовательно, решениями системы будут значения $x \in (-\infty;\ 0)$.

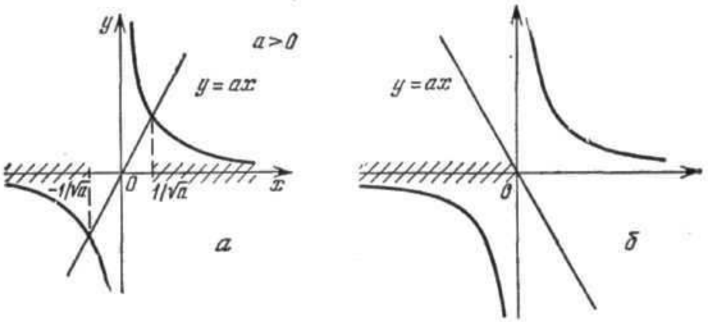


Рис. 4.7

Ответ. Если $a \leqslant 0$, то $x \in (-\infty;\ 0)$; если $a > 0$, то $x \in (-1/\sqrt{a};\ 0) \cup (1/\sqrt{a};\ \infty)$.

Приведем графическую иллюстрацию решения примера 5.1. Для этого рассмотрим отдельно два случая $a > 0$ (см. рис. 4.7, *а*) и $a \leqslant 0$ (см. рис. 4.7, *б*) и для каждого из них построим графики функций, стоящих в левой и правой частях исходного неравенства. Заштрихованные промежутки оси Ox представляют собой решение неравенства в рассматриваемых случаях.

Графическая иллюстрация облегчает решение уравнений и неравенств с параметрами. Приведем пример графического решения уравнения с параметрами.

Пример 5.2. Для каждого значения a решить уравнение

$$2|x| + |a| = x + 1. \qquad (*)$$

Решение. Отложим на оси абсцисс значения x, а на оси ординат — значения a. Тогда в координатной плоскости (x, a) геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению, образуют фигуру, изображенную на рис. 4.8. Из рисунка видно, что при $|a| > 1$ уравнение $(*)$ решений не имеет. При $|a| < 1$ каждому значению a соответствуют два корня уравнения, а при $|a| = 1$ — один корень $x = 0$.

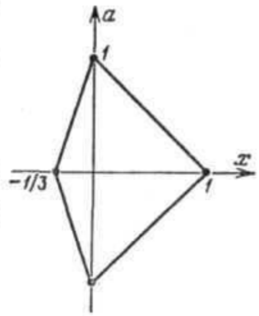


Рис. 4.8

При $0 \leqslant a < 1$ корни находятся из следующих уравнений:

$$x + a = 1 \quad \text{и} \quad -3x + a = 1.$$

Они равны $x = 1 - a$ и $x = \dfrac{a-1}{3}$ соответственно. При $-1 < a < 0$ корни находятся из уравнений

$$x - a = 1 \quad \text{и} \quad -3x - a = 1;$$

они равны $x = 1 + a$ и $x = -\dfrac{a+1}{3}$ соответственно.

Ответ: $|a| > 1 \Rightarrow$ исходное уравнение не имеет решений; $|a| = 1 \Rightarrow x = 0$; $0 \leqslant a < 1 \Rightarrow x = 1 - a$ и $x = \dfrac{a-1}{3}$; $-1 < a < 0 \Rightarrow x = 1 + a$ и $x = -\dfrac{a+1}{3}$.

5.1. Для каждого значения a решить уравнение

$$|x - a + 1| + |x - 2a| = x.$$

5.2. Для каждого значения a решить неравенство

$$|3x - a| + |2x + a| \leqslant 5.$$

5.3. Для каждого действительного значения a решить уравнение

$$x^2 + |x| + a = 0.$$

5.4. Для каждого значения a определить число решений уравнений

а) $\sqrt{2|x| - x^2} = a$; б) $|x^2 - 2x - 3| = a$.

5.5. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$2|x - a| < 2ax - x^2 - 2.$$

5.6. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\sqrt{a + x} + \sqrt{a - x} > a.$$

5.7*. Найти все значения a, при каждом из которых неравенство

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

5.8. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sqrt{a(2^x-2)+1}=1-2^x.$$

5.9. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0.$$

5.10. Найти, при каких значениях a уравнение

$$\log_3(9^x+9a^3)=x$$

имеет два решения.

5.11. Найти все значения параметра c, при которых неравенство

$$1+\log_2\left(2x^2+2x+\frac{7}{2}\right)\geqslant\log_2(cx^2+c)$$

имеет хотя бы одно решение.

5.12. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{a(a+1)}(|x|+4)>1$$

выполняется при любом значении x.

5.13. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\log_{a/(a+1)}(x^2+2)>1$$

выполняется при любом значении x.

5.14. Найти все такие значения x, по абсолютной величине меньшие 3, которые при всех $a\geqslant 5$ удовлетворяют неравенству

$$\log_{2a-x^2}(x-2ax)>1.$$

5.15. Найти все значения $x>1$, которые при всех b, удовлетворяющих условию $0<b\leqslant 2$, являются решениями неравенства

$$\log_{(x^2+x)/b}(x+2b-1)<1.$$

5.16. Найти множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a\cdot e^x+b=e^{ax+b}.$$

Многие задачи на решение уравнений и неравенств с параметрами связаны с определением расположения корней квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ на действительной оси. При решении этих задач следует учитывать, что если квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$ имеет два действительных корня x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$, то при $a>0$ $y(x)$ принимает отрицательные значения на промежутке $(x_1;\ x_2)$ и положительные значения вне промежутка $[x_1;\ x_2]$; при $a<0$ — положительные значения в промежутке $(x_1;\ x_2)$ и отрицательные значения вне промежутка $[x_1;\ x_2]$. Поэтому, для того чтобы выяснить (не находя корней уравнения $ax^2+bx+c=0$), принадлежит ли произвольное число α промежутку $(x_1;\ x_2)$, достаточно знать знак выражения $a\alpha^2+b\alpha+c$ и знак коэффициента a. Так, например, если $a>0$ и $a\alpha^2+b\alpha+c>0$, то α находится вне промежутка $(x_1;\ x_2)$.

Если известно, что число α не находится между корнями x_1, x_2, то для того, чтобы выяснить, по какую сторону от промежутка (справа или слева) лежит число α, достаточно сравнить его с некоторым числом, заведомо принадлежащим промежутку $(x_1;\ x_2)$, например с выражением $-\frac{a}{2b}$, являющимся абсциссой вершины параболы $y=ax^2+bx+c$.

Пример 5.3. При каких значениях параметра a оба корня уравнения $x^2+ax-1=0$ меньше чем 3?

Ответ на вопрос задачи следует дать не проводя вычисления корней уравнения.

Решение. Рассмотрим квадратичную функцию $y=x^2+ax-1$, стоящую в левой части уравнения. Так как коэффициент при x^2 равен 1, то ветви параболы направлены вверх. Для того чтобы корни уравнения x_1 и x_2 $(x_1\leqslant x_2)$ были меньше чем 3, необходимо и достаточно, чтобы число 3 лежало правее промежутка $(x_1;\ x_2)$. Условия, при которых будет выполняться это требование, можно определить следующей системой неравенств:

$$\begin{gathered} a^2+4\geqslant 0,\\ 9+3a-1>0,\\ -\frac{a}{2}<3. \end{gathered}\qquad (*)$$

Первое неравенство (которое выполняется при всех значениях a) гарантирует существование действительных корней, второе и третье обеспечивают расположение точки $x=3$ вне промежутка $(x_1;\ x_2)$ справа от него.

Решая систему неравенств (*), получаем $a\in\left(-\frac{8}{3};\ \infty\right)$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{8}{3};\ \infty\right)$.

5.17. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного трехчлена

$$x^2-6ax+(2-2a+9a^2)$$

действительны и больше чем 3.

5.18. Найти все значения параметра a, при которых оба корня квадратного уравнения

$$x^2 - ax + 2 = 0$$

действительны и принадлежат промежутку $(0; 3)$.

Одно неравенство является следствием другого, если множество решений первого неравенства целиком содержит множество решений второго. Например, если x удовлетворяет неравенству $|x| < 2$, то $x^2 < 5$ (т. е. неравенство $x^2 < 5$ является следствием неравенства $|x| < 2$. Действительно, множество решений второго неравенства $(-\sqrt{5};\ \sqrt{5})$ целиком содержит множество решений $(-2;\ 2)$ первого неравенства.

5.19. При каких действительных значениях m неравенство

$$x^2 + mx + m^2 + 6m < 0$$

выполняется для любых $x \in (1;\ 2)$?

5.20. Найти все значения m, для которых неравенство

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 > 0$$

выполнено при всех $x > 0$.

5.21. При каких действительных m из неравенства

$$x^2 - (3m + 1)\,x + m > 0$$

следует неравенство $x > 1$?

5.22. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$.

5.23. Найти все значения параметра a, при которых из неравенства $0 \leqslant x \leqslant 1$ следует неравенство

$$(a^2 + a - 2)\,x^2 - (a + 5)\,x - 2 \leqslant 0.$$

5.24. Найти все значения a, для которых справедливо неравенство

$$2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$$

при любых $|x| < 1$.

5.25. Найти все значения параметра a, при которых корни уравнения

$$x^2 + x + a = 0$$

действительны и больше a.

5.26. Найти все значения a, при которых неравенство

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$

выполняется для таких x, что $1 \leqslant x \leqslant 2$.

Следующие логарифмические и показательные неравенства с параметром сводятся к квадратным с помощью замены переменной.

5.27. Найти все решения неравенства

$$a^2 - 9^{x+1} - 8 \cdot 3^x \cdot a > 0.$$

5.28. Найти все значения параметра α, при которых неравенство

$$4^x - \alpha \cdot 2^x - \alpha + 3 \leqslant 0$$

имеет хотя бы одно решение.

5.29. Найти все значения параметра α, при которых неравенство

$$\alpha \cdot 9^x + 4\,(\alpha - 1) \cdot 3^x + \alpha > 1$$

справедливо при всех x.

При сведении тригонометрических уравнений и неравенств к рациональным следует учесть, что замена $y = \sin x$ или $y = \cos x$ предполагает $|y| \leqslant 1$.

Решить следующие задачи.

5.30. Для каждого действительного числа a решить уравнение

$$\sin x + \cos (a + x) + \cos (a - x) = 2.$$

5.31. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$(\lg \sin x)^2 - 2a \lg \sin x - a^2 + 2 = 0.$$

5.32. Найти все значения b, при каждом из которых неравенство

$$\cos^2 x + 2b \sin x - 2b < b^2 - 4$$

выполняется для любого числа x.

5.33. Определить все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\cos^4 x - (a + 2) \cos^2 x - (a + 3) = 0$$

имеет решения, и найти эти решения.

5.34. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sin^2 4x + (a^2 - 3) \sin 4x + a^2 - 4 = 0$$

имеет четыре корня, расположенных на отрезке $[3\pi/2;\ 2\pi]$?

5.35. При каких значениях b уравнение

$$\frac{b \cos x}{2 \cos 2x - 1} = \frac{b + \sin x}{(\cos^2 x - 3 \sin^2 x) \operatorname{tg} x}$$

имеет решения? Найти эти решения.

5.36. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\log_{|\sin x|} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = a.$$

5.37. Для каждого значения параметра $a > 0$ решить неравенство

$$x^{\sin x - a} > 1$$

при условии, что $x \in (0;\ \pi/2)$.

5.38. Найти множество всех пар чисел (a, b), для каждой из которых при всех x справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

5.39. Определить, при каких целых значениях k система

$$(\operatorname{arctg} x)^2 + (\arccos y)^2 = \pi^2/k,$$
$$\operatorname{arctg} x + \arccos y = \pi/2$$

имеет решения, и найти все эти решения.

5.40. Найти все значения a, при которых уравнения

$$a \cos 2x + |a| \cos 4x + \cos 6x = 1$$

и

$$\sin x \cos 2x = \sin 2x \cos 3x - \frac{1}{2} \sin 5x$$

эквивалентны.

5.41. Определить, при каких значениях a уравнение

$$x - \frac{a}{2} = 4\,|\,4\,|x| - a^2\,|$$

имеет три корня. Найти эти корни.

5.42. Найти все значения a, при которых уравнение

$$|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$$

имеет одно решение.

5.43. Решить уравнение

$$|x + 3| - a\,|x - 1| = 4$$

и найти, при каких значениях a оно имеет два решения.

§ 6. Доказательство неравенств

Сведение к очевидному неравенству.

Пример 6.1. Доказать, что при $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ справедливо неравенство

$$ab + ac + bc \leqslant a^2 + b^2 + c^2.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на 2. Получим

$$2ab + 2ac + 2bc \leqslant 2a^2 + 2b^2 + 2c^2.$$

Сгруппируем теперь члены неравенства следующим образом:

$$a^2 - 2ab + b^2 + b^2 - 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 \geqslant 0,$$

или

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geqslant 0.$$

Мы пришли к очевидному неравенству.

Доказать, что если a, b, c — положительные числа, то:

6.1. $a^3 + b^3 + c^3 \geqslant 3abc$. **6.2.** $\dfrac{a^3 + b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a + b}{2}\right)^3$.

6.3. $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geqslant 2(a + b + c)$.

6.4. Доказать, что

$$x^2 + 4y^2 + 3z^2 + 14 - 2x - 12y - 6z > 0.$$

6.5. Доказать, что

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + a^2 + a(x + y + z + u) \geqslant 0.$$

6.6. Доказать, что

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 3 \geqslant 0.$$

Средним арифметическим чисел $a_1, \ldots, a_n$ называется число $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, *средним геометрическим* неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Решение ниже приведенных задач опирается на следующее *неравенство Коши*, справедливое для любого набора неотрицательных чисел $a_1, \ldots, a_n$:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n}. \tag{1}$$

Пример 6.2. Доказать, что если $a + b + c = 1$ и a, b, c — положительные числа, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9.$$

Решение. Так как $a + b + c = 1$, то, используя (1), можно утверждать, что

$$\frac{a + b + c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} \quad \text{или} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{abc}} \geqslant 3. \tag{*}$$

Воспользовавшись неравенством Коши для чисел $\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{1}{c}$, получаем

$$\frac{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}}{3} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{abc}}. \tag{**}$$

Учитывая неравенство (*), окончательно убеждаемся в справедливости исходного неравенства.

6.7. Доказать, что

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc,$$

где a, b, c — неотрицательные числа.

6.8. Доказать, что при $p>0$ и $q>0$

$$(p+q)(p+2)(q+2) \geqslant 16pq.$$

6.9. Доказать, что при $x>0$

$$x+\frac{1}{x}>2.$$

6.10. Доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geqslant 64,$$

где a, b, c — положительные числа и $a+b+c=1$.

6.11. Доказать, что

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ \ldots\ \cdot(1+a_n) \geqslant 2^n,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа, произведение которых равно 1.

6.12. Доказать, что

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geqslant n,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа, произведение которых равно 1.

6.13. Доказать, что если a, b, c — положительные числа, то

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>9.$$

6.14. Доказать, что если a, b, c — положительные числа, то

$$(bc+ca+ab)^2>3ab(a+b+c).$$

6.15. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant a^2.$$

6.16. Доказать, что если $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа, то

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_n}{a_1} \geqslant n.$$

6.17. Доказать, что

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n,$$

где n — натуральное число, $n \geqslant 2$.

6.18. Доказать, что

$$\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}, \qquad n \in \mathrm{N},$$

где a, b — положительные числа, $a \neq b$.

Если требуется установить справедливость некоторого неравенства сразу для всех членов двух последовательностей a_n и b_n, то удобно использовать метод математической индукции.

Пример 6.3. Доказать, что

$$n! > 2^{n-1}, \quad \text{если} \quad n>2.$$

Решение. Используя метод математической индукции, убедимся в том, что для $n=3$ утверждение справедливо. Действительно, $3! > 2^2$, так как

$$3! = 6, \quad 2^2 = 4.$$

Далее удобно воспользоваться следующим утверждением: *если для всех k, больших некоторого N, выполняется неравенство*

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{b_{k+1}}{b_k},$$

где a_k и b_k — k-е члены сравниваемых последовательностей, то

$$\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} > \frac{a_k}{b_k}.$$

По индуктивному предположению $\frac{a_k}{b_k}>1$. Следовательно, можно утверждать, что $a_k > b_k$ для всех $k>N$. Используем этот подход в рассматриваемом случае. Имеем

$$a_k = k!, \qquad a_{k+1} = (k+1)! \Rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} = k+1,$$

$$b_k = 2^{k-1}, \qquad b_{k+1} = 2^k \Rightarrow \frac{b_{k+1}}{b_k} = 2,$$

$$k+1>2, \quad \text{если} \quad k>2.$$

Таким образом, доказано, что $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}>1$ для всех $k \geqslant 2$, т. е. требуемое неравенство установлено.

В некоторых случаях метод математической индукции удобнее применять в следующем виде: если для некоторого N $a_N > b_N$ и для всех $k \geqslant N$ $a_{k+1} - a_k > b_{k+1} - b_k$, то для всех $k > N$ $a_k > b_k$.

Доказать следующие неравенства:

6.19. $2^n > n^2 + 2 \quad (n \geqslant 5)$.

6.20. $n^n > (n+1)^{n-1} \quad (n \geqslant 2)$.

6.21. $3^n > n^3 \quad (n \neq 3)$.

6.22. $\left(\frac{n}{2}\right)^n > n! \quad (n \geqslant 6)$.

6.23. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$.

6.24. $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n} \quad (n \geqslant 2)$.

6.25. $$2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}.$$

6.26. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$. **6.27.** $\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

6.28. $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

6.29. $(n!)^2 < \left[\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right]^n$.

6.30. $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$. **6.31.** $\sqrt[n+1]{ab^n} < \frac{a+nb}{n+1}$.

6.32. Доказать, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ монотонно возрастает.

ГЛАВА 5
ТРИГОНОМЕТРИЯ

Основные формулы тригонометрии:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha, \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \qquad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha},$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \qquad \cos\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \qquad 1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha},$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)].$$

Формулы приведения

Наименование функции	Значение аргумента						
	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$

§ 1. Тождественные преобразования тригонометрических выражений

При доказательстве тригонометрических тождеств используются формулы сокращенного умножения и формулы, связывающие между собой основные тригонометрические функции.

Пример 1.1. Доказать тождество

$$2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0. \qquad (*)$$

Решение. Воспользуемся формулой сокращенного умножения

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2),$$

полагая в ней $x = \sin^2\alpha$, $y = \cos^2\alpha$. Тогда получим

$$\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha).$$

С помощью тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (**)$$

левая часть равенства (*) преобразуется к виду

$$2\sin^4\alpha - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\cos^4\alpha - 3\sin^4\alpha - 3\cos^4\alpha + 1 = 0.$$

После приведения подобных членов получаем равенство

$$1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \sin^4\alpha - \cos^4\alpha = 0,$$

которое можно записать в виде

$$1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2.$$

С учетом тождества (**) получаем

$$1 = 1,$$

т. е. исходное тождество доказано.

Доказать тождества:

1.1. $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2\alpha.$

1.2. $\dfrac{1+\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$

1.3. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

1.4. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}3\alpha = -\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha.$

1.5. $\dfrac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}.$

1.6. $\dfrac{\sin\alpha + 2\sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\sin 3\alpha + 2\sin 5\alpha + \sin 7\alpha} = \dfrac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}.$

1.7. $\sin^2 3\alpha - \sin^2 2\alpha = \sin 5\alpha\sin\alpha.$

1.8. $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha - \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha} = -\operatorname{tg}2\alpha.$

1.9. $\dfrac{1}{\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}\alpha} - \dfrac{1}{\operatorname{ctg}3\alpha - \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg}2\alpha.$

1.10. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}.$

1.11. $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 4\alpha.$

1.12. $\dfrac{\sin 3\alpha\cos^3\alpha + \cos 3\alpha\sin^3\alpha}{3} = \dfrac{\sin 4\alpha}{4}.$

1.13. $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin 3\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 3\alpha + \cos 4\alpha} = \operatorname{tg}3\alpha.$

1.14. $\sin 2\alpha(1 + \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha) + \dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right).$

1.15. $\sin^6\dfrac{\alpha}{2} - \cos^6\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin^2\alpha - 4}{4}\cos\alpha.$

1.16. $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + 4\alpha\right) + \sin(3\pi - 8\alpha) - \sin(4\pi - 12\alpha) = 4\cos 2\alpha\cos 4\alpha\sin 6\alpha.$

1.17. $\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\beta = \dfrac{\cos^2\alpha - \cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta}.$

1.18. $\dfrac{\sin^2 x}{\sin x - \cos x} - \dfrac{\sin x + \cos x}{\operatorname{tg}^2 x - 1} = \sin x + \cos x.$

1.19. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

1.20. Доказать, что если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=1.$$

1.21. Доказать, что если $\cos(\alpha+\beta)=0$, то

$$\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha.$$

1.22. Доказать, что если $\sin^2\beta=\sin\alpha\cos\alpha$, то

$$\cos 2\beta=2\cos^2(\pi/4+\alpha).$$

1.23. Доказать, что если $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ — корни уравнения $x^2+px+q=0$, то справедливо равенство

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\sigma+\beta)=q.$$

1.24. Показать, что если углы α и β связаны соотношением

$$\frac{\sin\beta}{\sin(2\alpha+\beta)}=\frac{n}{m},\qquad |n|<|m|,$$

то справедливо равенство

$$\frac{1+\operatorname{tg}\beta/\operatorname{tg}\alpha}{m+n}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{m-n}.$$

1.25. Известно, что α, β, γ составляют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{\sin\alpha-\sin\gamma}{\cos\gamma-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\beta.$$

1.26. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

1.27. Доказать тождество

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=1.$$

1.28. Доказать, что если $\sin^2\beta=\sin\sigma\cos\alpha$, то

$$\cos 2\beta=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

1.29. Доказать тождество

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{3\pi}{4}\right)}-\frac{1}{4}\sin 2\alpha\left[\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)\right]=-\sin^2\alpha.$$

1.30. Доказать тождество

$$4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sin\frac{3\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

1.31. Доказать тождество

$$\frac{1+\sin 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}-\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\sin\alpha.$$

1.32. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma=2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

1.33. Упростить выражение для $\alpha\in[0;\ 2\pi]$:

$$\frac{\sqrt{1+\cos\alpha}+\sqrt{1-\cos\alpha}}{\sqrt{1+\cos\alpha}-\sqrt{1-\cos\alpha}}.$$

1.34. Упростить выражение

$$\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}\,\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}.$$

§ 2. Вычисление значений тригонометрических функций

Задачи, связанные с вычислением значений тригонометрических выражений без использования таблиц, обычно решаются с помощью тождественных преобразований, приводящих искомое выражение к виду, содержащему только табличные значения тригонометрических функций.

Пример 2.1. Вычислить без таблиц

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ.$$

Решение.

$$\frac{\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}=\frac{\sin 20^\circ\cdot 2\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cdot 2\sin 40^\circ\cos 40^\circ}{\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}=$$

$$=\frac{2\sin 20^\circ(\cos 20^\circ-\cos 60^\circ)}{\cos 80^\circ}=\frac{\sin 40^\circ-\sin 20^\circ}{\cos 80^\circ}=$$

$$=\frac{2\cos 30^\circ\sin 10^\circ}{\cos 80^\circ}=\frac{2\cos 30^\circ\cos(90^\circ-10^\circ)}{\cos 80^\circ}=\sqrt{3}.$$

Ответ. $\sqrt{3}$.

Вычислить без использования таблиц:

2.1. $\dfrac{\sin 24^\circ\cos 6^\circ-\sin 6^\circ\sin 66^\circ}{\sin 21^\circ\cos 39^\circ-\cos 51^\circ\sin 69^\circ}$.

2.2. $\sin^2 70° \sin^2 50° \sin^2 10°$. **2.3.** $\sin 15°$.

2.4. $\sin\dfrac{3\pi}{10}\sin\dfrac{\pi}{10}$. **2.5.** $8\cos\dfrac{4\pi}{9}\cos\dfrac{2\pi}{9}\cos\dfrac{\pi}{9}$.

2.6. $\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{18}}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\dfrac{\pi}{18}}$.

2.7. $\sin^4\dfrac{\pi}{8}+\cos^4\dfrac{3\pi}{8}+\sin^4\dfrac{5\pi}{8}+\cos^4\dfrac{7\pi}{8}$.

2.8*. $\sin 18°$. **2.9*.** $\sin 42°$.

Вычисление значений одной тригонометрической функции по известному значению другой функции.

Пример 2.2. Вычислить

$$\frac{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha},$$

если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

Решение. Выражая $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, получаем

$$\frac{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}=\frac{4\operatorname{tg}\alpha-3+3\operatorname{tg}^2\alpha}{8\operatorname{tg}\alpha+5-5\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Подставляя в правую часть этого выражения $\operatorname{tg}\alpha=3$, имеем

$$\frac{4\cdot 3-3+3\cdot 9}{8\cdot 3+5-5\cdot 9}=-\frac{9}{4}.$$

Ответ. $-9/4$.

2.10. Вычислить $\sin\alpha$, если $\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}=1{,}4$.

2.11. Вычислить $1+5\sin 2\alpha-3\cos^{-1}2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=-2$.

2.12. Найти значение $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=a$.

2.13. Вычислить значение $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=n$.

2.14. Зная, что $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=m$, найти $\dfrac{1-2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\sin\alpha}$.

2.15. Вычислить $\cos(\theta-\varphi)$, если $\cos\theta+\cos\varphi=a$, $\sin\theta-\sin\varphi=b$, $a^2+b^2\neq 0$.

2.16. Сумма трех положительных чисел α, β, γ равна $\pi/2$. Вычислить произведение $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma$, если известно, что $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\operatorname{ctg}\gamma$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

2.17. Вычислить $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, если

$$\sin\alpha+\sin\beta=a,\quad \cos\alpha+\cos\beta=b.$$

2.18*. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta)$, если

$$\sin(\alpha+\beta)=1,\quad \sin(\alpha-\beta)=1/2,$$

где $\alpha,\ \beta\in[0;\pi/2]$.

2.19. Найти отношение $\operatorname{ctg}\beta/\operatorname{ctg}\alpha$, если известно, что

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{p}{q}.$$

2.20. Найти $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если известно, что $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$.

2.21. Вычислить $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если $\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{11}{25}$.

2.22. Составить уравнение для нахождения $\cos\dfrac{\alpha}{3}$, если $\cos\alpha=m$.

2.23. Найти $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, если известно, что

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}=\frac{1-m}{1+m}.$$

2.24. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha$ удовлетворяет соотношению

$$\operatorname{tg}^2\alpha-a\operatorname{tg}\alpha+1=0$$

и известно, что $a>0$ и $0<\alpha<\pi/4$.

Вычисление значений тригонометрических функций от значений обратных тригонометрических функций.

Пример 2.3. Вычислить значение $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arcctg}3\right)$.

Решение. Обозначим $\alpha=\operatorname{arcctg}3$. Тогда $\operatorname{ctg}\alpha=3$, $0<\alpha<\pi/2$. Вычислим теперь значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Имеем

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\cos\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}=\frac{3}{\sqrt{10}}.$$

Используя формулу $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}}\Big/\left(1+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)=\frac{1}{\sqrt{10}+3}.$$

Ответ. $\dfrac{1}{\sqrt{10}+3}$.

Вычислить:

2.25. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{4}\right)$. **2.26.** $\cos\left[\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

2.27. $\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{8}{17}\right)$. **2.28.** $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{2}{3}\right)$.

2.29*. $\arcsin(\sin 2)$. **2.30.** $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}+\arccos\frac{1}{4}\right)$.

2.31. $\sin(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)$. **2.32.** $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}-\arccos\frac{2}{3}\right)$.

2.33. $\sin\left(2\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\right)+\cos(\operatorname{arctg}2\sqrt{3})$.

Проверка справедливости равенств, содержащих обратные тригонометрические функции. При решении этих задач следует иметь в виду, что сумма двух обратных тригонометрических функций, вычисленных от положительных величин, заключена в промежутке $[0;\ \pi]$, а разность — в промежутке $[-\pi/2;\ \pi/2]$.

Пример 2.4. Проверить справедливость равенства

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}=\operatorname{arcctg}\frac{2}{11}.$$

Решение. Вычислим котангенс от левой и от правой частей равенства:

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)-1}{\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)+\operatorname{ctg}\left(\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}=\frac{2}{11},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{11}\right)=\frac{2}{11}.$$

Итак, получаем

$$\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg}\frac{2}{11}\right).$$

Так как угол $\arcsin\frac{4}{5}+\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$ принадлежит промежутку $(0;\ \pi)$ — промежутку монотонности функции котангенс — то из равенства значений функции котангенс следует равенство значений аргументов, что и требовалось доказать.

Проверить справедливость равенств:

2.34. $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{2}$.

2.35. $\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}2=\pi-\operatorname{arctg}3$.

2.36. $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$.

2.37. Доказать, что если

$$\operatorname{arctg}\alpha+\operatorname{arctg}\beta+\operatorname{arctg}\gamma=\pi,$$

то $\alpha+\beta+\gamma=\alpha\cdot\beta\cdot\gamma$.

2.38. Доказать, что

$$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

2.39. Доказать, что

$$\operatorname{arctg}3-\arcsin\frac{\sqrt{5}}{5}=\frac{\pi}{4}.$$

2.40. Доказать, что

$$\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{12}{13}=\frac{\pi}{2}.$$

2.41. Доказать, что

$$\frac{\pi}{2}+\arcsin\frac{77}{85}=\arcsin\frac{8}{17}+\arccos\left(-\frac{3}{5}\right).$$

2.42.** Проверить, справедливо ли равенство

$$\arccos x+\arccos\left(\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-3x^2}\right)=\frac{\pi}{3}\ \text{для}\quad x\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right].$$

2.43.** Проверить, справедливо ли равенство

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2-2x^2}}{2}\right)-\arcsin x=\frac{\pi}{4}.$$

Суммирование конечного ряда тригонометрических функций

$$S_n=u_1+u_2+u_3+\ \dots\ +u_n \tag{1}$$

часто удается осуществить с помощью подбора так называемой *производящей функции*, т. е. функции, обладающей свойством

$$f(k+1)-f(k)=u_k.$$

Если функция $f(k)$ найдена, то сумма (1) представляется в виде

$$S_n=f(n+1)-f(1). \tag{2}$$

Пример 2.5. Просуммировать

$$S_n=\sin\alpha+\sin(\alpha+h)+\sin(\alpha+2h)+\ \dots\ +\sin(\alpha+nh).$$

Решение. Воспользуемся тем, что

$$\cos\left(\alpha+\frac{2k+1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}h\right)=$$
$$=-2\sin(\alpha+kh)\sin\frac{h}{2}.$$

Тогда в качестве производящей функции можно взять

$$f(k)=-\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\cos\left(\alpha+\frac{2k-1}{2}h\right).$$

Согласно (2) получаем

$$S_n=-\frac{1}{2\sin\frac{h}{2}}\left[\cos\left(\alpha+\frac{2n+1}{2}h\right)-\cos\left(\alpha-\frac{h}{2}\right)\right].$$

Преобразуя выражение в квадратных скобках в произведение, имеем

$$S_n=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{n}{2}h\right)\sin\left(\frac{n+1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

Найти следующие суммы:

2.44. $\sin\alpha\sin2\alpha+\sin2\alpha\sin3\alpha+\sin3\alpha\sin4\alpha+\ldots$
$\ldots+\sin n\alpha\sin(n+1)\alpha.$

2.45. $\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha+\ldots+\cos(2n+1)\alpha.$

2.46. $\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2^n}.$

2.47. $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+$
$+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}.$

2.48. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)+\cos^2\left(\alpha+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots$
$\ldots+\cos^2\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{n}\right).$

2.49. $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}.$

2.50. $\cos\frac{\pi m}{n}+\cos\frac{3\pi m}{n}+\cos\frac{5\pi m}{n}+\ldots$
$\ldots+\cos\frac{(2n-1)\pi m}{n}.$

2.51. $\dfrac{\sin\alpha+\sin2\alpha+\ldots+\sin n\alpha}{\cos\alpha+\cos2\alpha+\ldots+\cos n\alpha}.$

§ 3. Тригонометрические уравнения

Решения простейших тригонометрических уравнений.

$\sin x=a,\quad x=(-1)^k\arcsin a+\pi k,\quad |a|\leqslant1,$
$\cos x=a,\quad x=\pm\arccos a+2\pi k,\quad |a|\leqslant1,$
$\operatorname{tg}x=a,\quad x=\operatorname{arctg}a+\pi k,$
$\operatorname{ctg}x=a,\quad x=\operatorname{arcctg}a+\pi k.$

Уравнения вида

$$P(\sin x)=0,\quad P(\cos x)=0,\quad P(\operatorname{tg}x)=0,\quad P(\operatorname{ctg}x)=0,$$

где P — многочлен указанных аргументов, решаются как алгебраические уравнения относительно указанных аргументов с последующим решением простейших тригонометрических уравнений.

Решить уравнения, сводя их к алгебраическим уравнениям относительно одной тригонометрической функции:

3.1. $2\sin^2x+\sin x-1=0.$

3.2. $\operatorname{tg}^3x+2\operatorname{tg}^2x+3\operatorname{tg}x=0.$

3.3. $4\sin^4x+\cos4x=1+12\cos^4x.$

3.4. $6\cos^2x+\cos3x=\cos x.$

3.5*. $\sqrt{\frac{1}{16}+\cos^4x-\frac{1}{2}\cos^2x}+$
$+\sqrt{\frac{9}{16}+\cos^4x-\frac{3}{2}\cos^2x}=\frac{1}{2}.$

Решение однородных уравнений. Уравнения вида

$$a_0\sin^nx+a_1\sin^{n-1}x\cos x+a_2\sin^{n-2}x\cos^2x+\ldots$$
$$\ldots+a_n\cos^nx=0,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа и сумма показателей степеней при $\sin x$ и $\cos x$ в каждом слагаемом равна n, называются *однородными относительно* $\sin x$, $\cos x$. Такие уравнения при $\cos x\neq0$ эквивалентны уравнениям

$$a_0\operatorname{tg}^nx+a_1\operatorname{tg}^{n-1}x+\ldots+a_n=0.$$

Пример 3.1. Решить уравнение

$$3\sin^2x-5\sin x\cos x+8\cos^2x=2.$$

Решение. Для того чтобы свести данное уравнение к однородному, воспользуемся основным тригонометрическим тождеством

$$\sin^2x+\cos^2x=1,$$

записывая уравнение в виде

$$3\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 8\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

После приведения подобных членов получаем

$$\sin^2 x - 5\sin x\cos x + 6\cos^2 x = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, приходим к квадратному уравнению относительно неизвестной $y = \operatorname{tg} x$

$$y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Корнями полученного квадратного уравнения будут числа

$$y_1 = 2 \quad \text{и} \quad y_2 = 3.$$

Следовательно, решение исходного тригонометрического уравнения сведено к решению двух простейших тригонометрических уравнений

$$\operatorname{tg} x = 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = 3,$$

решения которых

$$x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k,$$
$$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n, \qquad k,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Решить следующие уравнения сведением к однородным:

3.6. $2\sin x\cos x + 5\cos^2 x = 4.$

3.7. $8\sin 2x - 3\cos^2 x = 4.$

3.8. $4\cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + 3\sin^2\frac{x}{2} = 3.$

3.9. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1/2.$

3.10. $2\sin^3 x + 2\cos x\sin^2 x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

3.11. $3 - 7\cos^2 x\sin x - 3\sin^3 x = 0.$

3.12. $2\sin^3 x - \sin^2 x\cos x + 2\sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0.$

3.13. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - 0{,}5.$

3.14. $\sin^6 2x + \cos^6 2x = \frac{3}{2}(\sin^4 2x + \cos^4 2x) + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x).$

3.15. $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = 1/16.$

3.16. $\sin^8 x + \cos^8 x = \cos^2 2x.$

3.17.** Найти решение уравнения

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a(\sin^4 x + \cos^4 x)$$

при всех действительных значениях a.

Метод дополнительного угла. Уравнения вида

$$a\cos x + b\sin x = c$$

эквивалентны тригонометрическому уравнению

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

где φ находится из системы

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Пример 3.2. Решить уравнение

$$3\sin x + 4\cos x = 5.$$

Решение. Так как $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то данное уравнение эквивалентно уравнению

$$\sin(x + \varphi) = 1,$$

где φ определяется из системы уравнений

$$\sin\varphi = 4/5, \qquad \cos\varphi = 3/5.$$

Так как $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ больше нуля, то в качестве φ можно взять $\varphi = \arcsin\frac{4}{5}$, и решение данного уравнения имеет вид

$$x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n.$$

Ответ. $x = -\arcsin\frac{4}{5} + \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$.

Заметим, что уравнение примера 3.2 может быть сведено к однородному, если представить

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}, \quad \text{а} \quad \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}.$$

Решить уравнения методом введения дополнительного угла:

3.18. $\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$

3.19. $\sin 11x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 7x + \frac{1}{2}\cos 7x = 0.$

3.20. $\sin 10x + \cos 10x = \sqrt{2}\sin 15x.$

3.21. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{2}\cos 3x = 0,$$

заключенные между π и $3\pi/2$.

3.22. $4\cos^2 x = 2 + \frac{1}{2}\cos 2x\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos 2x} + \frac{1}{\sin 2x}\right).$

3.23. $4\sin 3x + 3\cos 3x = 5{,}2.$

Решение уравнений методом универсальной тригонометрической подстановки. Тригонометрическое уравнение вида

$$R(\sin kx, \cos nx, \operatorname{tg} mx, \operatorname{ctg} lx) = 0, \qquad (3)$$

где R — рациональная функция указанных аргументов (k, n, m и l — натуральные числа), с помощью формул для тригонометрических функций суммы углов (в частности, формул двойного и тройного углов) можно свести к рациональному уравнению относительно аргументов $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, после чего уравнение (3) может быть сведено к рациональному уравнению относительно неизвестного $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ с помощью формул *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}};$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}; \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Пример 3.3. Решить уравнение

$$(\cos x - \sin x)\left(2\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}\right) + 2 = 0.$$

Решение. Обозначая $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, с помощью формул универсальной тригонометрической подстановки запишем уравнение в виде

$$\frac{3t^4 + 6t^3 + 8t^2 - 2t - 3}{(t^2+1)(1-t^2)} = 0;$$

корнями его будут $t_1 = 1/\sqrt{3}$, $t_2 = -1/\sqrt{3}$. Таким образом, решение уравнения сводится к решению двух простейших уравнений

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}. \qquad (4)$$

Делая проверку, убеждаемся, что числа πn — корни уравнения $\cos\frac{x}{2} = 0$ — не являются корнями данного уравнения, и, следовательно, все решения исходного уравнения находятся как решения уравнений (4).

Ответ. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$.

Решить уравнения методом универсальной подстановки:

3.24. $\sin x + \operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 2.$

3.25. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 5\operatorname{tg} 2x + 7$

3.26. $3\sin 4x = (\cos 2x - 1)\operatorname{tg} x.$

3.27. $(1 + \cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 2} + \sin x = 2\cos x.$

Уравнение вида

$$R(\sin x + \cos x, \sin x\cos x) = 0, \qquad (5)$$

где R — рациональная функция указанных в скобках аргументов, может быть сведено к уравнению относительно неизвестного $t = \sin x + \cos x$, если воспользоваться тригонометрическим тождеством

$$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 1 + 2\sin x\cos x,$$

из которого следует равенство

$$\sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}.$$

Учитывая это равенство, уравнение (5) можно привести к виду

$$R\left(t, \frac{t^2-1}{2}\right) = 0.$$

Аналогичным образом уравнение вида

$$R(\sin x - \cos x, \sin x\cos x) = 0$$

заменой $\sin x - \cos x = t$ сводится к уравнению

$$R\left(t, \frac{1-t^2}{2}\right) = 0.$$

Пример 3.4. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x - 2\sqrt{2}\sin x\cos x = 0.$$

Решение. Обозначив $\sin x + \cos x = t$ и воспользовавшись равенством $\sin x\cos x = (t^2-1)/2$, сведем исходное уравнение к уравнению относительно t:

$$\sqrt{2}\,t^2 - t - \sqrt{2} = 0.$$

Корнями этого квадратного уравнения будут числа $t_1 = \sqrt{2}$, $t_2 = -1/\sqrt{2}$.

Таким образом, решение исходного уравнения сводится к решению двух тригонометрических уравнений:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}, \quad \sin x + \cos x = -1/\sqrt{2}.$$

Умножая обе части этих уравнений на число $1/\sqrt{2}$, сводим их к двум более простым уравнениям:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1 \Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\sin x + \sin\frac{\pi}{4}\cos x = 1 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}.$$

Решениями уравнений $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ и $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ будут

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \qquad k \in \mathbf{Z},$$

$$x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Решить уравнения:

3.28. $5(\sin x + \cos x) + \sin 3x - \cos 3x = 2\sqrt{2}\,(2 + \sin 2x)$.

3.29. $\sin x + \cos x + \sin x\cos x = 1$.

3.30. $\sin x + \cos x - 2\sin x\cos x = 1$.

3.31*. Найти решение уравнения

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin x\cos x} = a$$

при всех действительных значениях a.

Упрощение некоторых тригонометрических уравнений может быть достигнуто с помощью понижения их степени. Если показатели степеней синусов и косинусов, входящих в уравнение, четные, то понижение степени производится по формулам половинного аргумента.

Пример 3.5. Решить уравнение

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = \frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

Решение. Используя формулы половинных углов, данное уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^5 = \frac{29}{16}\cos^4 2x.$$

Обозначив $\cos 2x = t$, представим это уравнение в виде

$$\left(\frac{1 - t}{2}\right)^5 + \left(\frac{1 + t}{2}\right)^5 = \frac{29}{16}t^4.$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены, приходим к биквадратному уравнению

$$24t^4 - 10t^2 - 1 = 0,$$

единственный действительный корень которого $t^2 = 1/2$. Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем

$$\cos^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \cos 4x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, \qquad k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Решить уравнения:

3.32. $\sin^2 6x + 8\sin^2 3x = 0$.

3.33. $\sin^2 x + a\sin^2 2x = \sin\frac{\pi}{6}$. Исследовать решение.

3.34. $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{32}$.

3.35. $\cos 2x + 4\sin^4 x = 8\cos^6 x$.

3.36. $\cos 4x - 2\cos^2 x - 22\sin^2 x + 1 = 0$.

3.37. $\cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x = \frac{3}{2}$.

3.38. $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

3.39. $\cos^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{3}{2}x - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.

3.40. $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0{,}25$.

3.41. $2 + \cos 4x = 5\cos 2x + 8\sin^6 x$.

3.42. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$.

3.43. $8\sin^2 x + 6\cos^2 x = 13\sin 2x$.

3.44. $\sin^3 x\,(1 + \mathrm{ctg}\,x) + \cos^3 x\,(1 + \mathrm{tg}\,x) = 2\sqrt{\sin x\cos x}$.

Решить уравнения, применяя изложенные выше методы:

3.45. $2\cos 2x = \sqrt{6}\,(\cos x - \sin x)$.

3.46. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

3.47. $\sin 3x + \sin x + 2\cos x = \sin 2x + 2\cos^2 x$.

3.48. $\sin 5x\sin 4x = -\cos 6x\cos 3x$.

3.49. $\operatorname{tg} x+\sin 2x=\dfrac{1}{\cos x}$.

3.50. $2\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 4x$.

3.51. $\cos 3x+\sin 5x=0$.

3.52. $\sin x\cos 5x=\sin 9x\cos 3x$.

3.53. $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$.

3.54. $1+\sin x+\cos 3x=\cos x+\cos 2x+\sin 2x$.

3.55. $\sin^2 x(\operatorname{tg} x+1)=3\sin x(\cos x-\sin x)+3$.

3.56. $\sin 2x\sin 6x=\cos x\cos 3x$.

3.57. $\cos(x+1)\sin 2(x+1)=\cos 3(x+1)\sin 4(x+1)$.

3.58. $\sin x\sin 7x=\sin 3x\sin 5x$.

3.59. $\cos x\sin 7x=\cos 3x\sin 5x$.

3.60. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$.

3.61. $\cos 2x-\cos 8x+\cos 6x=1$.

3.62. $\sin x\sin 2x\sin 3x=\dfrac{1}{4}\sin 4x$.

3.63. $\sin^3 x\cos 3x+\cos 3x\cos^3 x=\dfrac{3}{8}$.

3.64. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 3x$.

3.65. $(1-\operatorname{tg} x)(1+\sin 2x)=1+\operatorname{tg} x$.

3.66. $(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x$.

3.67. $\operatorname{tg}(x+\alpha)+\operatorname{tg}(x-\alpha)=2\operatorname{ctg} x$.

3.68. $\sin^2 2z+\sin^2 3z+\sin^2 4z+\sin^2 5z=2$.

3.69. $\sin x\cos x\cos 2x\cos 8x=\dfrac{1}{4}\sin 12x$.

3.70. $\sin 2x\sin 6x-\cos 2x\cos 6x=\sqrt{2}\sin 3x\cos 8x$.

3.71. $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} 2x=2\operatorname{ctg} 4x$.

3.72. $\cos 3x-\cos 2x=\sin 3x$.

3.73. $2\sin 3x-\dfrac{1}{\sin x}=2\cos 3x+\dfrac{1}{\cos x}$.

3.74. $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}^2 x=32\cos^3 2x$.

3.75. $\operatorname{tg} 2x+\operatorname{ctg} x=8\cos^2 x$.

3.76. $\sin^2 2x-\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{9}{2}\cos 2x$.

3.77. $\sin 2x-\operatorname{tg} x=2\sin 4x$.

3.78. $\dfrac{\sin 4x}{\sin(x-\pi/4)}=\sqrt{2}(\sin x+\cos x)$.

3.79. $\cos 3x\operatorname{tg} 5x=\sin 7x$.

3.80. $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos x+\cos(\pi/4)}=\cos x-\cos\dfrac{\pi}{4}$.

3.81. $\sin x\operatorname{ctg} 3x=\cos 5x$.

3.82. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 5x}{\cos x}=8\sin x\sin 3x$.

3.83. $\dfrac{\cos x}{\cos 3x}-\dfrac{\cos 3x}{\cos x}=-2\cos 2x$.

3.84. $\dfrac{1}{\cos x\cos 2x}+\dfrac{1}{\cos 2x\cos 3x}+\dfrac{1}{\cos 3x\cos 4x}=0$.

3.85. $\dfrac{\sin 3x}{\cos 2x}+\dfrac{\cos 3x}{\sin 2x}=\dfrac{2}{\sin 3x}$.

3.86*. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{3}\cos 2x$.

3.87. $4\sin 3x+\sin 5x-2\sin x\cos 2x=0$.

3.88. $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin x$.

3.89. $3\cos x+2\cos 5x+4\cos 3x\cos 4x=0$.

3.90. $3\sin 5x=\cos 2x-\cos 8x-\sin 15x$.

3.91. $\cos 2x-\sin 3x-\cos 8x=\sin 10x-\cos 5x$.

3.92. $\sin 2x-\cos 2x=\operatorname{tg} x$.

3.93. $\cos 3x-\sin 5x-\cos 7x=\sin 4x-\cos 2x$.

3.94. $\sin 2x+\cos 2x=2\operatorname{tg} x+1$.

3.95. $4\sin^2 x+3\operatorname{tg}^2 x=1$.

3.96. $4\sin x\sin 2x\sin 3x=\sin 4x$.

3.97. $\dfrac{\sin 4x+\sin 2x-4\sin 3x+2\cos x-4}{\sin x-1}=0$.

3.98. $\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x}=\sqrt{2}\left(\cos x-\dfrac{1}{2}\right)$.

3.99. $\cos 2x=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x+\sin x)$.

3.100. $\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x=\dfrac{\cos x-\sin x}{\frac{1}{2}\sin 2x}$.

3.101. $\sin 7x+\sin 3x+2\sin^2 x=1$.

3.102. $\cos x-\cos 17x=1+2\sin 8x\sin x-\cos 16x$.

3.103. $\sin x-\cos x=4\sin x\cos^2 x$.

3.104. $2\cos 2x(\operatorname{ctg} x-1)=1+\operatorname{ctg} x$.

3.105. $\operatorname{tg} x+2\operatorname{ctg} 2x=\sin x\left(1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$.

3.106. $2\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x=\sin 2x+3\sin x$.

3.107. $\sin^4 x-\cos^4 x=\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$.

3.108. $\sin 2x+\sin^4\dfrac{x}{2}=\cos^4\dfrac{x}{2}$.

3.109. $\cos x=\sqrt{3}\sin x+2\cos 3x$.

3.110. $\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=(\sin x+\cos x)^2$.

3.111. $\sin 3x+\sin x=4\sin^3 x$.

3.112. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\cos x\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sin x\right)$.

Решение некоторых тригонометрических уравнений предполагает последующую проверку условий, которым должны удовлетворять найденные корни. Если эти условия заключаются в том, что корни уравнения должны принадлежать заданному промежутку, то решение задачи выделения этих корней сводится к решению некоторого неравенства в целых числах.

Пример 3.6. Найти все решения уравнения

$$(\operatorname{tg}^2 x-1)^{-1}=1+\cos 2x, \qquad (*)$$

удовлетворяющие неравенству $2^{x+1}-8>0$.

Решение. Приведем исходное тригонометрическое уравнение к виду

$$(1+\cos 2x)\left(1+\frac{1}{2\cos 2x}\right)=0.$$

Решениями этого уравнения будут следующие значения x:

$$x=-\frac{\pi}{2}+\pi n, \quad x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k, \quad n,\ k\in\mathbf{Z}.$$

По условию задачи среди этих значений x необходимо отобрать те значения, которые удовлетворяют неравенствам

$$2^{x+1}-8>0, \quad \cos x\neq 0.$$

Такими значениями будут

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in\mathbf{N}.$$

Ответ. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n, \quad n\in\mathbf{N}$.

3.113. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin(1-x)}=\sqrt{\cos x},$$

удовлетворяющие условию $x\in[0;\ 2\pi]$.

3.114. Найти все решения уравнения

$$\cos^4 x-3\cos 3x=3\cos x-\cos^3 x\cos 3x,$$

лежащие в промежутке $[-\pi;\ \pi/2]$.

3.115. Найти все решения уравнения

$$\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}=1-\sin x,$$

удовлетворяющие условию

$$\left|\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right|\leqslant\frac{3\pi}{4}.$$

3.116. Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{2}(\cos 5x+\cos 7x)-\cos^2 2x+\sin^2 3x=0,$$

удовлетворяющие условию $|x|<2$.

Решить уравнения:

3.117*. $\operatorname{tg} x^2=\operatorname{ctg} 5x$.

3.118*. $\sin\frac{5}{x}=\cos 3x$.

3.119*. $\sin x=\cos\sqrt{x}$.

3.120.** Доказать, что уравнение

$$\sin(\cos x)=\cos(\sin x)$$

не имеет действительных корней.

3.121*. $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\cos x\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{5}\sin x\right)$.

3.122*. $\sin(\pi\operatorname{ctg} x)=\cos(\pi\operatorname{tg} x)$.

3.123. Найти корни уравнения $\sin(x-2)=\sin(3x-4)$, принадлежащие промежутку $(-\pi;\ \pi)$.

В случаях, когда дополнительные условия представлены неравенством, содержащим тригонометрические функции, выделение нужных корней производится на промежутке, равном наименьшему общему кратному периодов тригонометрических функций, входящих в уравнения и неравенства.

Пример 3.7. Найти все решения уравнения

$$1+(\sin x-\cos x)\sin\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{5}{2}x, \qquad (*)$$

удовлетворяющие условию

$$\sin 6x<0. \qquad (**)$$

Решение. Упростим исходное уравнение:

$$1+(\sin x-\cos x)\sin\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{5x}{2}\Leftrightarrow 1+(\sin x-\cos x)\frac{\sqrt{2}}{2}=$$

$$=1+\cos 5x\Leftrightarrow\cos 5x+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=0.$$

Таким образом, исходное уравнение $(*)$ эквивалентно уравнениям

$$\cos\left(3x+\frac{\pi}{8}\right)=0, \quad \cos\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)=0,$$

корни которых равны соответственно

$$x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{3}, \qquad n\in\mathbf{Z},$$

$$x=\frac{5\pi}{16}+\frac{\pi n}{2}, \qquad n\in\mathbf{Z}.$$

Наименьшее общее кратное периодов тригонометрических функций, входящих в уравнения (*) и неравенства (**), равно 2π. Из найденных решений уравнения, принадлежащих промежутку $[0;\ 2\pi)$, неравенству (**) удовлетворяют числа $5\pi/16$ и $5\pi/16+\pi$. Все решения задачи получаются прибавлением к каждому полученному корню чисел, кратных 2π.

Ответ. $x=\frac{5\pi}{16}+\pi k \quad (k\in\mathbf{Z})$.

3.124. Найти все решения уравнения

$$5-8\cos\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)=2\sin\left(2x-\frac{7}{2}\pi\right),$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$.

3.125. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\operatorname{tg}x+\sin x}+\sqrt{\operatorname{tg}x-\sin x}=\sqrt{3\operatorname{tg}x}$$

а) на промежутке $[0;\ \pi]$; б) на всей действительной оси.

3.126. Решить уравнение

$$\sqrt{2+\operatorname{tg}x-\cos^2 x}-\sqrt{\frac{16}{9}+\operatorname{tg}x}=\sqrt{\frac{2}{9}-\cos^2 x}.$$

3.127.** Найти все решения уравнения

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1,$$

удовлетворяющие неравенству $\frac{2\cos 7x}{\cos 3+\sin 3}>2^{\cos 2x}$.

3.128*. Найти все решения уравнения

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}\cos x},$$

удовлетворяющие неравенству $\log_{\sin^2 3}(1+\cos(2x+4))<\cos 4x$.

3.129*. Найти все решения уравнения

$$\sin\left(4x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4x+\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2},$$

удовлетворяющие неравенству $\frac{\cos 2x}{\cos 2-\sin 2}>2^{-\sin 4x}$.

3.130*. Найти все решения уравнения

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin^2 x,$$

удовлетворяющие неравенству $\log_{\cos^2 3}(1+\sin(7x+5))<\sin 8x$.

Некоторые тригонометрические уравнения удается решить, используя оценку левой и правой частей уравнения.

Пример 3.8. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=2. \qquad (*)$$

Решение. Используя формулу приведения, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}-x\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

Так как

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\pi/4-x)},$$

то левая часть данного уравнения представляет собой сумму двух взаимно обратных величин. Известно, что при $a>0$

$$a+1/a\geqslant 2.$$

Таким образом, равенство (*) достигается только при

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=1. \qquad (**)$$

Множество решений уравнения (**) имеет вид

$$x=\pi n, \qquad n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ. $x=\pi n \quad (n\in\mathbf{Z})$.

Пример 3.9. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 3x=2.$$

Решение. Так как $|\sin x|\leqslant 1$, $|\sin 3x|\leqslant 1$, то исходное уравнение эквивалентно системе уравнений

$$\sin x=1, \qquad \sin 3x=1.$$

Множества решений каждого из этих уравнений имеют вид

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, \qquad k\in\mathbf{Z}, \qquad (*)$$

и

$$x=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, \qquad n\in\mathbf{Z}, \qquad (**)$$

соответственно. Решением системы, а следовательно и исходного уравнения, являются те значения x, которые принадлежат как первому, так и второму множеству. Для того чтобы найти эти значения, приравняем выражения, стоящие в правых частях равенств (*) и (**). Если найдутся целые значения n и k, при которых эти выражения совпадают, то полученные значения x удовлетворят обоим уравнениям системы.

Приравнивая правые части (*) и (**), получаем уравнение

$$\frac{\pi}{2}+2\pi k=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3},$$

которое после тождественных преобразований приводится к виду

$$2n-6k=1. \qquad (***)$$

Очевидно, что уравнение (***) не имеет решений в целых числах, так как при любых n и k слева стоит четное число, а справа — нечетное. Таким образом, множества (*) и (**) не имеют общих точек и исходное уравнение решения не имеет.

Решить уравнения:

3.131. $\sin x+\sin 5x=2$. **3.132.** $\sin x\sin y=1$.

3.133. $3^{\lg \operatorname{tg} x}+3^{\lg \operatorname{ctg} x}=2$.

3.134.** $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}$.

3.135. $\sin x+\sin y=2$. **3.136.** $\sin x+\sin y+\sin z=-3$.

3.137. $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$.

3.138. $\cos^2 x+\cos x\cos y+\cos^2 y=0$.

3.139*. Доказать, что уравнение

$$(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2$$

не имеет решений.

3.140. $\sqrt{2-|y|}\,(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=$
$$=\arcsin^2 x+\arccos^2 x-\frac{5\pi^2}{4}.$$

3.141. $\operatorname{tg} x=\frac{2}{\pi}\left(\left|x-\frac{\pi}{4}\right|-\left|x-\frac{3}{4}\pi\right|\right)$.

3.142. Найти все x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{49-4x}\left(\sin\pi x+3\cos\frac{\pi x}{2}\right)=0.$$

3.143. Найти все значения x, при которых выражение

$$\sqrt{4x^4-3-x^8}\,\{1-\cos[2\pi(2x+21x^2)]\}$$

не обращается в нуль.

§ 4. Системы тригонометрических уравнений

Системы уравнений, в которых неизвестные являются аргументами тригонометрических функций, называются *системами тригонометрических уравнений*. При решении систем тригонометрических уравнений используются методы решения систем уравнений и методы решения тригонометрических уравнений.

Пример 4.1. Решить систему уравнений

$$\sin x\sin y=\sqrt{3}/4,$$
$$\cos x\cos y=\sqrt{3}/4.$$

Решение. Складывая уравнения системы, приходим к уравнению

$$\sin x\sin y+\cos x\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Вычитая из второго уравнения системы первое, приходим к уравнению

$$\cos x\cos y-\sin x\sin y=0\Leftrightarrow\cos(x+y)=0.$$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{aligned}&\cos(x-y)=\frac{\sqrt{3}}{2},\\&\cos(x+y)=0,\end{aligned}\Leftrightarrow\begin{aligned}&x-y=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\&x+y=\frac{\pi}{2}+\pi k,\end{aligned}\qquad n,\ k\in\mathbf{Z},$$

откуда

$$x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(2n+k),\qquad x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(2n+k),$$
$$y=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k-2n),\qquad y=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k-2n).$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(2n+k),\ \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(k-2n)\right)$;
$\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}(2n+k),\ \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}(k-2n)\right)$, где $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

Решить следующие системы уравнений:

4.1. $\sin x\cos y=-1/2$, $\cos x\sin y=1/2$.

4.2. $\sin x\cos y=0{,}36$, $\cos x\sin y=0{,}175$.

4.3. $\sin x\sin y=3/4$, $\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y=3$.

4.4. $\cos x\cos y=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y=3+2\sqrt{2}$.

4.5. $\sin x-\sin y=1/2$, $\cos x+\cos y=\sqrt{3}/2$.

4.6. $\sin 2x + \sin 2y = 3(\sin x + \sin y)$,
$\cos 2x + \cos 2y = \cos x + \cos y$.

4.7. $\sin x \operatorname{ctg} y = \sqrt{6}/2$,
$\operatorname{tg} x \cos y = \sqrt{3}/2$.

4.8. $\operatorname{tg} x = \sin y$,
$\sin x = 2 \operatorname{ctg} y$.

4.9. $\sin y = 5 \sin x$,
$3 \cos x + \cos y = 2$.

4.10. $3 \operatorname{tg} \frac{y}{2} + 6 \sin x = 2 \sin (y - x)$,
$\operatorname{tg} \frac{y}{2} - 2 \sin x = 6 \sin (y + x)$.

4.11. $\sin^2 x + \cos x \sin y = \cos 2y$,
$\cos 2x + \sin 2y = \sin^2 y + 3 \cos y \sin x$.

4.12. $2 \sin^2 y + \sin 2y = \cos (x + y)$,
$\cos^2 x + 2 \sin 2y + \sin^2 y = \cos (x - y)$.

4.13. $\sin^2 (-2x) - (3 - \sqrt{2}) \operatorname{tg} 5y = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}$,
$\operatorname{tg}^2 5y + (3 - \sqrt{2}) \sin (-2x) = \frac{3\sqrt{2} - 1}{2}$.

4.14. $\sin^2 3x + (4 - \sqrt{3}) \operatorname{ctg} (-7y) = 2\sqrt{3} - 3/4$,
$\operatorname{ctg}^2 (-7y) + (4 - \sqrt{3}) \sin 3x = 2\sqrt{3} - 3/4$.

4.15. $4 \sin y - 6\sqrt{2} \cos x = 5 + 4 \cos^2 y$,
$\cos 2x = 0$.

4.16. $1 + 2 \cos 2x = 0$,
$\sqrt{6} \cos y - 4 \sin x = 2\sqrt{3} (1 + \sin^2 y)$.

4.17. $2\sqrt{3} \cos x + 6 \sin y = 3 + 12 \sin^2 x$,
$4\sqrt{3} \cos x + 2 \sin y = 7$.

4.18. $\sqrt{2}\, y + \sqrt{12} \operatorname{ctg} x = 4$,
$2\sqrt{2}\, y - \sqrt{27} \operatorname{ctg} x = 1$.

4.19. $3 \operatorname{tg} 3y + 2 \cos x = 2 \operatorname{tg} 60°$,
$2 \operatorname{tg} 3y - 3 \cos x = -\frac{5}{3} \cos 30°$.

4.20. $\sin (y - 3x) = 2 \sin^3 x$,
$\cos (y - 3x) = 2 \cos^3 x$.

4.21. $\sin (x - y) = 3 \sin x \cos y - 1$,
$\sin (x + y) = -2 \cos x \sin y$.

4.22. Найти решения системы

$$|\sin x| \sin y = -1/4,$$
$$\cos (x + y) + \cos (x - y) = 3/2,$$

удовлетворяющие условиям $x \in (0; 2\pi)$, $y \in (\pi; 2\pi)$.

4.23. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2 \sin^2 y$,
$\sin^2 y + \cos^2 z = 1$.

4.24. $x + y = \frac{\pi}{3}$,
$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \frac{3}{4}$.

4.25. $4^{\sin x} + 3 \cdot 9^{\cos y} = 3$,
$4^{-\sin x} + 5 \cdot 81^{\cos y + 1/2} = 11/2$.

4.26*. $x + y + z = \pi$,
$\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 2$,
$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = 6$.

4.27*. $\operatorname{tg} x / \operatorname{tg} y = 2$,
$\operatorname{tg} y / \operatorname{tg} z = 3$,
$x + y + z = \pi$.

Если одно из уравнений системы рационально относительно аргументов тригонометрических функций, то решение системы обычно сводится к решению тригонометрического уравнения для одного из неизвестных.

Пример 4.2. Решить систему уравнений

$$x + y = 2\pi/3,$$
$$\frac{\sin x}{\sin y} = 2.$$

Решение. Преобразуем второе уравнение системы к виду

$$\sin x = 2 \sin y. \qquad (*)$$

Используя первое уравнение системы, исключим из уравнения (*) неизвестное y:

$$\sin x = 2 \sin \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \Leftrightarrow \sin x = \sqrt{3} \cos x + \sin x.$$

Полученное уравнение эквивалентно тригонометрическому уравнению

$$\cos x = 0. \qquad (**)$$

Подставляя корни уравнения (**) в первое уравнение системы, получим значения для неизвестного y.

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $y = \frac{\pi}{6} - \pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Решить системы:

4.28. $x - y = \pi/18$,
$\sin \left(x + \frac{\pi}{18}\right) \sin \left(y + \frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}$.

4.29. $\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} y$,
$x - y = \pi/6$.

4.30. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} y = 3$,
$|x - y| = \pi/3$.

4.31. $\sin x + \sin y = \sin (x + y)$,
$|x| + |y| = 1$.

4.32. Выяснить, при каких значениях a решения системы

$$8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0,$$
$$x+y=a$$

существуют, и найти эти решения.

§ 5. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

Решения простейших уравнений

Уравнение		Решение
$\arcsin x=a$	$(\lvert a\rvert\leqslant\pi/2)$	$x=\sin a$
$\arccos x=a$	$(0\leqslant a\leqslant\pi)$	$x=\cos a$
$\operatorname{arctg} x=a$	$(\lvert a\rvert<\pi/2)$	$x=\operatorname{tg} a$
$\operatorname{arcctg} x=a$	$(0<a<\pi)$	$x=\operatorname{ctg} a$

Уравнения вида

$$P(y(x))=0,$$

где P — некоторая рациональная функция, а $y(x)$ — одна из аркфункций, сводятся к простейшим уравнениям

$$y(x)=y_i,$$

где y_i — корни уравнения $P(y)=0$.

Пример 5.1. Решить уравнение

$$2\arcsin^2 x-\arcsin x-6=0.$$

Решение. Вводя новое неизвестное $y=\arcsin x$, получаем уравнение

$$2y^2-y-6=0,$$

решение которого $y_1=2$, $y_2=-1{,}5$. Следовательно, решение исходного уравнения сводится к решению двух простейших уравнений

$$\arcsin x=2,\ \arcsin x=-1{,}5.$$

Так как $2>\pi/2$, а $|-1{,}5|<\pi/2$, то единственным решением будет $x=-\sin 1{,}5$.

Ответ. $x=-\sin 1{,}5$.

Решить уравнения:

5.1. $\operatorname{arctg}^2\frac{x}{3}-4\operatorname{arctg}\frac{x}{3}-5=0.$

5.2. $\operatorname{arctg}^2(3x+2)+2\operatorname{arctg}(3x+2)=0.$

5.3. $2\arcsin x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi^2/9}{\arcsin x}.$

5.4. $3\operatorname{arctg}^2 x-4\pi\operatorname{arctg} x+\pi^2=0.$

5.5*. Найти решения уравнения $2\arccos x=a+\frac{a^2}{\arccos x}$ при действительных значениях a.

Если в уравнение входят выражения, содержащие разные аркфункции, или эти аркфункции зависят от разных аргументов, то сведение уравнения к его алгебраическому следствию осуществляется обычно вычислением некоторой тригонометрической функции от обеих частей уравнения. Получающиеся при этом посторонние корни отделяются проверкой. Если в качестве прямой функции выбираются тангенс или котангенс, то решения, не входящие в область определения этих функций, могут быть потеряны. Поэтому перед вычислением значений тангенса или котангенса от обеих частей уравнений следует убедиться в том, что среди точек, не входящих в область определения этих функций, нет корней исходного уравнения.

Пример 5.2. Решить уравнение

$$\arcsin 6x+\arcsin 6\sqrt{3}\,x=-\pi/2. \qquad (*)$$

Решение. Перенесем $\arcsin 6x$ в правую часть уравнения и вычислим от обеих частей получившегося уравнения значения синуса:

$$\sin(\arcsin 6x)=\sin(-\arcsin 6\sqrt{3}\,x-\pi/2).$$

Преобразуя правую часть этого уравнения по формулам приведения, получаем следствие исходного уравнения:

$$6x=-\sqrt{1-108x^2}.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат. После приведения подобных членов получаем уравнение

$$144x^2=1,$$

корнями которого являются числа $1/12$ и $-1/12$.

Сделаем проверку. Подставляя в уравнение $(*)$ значение $x=-1/12$, имеем

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $x=-1/12$ является корнем исходного уравнения.

Подставляя в уравнение $(*)$ значение $x=1/12$, замечаем, что левая часть получившегося соотношения положительна, а правая — отрицательна. Таким образом, значение $x = 1/12$ — посторонний корень уравнения (*).

Ответ. $x = -1/12$.

Пример 5.3. Решить уравнение

$$2 \operatorname{arctg}(2x+1) = \arccos x. \tag{*}$$

Решение. Вычисляя от обеих частей уравнения значение косинуса, получаем

$$\cos[2 \operatorname{arctg}(2x+1)] = x.$$

Левую часть этого уравнения можно преобразовать к виду

$$\cos[2 \operatorname{arctg}(2x+1)] = \frac{1-(2x+1)^2}{1+(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x}{1+2x+2x^2}.$$

Таким образом, следствием уравнения (*) будет уравнение

$$\frac{2x^2+2x}{1+2x+2x^2} = x \Leftrightarrow 2x^3 - x = 0,$$

корни которого равны 0, $\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$. Для того чтобы выяснить, какие из этих чисел удовлетворяют исходному уравнению, произведем проверку. При $x=0$ обе части уравнения равны $\pi/2$. При $x=\sqrt{2}/2$ правая и левая части уравнения равны соответственно $\pi/4$ и $2 \operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)$. Но $\sqrt{2}+1>1$ и, следовательно, $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) > \pi/4$. Значит, $x=\sqrt{2}/2$ не является корнем исходного уравнения. При $x=-\sqrt{2}/2$ левая часть уравнения отрицательна, а правая — положительна. Следовательно, $x=-\sqrt{2}/2$ также не является корнем уравнения (*).

Ответ. $x = 0$.

Решить уравнения:

5.6. $\arccos\frac{x}{2} = 2 \operatorname{arctg}(x-1)$.

5.7. $\arccos x - \pi = \arcsin\frac{4x}{3}$.

5.8. $\operatorname{arctg}\left(x+\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg}\left(x-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

5.9. $\operatorname{arctg} 2x + \operatorname{arctg} 3x = \frac{3\pi}{4}$.

5.10. $\arcsin x + \arccos(x-1) = \pi$

5.11. $2\arccos x + \arcsin x = \frac{11\pi}{6}$.

5.12. $2\arccos\left(-\frac{x}{2}\right) = \arccos(x+3)$.

5.13. $2\arcsin x = \arcsin\sqrt{2}\,x$.

5.14. $\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \operatorname{arctg}\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} x$.

5.15. $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6}$.

5.16. $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{2}$.

5.17. $\arcsin 2x = 3\arcsin x$.

5.18. $\arccos x - \arcsin x = \arccos\sqrt{3}\,x$.

5.19. $\arcsin x - \arccos x = \arcsin(3x-2)$.

5.20. $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$.

5.21. $\arccos x = \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}$.

5.22. $\arccos x = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

5.23. $\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \arccos(2x^2-1)$.

5.24. $2\arccos x = \arccos(2x^2-1)$.

5.25. $2\operatorname{arctg} x = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$.

5.26. $2\operatorname{arctg} x = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

5.27. $\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

5.28. $2\arccos x = \operatorname{arcctg}\frac{2x^2-1}{2x\sqrt{1-x^2}}$.

5.29*. Решить уравнение $\arcsin x = 2\arcsin a$ при всех действительных значениях a.

5.30*. Решить уравнение $\arccos x = \arcsin 2a$ при всех действительных значениях a.

§ 6. Тригонометрические неравенства

Решения простейших тригонометрических неравенств

Вид неравенства		Множество решений неравенства
$\sin x > a$	$(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (\arcsin a + 2\pi n;\ \pi - \arcsin a + 2\pi n)$
$\sin x < a$	$(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (-\pi - \arcsin a + 2\pi n;\ \arcsin a + 2\pi n)$
$\cos x > a$	$(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (-\arccos a + 2\pi n;\ \arccos a + 2\pi n)$
$\cos x < a$	$(\lvert a\rvert < 1)$	$x \in (\arccos a + 2\pi n;\ 2\pi - \arccos a + 2\pi n)$
$\operatorname{tg} x > a$		$x \in (\operatorname{arctg} a + \pi n;\ \pi/2 + \pi n)$
$\operatorname{tg} x < a$		$x \in (-\pi/2 + \pi n;\ \operatorname{arctg} a + \pi n)$
$\operatorname{ctg} x > a$		$x \in (\pi n;\ \operatorname{arcctg} a + \pi n)$
$\operatorname{ctg} x < a$		$x \in (\operatorname{arcctg} a + \pi n;\ \pi + \pi n)$

Решить неравенства:

6.1. $\sin x > -1/2$. **6.2.** $\operatorname{tg} x > 2$.

6.3. $\operatorname{ctg} x > -3$. **6.4.** $\sin(x-1) \leqslant -\sqrt{3}/2$.

6.5. $\sin x^2 \leqslant 1/2$. **6.6.** $\sin x + \cos x > -\sqrt{2}$.

6.7*. $\cos(\sin x) < 0$. **6.8.** $\sin(\cos x) \geqslant 0$.

Неравенства вида $R(y) > 0$, $R(y) < 0$, где R — некоторая рациональная функция, а y — одна из тригонометрических функций (синус, косинус, тангенс или котангенс), решаются в два этапа — сначала решается рациональное неравенство относительно неизвестного y, а потом — простейшее тригонометрическое неравенство.

Пример 6.1. Решить неравенство

$$2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0.$$

Решение. Обозначая $\sin x = y$, получаем неравенство

$$2y^2 - 7y + 3 > 0,$$

множество решений которого $y < 1/2$, $y > 3$. Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем, что данное неравенство эквивалентно двум неравенствам

$$\sin x < 1/2, \quad \sin x > 3.$$

Второе неравенство не имеет решений, а решение первого

$$x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \qquad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n, \ \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Решить неравенства:

6.9. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 1 < 0$.

6.10. $2\cos 2x + \sin 2x > \operatorname{tg} x$.

6.11. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x < -3$. **6.12.** $\sin 2x > \cos x$.

6.13. $\cos x + \sqrt{3}\cos x < 0$.

6.14. $\sqrt{3 - 4\cos^2 x} > 2\sin x + 1$.

6.15. $\sqrt{3\sin x + 1} > 4\sin x + 1$.

6.16. $\dfrac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{\sin x - 1} < 0$.

6.17. $5 + 2\cos 2x \leqslant 3\,|2\sin x - 1|$.

Решение неравенств разложением на множители.

Пример 6.2. Решить неравенство

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x > 0.$$

Решение. Преобразуя сумму крайних слагаемых в произведение, получаем неравенство

$$\cos 2x + 2\cos 2x \cos x > 0.$$

Вынося $\cos 2x$ за скобки, имеем

$$\cos 2x\,(2\cos x + 1) > 0,$$

Последнее неравенство эквивалентно двум системам простейших неравенств:

$$\begin{matrix} \cos 2x < 0, & \cos 2x > 0, \\ \cos x < -1/2; & \cos x > -1/2. \end{matrix}$$

Объединяя решение этих систем, получаем решение исходного неравенства.

Ответ. $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \ \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n; \ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right) \cup \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \ \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Решить неравенства:

6.18. $\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x > \sin 6x$.

6.19. $2\sin x \sin 2x \sin 3x < \sin 4x$.

6.20. $\sin x \sin 3x > \sin 5x \sin 7x$.

6.21. $\cos^3 x \sin 3x + \cos 3x \sin^3 x < 3/8$.

6.22. $\sin x \geqslant \cos 2x$.

6.23. $2\operatorname{tg} 2x \leqslant 3\operatorname{tg} x$. **6.24.** $\sin x < |\cos x|$.

§ 7. Неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции

Решение простейших неравенств

Вид неравенства		Решения неравенства
$\arcsin x > a$	$(\lvert a\rvert < \pi/2)$	$x \in (\sin a; 1]$
$\arcsin x < a$	$(\lvert a\rvert \leqslant \pi/2)$	$x \in [-1; \sin a)$
$\arccos x > a$	$(0 < a < \pi)$	$x \in [-1; \cos a)$
$\arccos x < a$	$(0 < a \leqslant \pi)$	$x \in (\cos a; 1]$
$\operatorname{arctg} x > a$	$(\lvert a\rvert < \pi/2)$	$x \in (\operatorname{tg} a; +\infty)$
$\operatorname{arctg} x < a$	$(\lvert a\rvert < \pi/2)$	$x \in (-\infty; \operatorname{tg} a)$
$\operatorname{arcctg} x > a$	$(0 < a < \pi)$	$x \in (-\infty; \operatorname{ctg} a)$
$\operatorname{arcctg} x < a$	$(0 < a < \pi)$	$x \in (\operatorname{ctg} a; +\infty)$

Решить неравенства:

7.1. $\arcsin x \leqslant 5$. **7.2.** $\arcsin x \geqslant -2$.

7.3. $\arccos x \leqslant \arccos \frac{1}{4}$. **7.4.** $\arccos x > \pi/6$.

7.5. $\operatorname{arctg} x > -\pi/3$. **7.6.** $\operatorname{arcctg} x > 2$.

Неравенства вида $R(y) > 0$, $R(y) < 0$, где R — некоторая рациональная функция, а y — одна из обратных тригонометрических функций (арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс), решаются в два этапа — сначала решается неравенство относительно неизвестного y, а потом — простейшее неравенство, содержащее обратную тригонометрическую функцию.

Пример 7.1. Решить неравенство

$$\operatorname{arcctg}^2 x - 5\operatorname{arcctg} x + 6 > 0.$$

Решение. Обозначая $\operatorname{arcctg} x = y$, исходное неравенство перепишем в виде неравенства

$$y^2 - 5y + 6 > 0,$$

решения которого $y < 2$ и $y > 3$. Возвращаясь к исходному неизвестному, получаем, что исходное неравенство сводится к двум простейшим неравенствам

$$\operatorname{arcctg} x < 2 \quad \text{и} \quad \operatorname{arcctg} x > 3,$$

решения которых соответственно равны $x \in (\operatorname{ctg} 2;\ \infty)$ и $x \in (-\infty;\ \operatorname{ctg} 3)$. Объединяя эти решения, получаем решение исходного неравенства.

Ответ. $(\operatorname{ctg} 2;\ \infty) \cup (-\infty;\ \operatorname{ctg} 3)$.

Решить неравенства:

7.7. $\operatorname{arctg}^2 x - 4\operatorname{arctg} x + 3 > 0$.

7.8. $\log_2(\operatorname{arctg} x) > 1$.

7.9. $2^{\operatorname{arctg} x} + 2^{-\operatorname{arctg} x} \geqslant 2$. **7.10.** $4(\arccos x)^2 - 1 \geqslant 0$.

Для того чтобы решить неравенства, связывающие значения различных обратных тригонометрических функций или значения одной тригонометрической функции, вычисленные от разных аргументов, удобно вычислить значение некоторой тригонометрической функции от обеих частей неравенства. Следует помнить, что получающееся при этом неравенство будет эквивалентно исходному лишь в том случае, когда множество значений правой и левой частей исходного неравенства принадлежит одному и тому же промежутку монотонности этой тригонометрической функции.

Пример 7.2. Решить неравенство

$$\arcsin x > \arccos x. \tag{*}$$

Решение. Множество допустимых значений x, входящих в неравенство, имеет вид $x \in [-1;\ 1]$. При $x < 0$ $\arcsin x < 0$, а $\arccos x > 0$. Следовательно, значения $x < 0$ не являются решениями неравенства. При $x \geqslant 0$ как правая, так и левая части неравенства имеют значения, принадлежащие промежутку $[0;\ \pi/2]$. Так как на промежутке $[0;\ \pi/2]$ функция синус монотонно возрастает, то при $x \in [0;\ 1]$ неравенство (*) эквивалентно неравенству

$$\sin(\arcsin x) > \sin(\arccos x) \Leftrightarrow x > \sqrt{1 - x^2}.$$

Последнее неравенство при рассматриваемых значениях неизвестного эквивалентно неравенству

$$2x^2 > 1. \tag{**}$$

Таким образом, решениями исходного неравенства будут те решения неравенства (**), которые попадут в промежуток $[0;\ 1]$.

Ответ: $x \in (\sqrt{2}/2;\ 1]$.

Решить неравенства:

7.11. $\arcsin x < \arccos x$.

7.12. $\arccos x > \arccos x^2$.

7.13. $\operatorname{arctg} x > \operatorname{arcctg} x$.

7.14. $\arcsin x < \arcsin(1 - x)$.

7.15. $\operatorname{tg}^2(\arcsin x) > 1$.

§ 8. Доказательство тригонометрических неравенств

Доказательство неравенств, связывающих значения тригонометрических функций на всей числовой оси или на некотором ее промежутке, обычно основано на исследовании свойств функций: монотонности, ограниченности и т. д.

Пример 8.1. Доказать, что если $\alpha, \beta \in (-\pi/2;\ \pi/2)$, то

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}.$$

Решение. Для доказательства данного неравенства достаточно представить правую часть неравенства в виде

$$\frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и учесть, что при $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\alpha-\beta}{2} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, и следовательно, $0 < \cos\frac{\alpha-\beta}{2} < 1$.

Доказать, что для $x \in [0;\ \pi/2]$ выполняются следующие неравенства:

8.1. $\sin x \cos x \leqslant 1/2$. **8.2.** $\sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$.

8.3. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2$. **8.4.** $\operatorname{tg} x \geqslant \sin x$.

8.5. $\sin 2x \leqslant 2\sin x$. **8.6.** $\sqrt{\cos x} \leqslant \sqrt{2}\cos\frac{x}{2}$.

8.7. Доказать, что если $\alpha, \beta \in [0; \pi]$, то
$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \geqslant \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}.$$

Доказать, что при любом действительном x справедливы соотношения:

8.8*. $|a\cos x + b\sin x| \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

8.9.**
$$\frac{a+c-\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}}{2} \leqslant a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x \leqslant \frac{a+c+\sqrt{a^2+b^2+c^2-2ac}}{2}.$$

Часто при доказательстве справедливости тригонометрических неравенств используются неравенства, устанавливающие связь между средним геометрическим и средним арифметическим двух или нескольких положительных чисел.

Пример 8.2. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $\alpha, \beta, \gamma > 0$, то
$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant 6. \qquad (*)$$

Решение. Так как $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\sin\frac{\beta}{2}$, $\sin\frac{\gamma}{2}$ неотрицательны, то, используя неравенство, связывающее среднее арифметическое трех чисел и их среднее геометрическое, имеем
$$\frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\sin\frac{\gamma}{2}} \geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}}. \qquad (**)$$

Преобразуем теперь подкоренное выражение:
$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right].$$

Так как $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то
$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \sin\frac{\alpha}{2}, \qquad \cos\frac{\beta-\gamma}{2} < 1,$$
и, следовательно,
$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Наибольшее значение функции, стоящей в правой части неравенства $f(y) = \frac{1}{2}y(1-y)$ $\left(y = \sin\frac{\alpha}{2}\right)$, на промежутке [0; 1] равно 1/4. Следовательно,
$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{1}{8}.$$

Из последнего неравенства получаем неравенство
$$\frac{3}{\sqrt[3]{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}} \geqslant 6. \qquad (***)$$

Из неравенств (**) и (***) следует справедливость исходного неравенства.

8.10*. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $\alpha, \beta, \gamma > 0$, то
$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \leqslant 1/8.$$

8.11*. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi/2)$, то
$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\cos\gamma} \geqslant 6.$$

8.12*. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и $\alpha, \beta, \gamma \in (0; \pi/2)$, то
$$\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma \geqslant 9.$$

8.13. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то
$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \leqslant \frac{3}{8}\sqrt{3}.$$

8.14.** Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то
$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{3}{4}.$$

8.15. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant 3/2.$$

В примере 8.2 требовалось найти наибольшее значение функции $\frac{1}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. После замены переменной искомое значение совпадало с наибольшим значением функции $f(y) = \frac{1}{2}y(1-y)$ на промежутке [0; 1]. Аналогичный прием часто используется в тех случаях, когда требуется найти множества значений некоторых сложных тригонометрических выражений.

8.16. Доказать, что
$$-4 \leqslant \cos 2x + 3\sin x \leqslant 2\frac{1}{8}.$$

8.17. Доказать, что

$$\cos^3 x + \cos^6 x \leqslant 1/4.$$

8.18. Доказать, что если $|p| < 2$, то

$$\sin^2 x + p \sin x + q \geqslant \frac{-p^2 - 4q}{4}.$$

8.19. Доказать, что $\sin^2 x \cos^2 x \leqslant 1/4$.

Доказательство неравенств, связывающих тригонометрические функции и некоторые многочлены, рассмотренные на интервалах изменения аргументов, проводится с использованием комбинации рассмотренных выше приемов. При этом часто используется неравенство

$$\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x, \qquad (1)$$

справедливое для всех $x \in [0; \pi/2]$.

Пример 8.3. Доказать, что на промежутке $(0; \pi)$ имеет место неравенство

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x.$$

Решение. Представим функцию $\sin x$ в виде

$$\sin x = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right).$$

Используя неравенство (1), имеем

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} \geqslant \frac{x}{2}, \quad 1 - \sin^2 \frac{x}{2} \geqslant 1 - \frac{x^2}{4}.$$

Подставляя полученные оценки в правую часть исходного неравенства, убеждаемся в его справедливости.

8.20*. Доказать, что на промежутке $(0; \pi)$ справедливо неравенство

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

8.21*. Доказать, что на промежутке $(0; \pi/2)$ справедливо неравенство

$$x - \frac{x^3}{2} < \operatorname{tg} x.$$

8.22*. Доказать, что

$$1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

ГЛАВА 6
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Запись числа z в виде $a + bi$, где a и b — действительные числа, называется *алгебраической формой комплексного числа*. Число a называется *действительной частью* комплексного числа и обозначается $\operatorname{Re} z$, число b — *мнимой частью* комплексного числа и обозначается $\operatorname{Im} z$. Символ i называется *мнимой единицей*.

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ *равны*, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Комплексное число $-a - bi$ называется *противоположным* комплексному числу $a + bi$.

Правила действий с комплексными числами. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ — два комплексных числа. *Сумма* $z_1 + z_2$, *разность* $z_1 - z_2$, *произведение* $z_1 \cdot z_2$ и *частное* $\frac{z_1}{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$ комплексных чисел z_1 и z_2 вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i, \\ z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i, \\ z_1 \cdot z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 b_2 + a_2 b_1}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i. \end{aligned} \qquad (1)$$

Сложение и умножение комплексных чисел коммутативно и ассоциативно, умножение дистрибутивно относительно сложения.

Комплексное число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ и обозначается $\bar{z}$. Свойство комплексно сопряженных чисел: $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$.

Пусть $z = a + bi$ — отличное от нуля (т. е. $a^2 + b^2 \neq 0$) комплексное число. *Модулем* комплексного числа (обозначается $|z|$ или r) называется величина $\sqrt{a^2 + b^2}$ *Аргументом* комплексного числа z называется угол φ, определяемый из условий

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(обозначается $\operatorname{Arg} z$ или φ). *Главным значением аргумента* комплексного числа z (обозначается $\arg z$) называется значение φ, принадлежащее промежутку $(-\pi; \pi]$.

Запись комплексного числа $z = a + bi$ в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

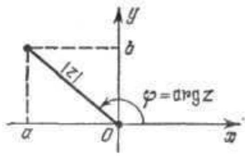


Рис. 6.1

где φ—аргумент называется *тригонометрической* формой комплексного числа.

Геометрически модуль комплексного числа может быть изображен как отрезок (радиус-вектор) длины r, имеющий своими концами точки $(0; 0)$ и $(a; b)$; аргумент комплексного числа — как угол, который образует радиус-вектор с положительным направлением оси Ox (рис. 6.1).

Два комплексных числа, записанные в тригонометрической форме, *равны* тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы отличаются на $2\pi k$ $(k \in Z)$.

Произведением и частным двух отличных от нуля комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$, записанных в тригонометрической форме, являются числа

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

n-я степень комплексного числа $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ вычисляется по *формуле Муавра*

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi). \qquad (2)$$

Корнем n-й степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее уравнению

$$w^n=z.$$

Все решения этого уравнения обозначаются $\sqrt[n]{z}$ и для числа z, записанного в тригонометрической форме $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, вычисляются по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (3)$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, n-1$.

§ 1. Действия с комплексными числами

Действия с комплексными числами проводятся по формулам (1). При вычислении произведения и частного комплексных чисел удобно использовать представления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пример 1.1. Представить в тригонометрической форме комплексное число $z=-3+i$.

Решение. По определению модуля комплексного числа имеем

$$|z|=\sqrt{(-3)^2+1}=\sqrt{10}.$$

Обозначая аргумент комплексного числа через φ, получаем

$$\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}, \qquad \cos\varphi=-\frac{3}{\sqrt{10}},$$

откуда следует, что угол φ принадлежит второй четверти и равен $\arccos(-3/\sqrt{10})$. Следовательно, комплексное число $z=-3+i$ имеет тригонометрическую форму:

$$z=\sqrt{10}\left[\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)+i\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right)\right].$$

Предстввить в тригонометрической форме комплексные числа:

1.1. 1. **1.2.** -3. **1.3.** i.

1.4. $1+i$. **1.5.** $-1+i$. **1.6.** $1+i\sqrt{3}$.

1.7. $3-4i$. **1.8.** $-3-4i$.

1.9. $-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. **1.10.** $\sin\alpha-i\cos\alpha$.

1.11. $\left(\frac{1}{i-1}\right)^{100}$.

Вычисление корней k-й степени из комплексного числа обычно производится с помощью представления комплексных чисел в тригонометрической форме.

Пример 1.2. Вычислить $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Запишем комплексное число $i=0+1\cdot i$ в тригонометрической форме. Так как $|i|=1$, $\arg i=\pi/2$, то число i имеет тригонометрическую форму

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}.$$

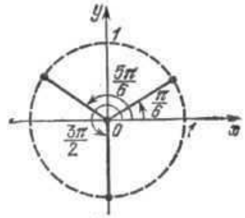


Рис. 6.2

Отсюда согласно (3) получаем

$$r=\sqrt[3]{1}=1, \qquad \varphi=\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3}$$

при $k=0$, $k=1$, $k=2$, и, следовательно, искомые корни имеют вид

$$\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\cdot\frac{1}{2},$$

$$\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i.$$

Геометрические образы полученных корней представляют собой точки, лежащие на единичной окружности (так как $r=1$), радиусы-векторы которых составляют углы $\pi/6$, $5\pi/6$ и $3\pi/2$ с положительным направлением оси Ox (рис. 6.2).

Вычислить, используя тригонометрическую форму комплексных чисел:

1.12. $\sqrt{2i}$. **1.13.** $\sqrt{-8i}$. **1.14.** $\sqrt{3-4i}$.

1.15. $\sqrt[4]{-1}$. **1.16.** $\sqrt[4]{2-2i\sqrt{3}}$. **1.17.** $\sqrt[4]{i}$.

1.18. $\sqrt[7]{3+4i}$. **1.19.** $\sqrt[3]{1}$.

§ 2. Геометрическое изображение множества комплексных чисел

Для геометрического изображения комплексных чисел в системе координат Oxy, удовлетворяющих некоторым соотношениям, обычно используется алгебраическая форма комплексного числа.

Пример 2.1. Найти множество точек координатной плоскости Oxy, изображающих комплексные числа z, для которых $|z+i-2| \leqslant 2$.

Решение. Запишем комплексное число z в алгебраической форме $z = x + iy$. Тогда

$$z + i - 2 = (x-2) + i(y+1).$$

По определению модуля комплексного числа

$$|z+i-2| = \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2},$$

вследствие чего равенство $|z+i-2| \leqslant 2$ принимает вид

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} \leqslant 2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+1)^2 \leqslant 2^2.$$

Множество точек координатной плоскости Oxy, удовлетворяющих последнему неравенству, представляет собой множество всех точек, лежащих внутри окружности и на окружности радиуса 2 с центром в точке $(2; -1)$.

Пример 2.2. Найти множество точек координатной плоскости Oxy, для которых действительная часть комплексного числа $(1+i)z^2$ положительна.

Решение. Представим число z в алгебраической форме $z = x + iy$. Тогда

$$z^2 = x^2 - y^2 + i(2xy),$$

$$(1+i)z^2 = (1+i)[x^2-y^2+i(2xy)] = (x^2-2xy-y^2) + i(x^2+2xy-y^2).$$

По условию задачи действительная часть комплексного числа $(1+i)z^2$ положительна:

$$x^2 - 2xy - y^2 > 0. \qquad (*)$$

Предполагая, что $y \neq 0$, и разделив обе части неравенства на y^2, получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y}\right) - 1 > 0.$$

Решая это квадратное неравенство, получаем

$$x/y > 1+\sqrt{2}, \quad x/y < 1-\sqrt{2}. \qquad (**)$$

При $y > 0$ неравенства $(**)$ можно записать в виде

$$y < \frac{1}{1+\sqrt{2}}x, \quad y < \frac{1}{1-\sqrt{2}}x.$$

Множество точек плоскости Oxy, удовлетворяющих этим условиям, отмечено штриховкой на рис. 6.3.

При $y < 0$ неравенства $(**)$ записываются в виде

$$y > \frac{1}{1+\sqrt{2}}x, \quad y > \frac{1}{1-\sqrt{2}}x,$$

и множество точек координатной плоскости Oxy, удовлетворяющих этим неравенствам, отмечено штриховкой на рис. 6.4.

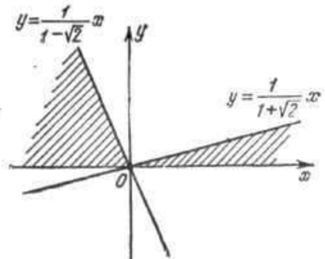


Рис. 6.3

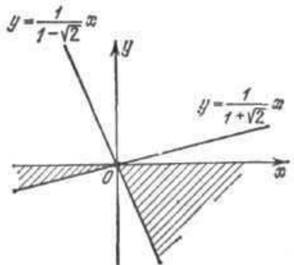


Рис. 6.4

При $y = 0$ нельзя делить обе части неравенства $(*)$ на y^2, но при $y = 0$ само неравенство $(*)$ превращается в неравенство $x^2 > 0$, решением которого является любое действительное число x, отличное от нуля, т. е. решением неравенства $(*)$ является любая точка оси Ox, за исключением нуля.

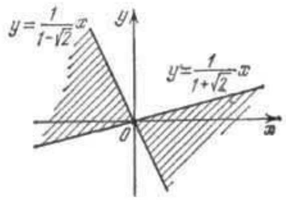


Рис. 6.5

Объединяя все три случая, окончательно получаем: искомым множеством являются углы, содержащие ось Ox, без своих границ, стороны которых — прямые $y = \frac{1}{1+\sqrt{2}}x$ и $y = \frac{1}{1-\sqrt{2}}x$ (рис. 6.5).

Найти множество точек координатной плоскости Oxy, изображающих комплексные числа $z = x + iy$, для которых:

2.1. $|z| = 1$.
2.2. $z = |z|$.
2.3. $\arg z = \pi/3$.
2.4. $1 < |z| < 4$.
2.5. $|2z-1| > 2$.
2.6. $||z| + i| < 10$.

2.7. $|z+1|=|z-1|$. **2.8.** $|z+i|=|z+2|$.
2.9. $|z+i|>|z|$. **2.10.** $1\leqslant|z+i|\leqslant 4$.
2.11. $(1-i)\bar{z}=(1+i)z$.

2.12. На координатной плоскости Opq изобразить множество точек (p, q) таких, что корни уравнения

$$x^2+px+q=0$$

(возможно, комплексные) по модулю не превосходят единицы.

2.13. Указать все точки комплексной плоскости, такие, что: 1) $z\alpha$, 2) $z+\alpha$ — действительные числа ($\alpha=a+bi$ — заданное комплексное число).

2.14. Найти множество точек координатной плоскости Oxy, удовлетворяющих неравенству

$$\log_{1/2}\frac{|z-1|+4}{3|z-1|-2}>1.$$

2.15. Найти на плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют следующему условию: число z^2+z+1 — действительное положительное число.

2.16. Изобразить на плоскости все комплексные числа z, для которых $(1+i)z$ действительно.

2.17. Точки z_1, z_2, z_3 — вершины треугольника. Какое комплексное число соответствует центру тяжести этого треугольника?

2.18. Точки z_1, z_2, z_3 — три вершины параллелограмма. Найти четвертую вершину.

2.19*. Доказать, что три различные точки z_1, z_2, z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $\dfrac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$ — действительное число.

2.20. При каких z_1 и z_2 справедливо равенство

$$|z_1+z_2|=|z_1-z_2|\,?$$

2.21. Доказать, что четырехугольник, сумма квадратов длин сторон которого равна сумме квадратов длин его диагоналей, — параллелограмм.

§ 3. Решение уравнений в множестве комплексных чисел

Решение уравнений в множестве комплексных чисел сводится к решению систем уравнений в множестве действительных чисел, полученных в результате сравнения действительных и мнимых частей выражений, стоящих в левой и правой частях исходного уравнения.

Пример 3.1. Решить в комплексных числах уравнение

$$2z=|z|+2i.$$

Решение. Запишем комплексное число z в алгебраической форме: $z=x+iy$, где x, y — действительные числа. Тогда $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ и данное уравнение принимает вид

$$2x+2iy=\sqrt{x^2+y^2}+2i.$$

Из определения равенства двух комплексных чисел получаем систему уравнений для нахождения x и y:

$$2x-\sqrt{x^2+y^2}=0,$$
$$2y-2=0.$$

Из второго уравнения находим $y=1$. Подставляя $y=1$ в первое уравнение системы, получаем уравнение $2x=\sqrt{x^2+1}$, решение которого $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Итак, решением данного уравнения является комплексное число $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+i$.

Ответ. $z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}+i$.

Пример 3.2. Для каждого действительного числа $a>0$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие равенству

$$z|z|+az+i=0.$$

Решение. Запишем комплексное число z в алгебраической форме: $z=x+iy$. Тогда $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ и уравнение примет вид

$$(x+iy)\sqrt{x^2+y^2}+a(x+iy)+i=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x\sqrt{x^2+y^2}+ax)+i(y\sqrt{x^2+y^2}+ay+1)=0+0\cdot i.$$

Из определения равенства двух комплексных чисел следует, что последнее уравнение эквивалентно системе двух уравнений

$$\begin{aligned} x\sqrt{x^2+y^2}+ax&=0,\\ y\sqrt{x^2+y^2}+ay+1&=0, \end{aligned}\qquad (*)$$

решения которой отыскиваются уже в множестве действительных чисел.

Нетрудно заметить, что множество решений первого уравнения системы (*) может быть найдено как объединение множеств решений двух уравнений:

$$x=0,\quad \sqrt{x^2+y^2}+a=0.$$

Второе из этих уравнений решений не имеет в силу условия $a > 0$. Подставляя $x = 0$ во второе уравнение системы (*), получаем уравнение для действительного числа y

$$y\,|\,y\,| + ay + 1 = 0,$$

множество решений которого получается как объединение множеств решений двух систем:

$$\begin{array}{cc} y \geqslant 0, & y < 0, \\ y^2 + ay + 1 = 0; & -y^2 + ay + 1 = 0. \end{array}$$

Нетрудно убедиться в том, что с учетом условия $a > 0$ первая система решений не имеет, а вторая имеет единственное решение: $y = \dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$. Таким образом, решением данного уравнения является чисто мнимое число

$$z = i\,\frac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}.$$

Ответ: $z = i\,\dfrac{a - \sqrt{a^2+4}}{2}$.

Решить уравнения:

3.1. $(2+i)z^2 - (5-i)z + 2 - 2i = 0$.

3.2. $z^2 + \bar{z} = 0$. **3.3.** $|z| - iz = 1 - 2i$. **3.4.** $z^2 = (\bar{z})^3$.

3.5. $(x+y)^2 + 6 + ix = 5(x+y) + i(y+1)$ (x, y — действительные числа).

3.6. При каких действительных значениях x и y справедливо равенство

$$\frac{x - 2 + (y-3)i}{1+i} = 1 - 3i?$$

3.7. Доказать, что уравнение $z^3 + iz - 1 = 0$ не имеет действительных решений.

3.8. Вычислить $z^{14} + 1/z^{14}$, если z есть корень уравнения

$$z + 1/z = 1.$$

3.10. Решить в комплексных числах системы:

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0.$$

3.10. Решить в комплексных числах системы:

а) $z^5 w^7 = 1,$ $z^2 - \bar{w}^3 = 0;$

б) $z^{13} w^{19} = 1,$ $z^5 w^7 = 1,$ $z^2 + w^2 = -2.$

3.11. Какому условию должно удовлетворять комплексное число $a + bi$ для того, чтобы его можно было представить в виде

$$a + bi = \frac{1 - ix}{1 + ix},$$

где x — действительное число?

3.12. Среди комплексных чисел z найти все те, для которых

$$\log_{14}(13 + |z^2 - 4i|) + \log_{196}\frac{1}{(13 + |z^2 + 4i|)^2} = 0.$$

3.13. Для каждого действительного числа $a \geqslant 1$ найти все комплексные числа z, удовлетворяющие уравнению

$$z + a\,|z + 1| + i = 0.$$

3.14*. При каких действительных значениях параметра a хотя бы одно комплексное число $z = x + iy$, удовлетворяющее равенству

$$|z + \sqrt{2}| = a^2 - 3a + 2,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству

$$|z + i\sqrt{2}| < a^2?$$

3.15. При каких действительных значениях параметра a хотя бы одно комплексное число $z = x + iy$, удовлетворяющее равенству

$$|z - ai| = a + 4,$$

удовлетворяет одновременно и неравенству

$$|z - 2| < 1?$$

3.16. Найти минимальное по модулю комплексное число z, удовлетворяющее условию

$$|z - 2 + 2i| = 1.$$

§ 4. Применение комплексных чисел для решения некоторых задач

Использование тригонометрической формы комплексного числа и представление этого числа точкой комплексной плоскости допускает простое решение некоторых систем тригонометрических уравнений.

Пример 4.1. Решить систему

$$\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\cos x + \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Умножим первое уравнение системы на i и сложим со вторым. Получаем уравнение

$$\cos x + i\sin x + \cos y + i\sin y = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Обозначим $\cos x + i\sin x = z$, $\cos y + i\sin y = w$, $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2} = u$. Тогда получаем уравнение для комплексных чисел

$$z + w = u,$$

где $|z| = |w| = |u| = 1$, т.е. все три точки лежат на окружности единичного радиуса и, следовательно, четырехугольник с вершинами z, u, w, O — ромб с диагональю Ou, длина которой равна единице (см. рис. 6.6). Таким образом, треугольники Ozu и Ouw — равносторонние и углы uOw и zOu равны $\frac{\pi}{3}$. Так как $\operatorname{Arg} u = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, то из рис. 6.6 видно, что если $x = \operatorname{Arg} z$ и $y = \operatorname{Arg} w$, то $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $y = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + 2\pi n$, т. е. $x = \frac{7}{12}\pi + 2\pi k$, $y = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n$.

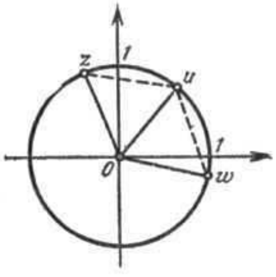


Рис. 6.6

Ответ. $\left(\frac{7}{12}\pi + 2\pi k,\quad -\frac{\pi}{12} + 2\pi n\right)$; $\left(-\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \frac{7\pi}{12} + 2\pi k\right)$.

Решить системы уравнений:

4.1. $\sin x + \sin y = \sin\alpha$, $\cos x + \cos y = \cos\alpha$.

4.2. $2\sin x\cos y = \sin\alpha$, $2\cos x\cos y = \cos\alpha$.

4.3. $\sin x + \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x + \cos y = \frac{1}{2}$.

4.4. $\sin x - \sin y = \sin\alpha$, $\cos x - \cos y = \cos\alpha$.

Для пары любых комплексных чисел $z = a + bi$ и $w = c + di$ справедлива формула

$$|w\cdot z| = |w|\cdot|z|, \tag{1}$$

которая имеет следующий вид:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2. \tag{2}$$

Используя формулу (1), можно находить целочисленные решения уравнений вида

$$x^2 + y^2 = n,$$

где n — натуральное число.

Пример 4.2. Найти хотя бы одно целочисленное решение уравнения

$$x^2 + y^2 = 21\,125. \tag{*}$$

Решение. Разложим 21 125 на простые множители. Имеем

$$21\,125 = 5^3\cdot 13^2.$$

Числа 5 и 13 являются суммой двух полных квадратов целых чисел $5 = 4 + 1$, $13 = 9 + 4$. Используя формулу (1), можно записать, например,

$$|(2+i)(2+i)(2+i)\cdot(3+2i)(3+2i)|^2 = 21\,125.$$

Перемножая комплексные числа, стоящие под знаком модуля, получаем

$$|79i - 122|^2 = 21\,125.$$

Таким образом, одним из решений исходного уравнения являются числа $x = 122$, $y = 79$.

Очевидно, изменяя комплексные числа, квадраты модулей которых равны 5 и 13, можно получать другие целочисленные решения уравнения (*).

Найти хотя бы одно решение в натуральных числах следующих уравнений:

4.5. $x^2 + y^2 = 32\,045$.

4.6. $x^2 + y^2 = 84\,500$.

4.7. На окружности радиуса $5\sqrt{3}$ найти хотя бы одну точку с целыми положительными координатами.

Тригонометрическая форма записи комплексного числа и связанная с ней формула Муавра в некоторых случаях используются для вывода различных тригонометрических формул.

Пример 4.3. Выразить $\sin 4x$ и $\cos 4x$ в виде некоторой функции от $\sin x$ и $\cos x$.

Решение. Воспользовавшись формулой Муавра, запишем

$$(\cos x + i\sin x)^4 = \cos 4x + i\sin 4x. \tag{*}$$

Расписывая левую часть уравнения (*) по формуле бинома Ньютона, имеем

$$(\cos x + i\sin x)^4 =$$
$$= \cos 4x + 4i\cos^3 x\sin x - 6\cos^2 x\sin^2 x - 4i\cos x\sin^3 x + \sin^4 x.$$

Пользуясь условием равенства двух комплексных чисел, получаем

$$\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x,$$
$$\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x.$$

Ответ. $\cos 4x = \cos^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x$, $\sin 4x = 4\cos^3 x \sin x - 4\cos x \sin^3 x$.

4.8. Представить $\sin 3x$ в виде функции от $\sin x$ и $\cos x$.

4.9*. Вычислить суммы

$$S_1 = \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos n\varphi,$$
$$S_2 = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi, \qquad n \in \mathbf{N}.$$

4.10. Доказать, что $\cos n\alpha$ может быть представлен как многочлен с целыми коэффициентами от $\cos\alpha$.

4.11*. Доказать, что $\cos 31°$ — число иррациональное.

4.12. Вычислить сумму

$$\sin x + a\sin 2x + \ldots + a^{n-1}\sin nx.$$

41.3*. Вычислить сумму

$$C_n^1 \sin x + C_n^2 \sin 2x + \ldots + C_n^n \sin nx,$$

где C_n^i — число сочетаний из n по i.

4.14. Выразить $\operatorname{tg} 5\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$.

ГЛАВА 7

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Определение и свойства последовательности

Множество чисел, занумерованных либо конечным отрезком натурального ряда, либо всеми натуральными числами, называют *числовой последовательностью.*

В первом случае последовательность называется *конечной*, во втором — *бесконечной.*

Элементы этого числового множества называются *членами* последовательности и обычно обозначаются так: первый член a_1, второй a_2, ..., n-й — a_n и т. д. Вся числовая последовательность обозначается

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \text{ или } (a_n)\ ^{*)}.$$

Понятие последовательности может быть введено и с помощью понятия функции: *бесконечной числовой последовательностью* (x_n) называется числовая функция $f(n)$, определенная на множестве всех натуральных чисел. Формула, позволяющая вычислить любой член последовательности по его номеру n, называется *формулой общего члена* последовательности.

Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если существуют такие два числа m и M, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется двойное **) неравенство

$$m \leqslant x_n \leqslant M. \tag{1}$$

Последовательность (x_n) называется *ограниченной сверху* (*снизу*), если существует такое число M, что для всех $n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство

$$x_n \leqslant M \qquad (x_n \geqslant M). \tag{2}$$

Последовательность (x_n) называется *монотонно возрастающей*, если для любого натурального n выполнено неравенство

$$x_{n+1} > x_n, \tag{3}$$

и *монотонно убывающей*, если для любого натурального n выполнено неравенство

$$x_{n+1} < x_n. \tag{4}$$

Последовательность (x_n) называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если неравенство (3) (соответственно (4)) нестрогое.

*) Числовые последовательности будем также обозначать (y_n), (z_n), $n \in \mathbf{N}$.

**) Слово «двойное» для краткости далее опускаем.

Возрастающие, убывающие, невозрастающие, неубывающие последовательности называются *монотонными* последовательностями. Можно обобщить определение монотонности и на те последовательности, которые обладают этим свойством, лишь начиная с некоторого члена. В этом случае соответствующее неравенство должно выполняться для всех $n > n_0$, где n_0 — номер члена, начиная с которого последовательность становится монотонной.

Пример 1.1. Доказать, что последовательность, задаваемая формулой общего члена

$$x_n = \frac{3n-1}{5n+2},$$

возрастающая.

Решение. Рассмотрим разность

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+2} - \frac{3n-1}{5n+2}$$

и проверим выполнение неравенства $x_{n+1} - x_n > 0$ для всех $n \in \mathbf{N}$:

$$\frac{3(n+1)-1}{5(n+1)+2} - \frac{3n-1}{5n+2} > 0, \text{ или } \frac{11}{(5n+7)(5n+2)} > 0.$$

Так как последнее неравенство справедливо при всех $n \in \mathbf{N}$, то согласно (3) данная последовательность — возрастающая.

1.1. Доказать, что последовательность

$$y_n = \frac{6-n}{5n-1}$$

является убывающей.

1.2. Является ли монотонной последовательность

$$y_n = \frac{2n-3}{n}\ ?$$

1.3*. Является ли монотонной последовательность

$$y_n = \frac{2^n}{n!}\ ?$$

1.4. Найти, при каких соотношениях между a, b, c, d последовательность

$$y_n = \frac{an+b}{cn+d}$$

будет возрастающей.

Пример 1.2. Найти наибольший член последовательности

$$y_n = -n^2 + 5n - 6.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$y(x) = -x^2 + 5x - 6.$$

Наибольшее значение она принимает в точке $x = 2{,}5$, причем на промежутке $(-\infty;\ 2{,}5)$ функция $y(x)$ возрастает, а на промежутке $(2{,}5;\ \infty)$ — убывает. Следовательно, возвращаясь к последовательности, можно записать

$$y_1 < y_2 \text{ и } y_3 > y_4.$$

Таким образом, наибольшим будет либо y_2, либо y_3, но $y_2 = y_3 = 0$.

Ответ. Наибольшими являются второй и третий члены последовательности.

Найти наибольшие и наименьшие члены последовательности:

1.5. $y_n = n^2 - 1$.

1.6. $y_n = 6n - n^2 - 5$.

1.7*. $x_n = 2n + \dfrac{512}{n^2}$.

1.8. Последовательность (x_n) задана формулой общего члена $x_n = \dfrac{2n-3}{n}$. При каких натуральных значениях n выполняются условия:

а) $|x_n - 2| < 0{,}1$; б) $|x_n - 2| < 0{,}01$?

1.9*. Сколько членов последовательности

$$y_n = |n^2 - 5n + 6|$$

удовлетворяет неравенству $2 < y_n < 6$?

1.10*. Начиная с какого номера члены последовательности

$$y_n = n^2 - 5n + 6$$

удовлетворяют неравенству $x_{n+1} > x_n$?

1.11*. Начиная с какого номера n последовательность, задаваемая формулой общего члена $y_n = nq^n$, будет монотонна, если $0 < q < 1$?

Если последовательность задана формулой общего члена $x_n = f(n)$, то ограниченность последовательности сверху и снизу может быть выведена из ограниченности функции $f(x)$ для $x \in [1;\ \infty)$.

Пример 1.3. Будет ли ограничена последовательность

$$x_n = \frac{3n+8}{2n}?$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{3x+8}{2x},$$

которая при $x = n$ определяет члены данной последовательности. Найдем множество значений функции на промежутке $[1;\ \infty)$.

Записывая функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = 3/2 + 4/x, \qquad (*)$$

убеждаемся, что при $x \geqslant 1$ эта функция монотонно убывает. Следовательно, наибольшее значение функция имеет при $x = 1$, и оно равно 11/2. Из записи (*) видно, что при всех $x \in [1;\ \infty)$

$$f(x) > 3/2.$$

Следовательно, $f(n) \in (3/2;\ 11/2]$.

Ответ. Последовательность ограничена: все ее члены заключены в промежутке $(3/2;\ 11/2]$.

Выяснить, будут ли следующие последовательности ограничены:

1.12. $x_n = 2^{(-1)^n}$.

1.13. $x_n = \dfrac{3+n^2}{2+n^2}$. **1.14*.** $x_n = \dfrac{1}{n^2-2n+3}$.

1.15*. $x_n = \left(\dfrac{1}{(n+1)!} - \dfrac{1}{(n+2)!}\right)(n+2)$.

§ 2. Предел последовательности

Говорят, что число a является *пределом* бесконечной числовой последовательности (x_n), и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер $n_0(\varepsilon)$, что при всех $n > n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Если последовательность (x_n) имеет предел, то она называется *сходящейся*.

Необходимое условие сходимости числовой последовательности: для того чтобы последовательность сходилась, необходимо, чтобы она была ограниченной.

Пример 2.1. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Решение. Для того чтобы доказать, что предел последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{n}$ равен единице, достаточно указать способ построения для любого $\varepsilon > 0$ числа $n_0(\varepsilon)$, входящего в определение предела. Зададим $\varepsilon > 0$ и составим неравенство

$$\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon, \qquad (*)$$

которое эквивалентно неравенству $1/n < \varepsilon$. Следовательно, если в качестве числа $n_0(\varepsilon)$ выбрать число $[1/\varepsilon] + 1$ *), то для всех $n > n_0(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство (*). Таким образом, доказано утверждение о том, что единица является пределом последовательности $x_n = \dfrac{n+1}{n}$.

Доказать, что:

2.1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n-2}{2n} = 1{,}5$. **2.2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1} = 0$.

2.3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n-3}{6n+2} = \dfrac{5}{6}$. **2.4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{6n-1}{1/2-n} = -6$.

2.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n^2+1} = 0$. **2.6.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{n^2+n} = 1$.

Для решения некоторых задач на доказательство сходимости последовательности удобно пользоваться следующей геометрической интерпретацией понятия предела последовательности.

Число a является *пределом* последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε существует такой номер $n = n_0(\varepsilon)$, что все члены последовательности, начиная с x_{n_0+1}, принадлежат ε-окрестности числа a, т. е. промежутку $(a-\varepsilon;\ a+\varepsilon)$.

Используя приведенную выше геометрическую интерпретацию, убедиться в справедливости следующих утверждений:

2.7*. Если последовательность сходится к некоторому числу, то она ограничена. (*Необходимое условие сходимости.*)

2.8*. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $a < q$. Доказать, что почти все члены последовательности (x_n) (за исключением, быть может, конечного числа членов) меньше q.

2.9*. Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = p$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = q$, $p \neq q$. Существует ли предел последовательности $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$?

2.10. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + (-1)^n$$

предела не имеет.

2.11*. Выяснить, имеет ли предел последовательность

$$x_n = \sin n\frac{\pi}{2}.$$

---

*) Символом $[z]$ обозначается целая часть z.

2.12*. Выяснить, имеет ли предел последовательность

$$x_n=\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2}.$$

2.13. Выяснить, имеют ли предел последовательности:

а) $x_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$; б) $x_n=\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)\sin n\frac{\pi}{2}$.

§ 3. Вычисление пределов последовательностей

Свойства сходящихся последовательностей. Если две последовательности (x_n) и (y_n) сходятся к $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, то:

1) последовательность $(x_n\pm y_n)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\pm\lim_{n\to\infty}y_n; \tag{1}$$

2) последовательность (x_ny_n) сходится и

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=(\lim_{n\to\infty}x_n)(\lim_{n\to\infty}y_n); \tag{2}$$

3) последовательность $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ (если дополнительно $y_n\neq 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n\neq 0$) сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}. \tag{3}$$

Обычно при вычислении пределов непосредственному применению формул (1)—(3) предшествуют некоторые тождественные преобразования. При вычислении пределов вида

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n},$$

где x_n и y_n — неограниченно возрастающие последовательности, таким преобразованием является деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же выражение.

Пример 3.1. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{7-9n}.$$

Решение. Так как числитель и знаменатель представляют собой неограниченные последовательности, то непосредственно воспользоваться формулой (3) нельзя. Разделим числитель и знаменатель на n. К полученной дроби уже можно применить формулу (3):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5+1/n}{7/n-9}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5+1/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(7/n-9)}.$$

Применяя далее формулу (1), получаем

$$\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(5+1/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(7/n-9)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}(1/n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(7/n)-\lim\limits_{n\to\infty}9}.$$

Учитывая, что предел постоянной равен этой постоянной, а

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

окончательно получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+1}{7-9n}=-\frac{5}{9}.$$

Ответ. $-5/9$.

С помощью деления числителя и знаменателя дроби на старшую степень n вычислить следующие пределы:

3.1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2-7n+1}{2-5n-6n^2}$. **3.2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$.

3.3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$. **3.4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[4]{n^5+2}-\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[5]{n^4+2}+\sqrt{n^3+1}}$.

Вычисление пределов выражений, содержащих показательные функции с натуральным аргументом, может быть основано на следующем равенстве:

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,\quad\text{если}\quad |q|<1. \tag{4}$$

Пример 3.2. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на 3^{n+1}. Применяя формулу (4), получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\frac{1}{3}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{3}}=\frac{0+1}{\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}}=3.$$

Ответ. 3.

Вычислить пределы:

3.5. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$.

3.6*. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3\cdot 2^{n+1}-7\cdot 3^n+1}{2^{n+1}-5\cdot 3^{n+1}+6}$.

При вычислении пределов иногда удобно пользоваться следующим *свойством последовательностей*: если члены двух последовательностей (a_n) и (b_n) связаны соотношением

$$|a_n|\leqslant|b_n|,$$

то из равенства нулю предела последовательности (b_n) следует равенство нулю предела последовательности (a_n).

Пример 3.3. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n.$$

Решение. Убедимся сначала в том, что для всех $n\in\mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\frac{n}{2n+1}<\frac{1}{2}.$$

Разделив числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, на n, получим очевидное неравенство

$$\frac{1}{2+\dfrac{1}{n}}<\frac{1}{2}.$$

Используя далее свойство степеней, заключаем, что для всех $n\in\mathbf{N}$ справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{2+1/n}\right)^n<\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как, согласно (4), $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n=0$, то из приведенного выше свойства последовательностей следует

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n=0.$$

Ответ. 0.

Вычислить пределы:

3.7*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{4n+5}\right)^n$.

3.8*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2-1}{(2n+1)(n+2)}\right]^n$.

3.9*. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n!}{n^2+1}$.

При вычислении пределов, содержащих иррациональности, часто используют перевод иррациональности из знаменателя в числитель или наоборот.

Пример 3.4. Вычислить предел

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n).$$

Решение. Умножим и разделим выражение, стоящее под знаком предела, на сопряженное выражение. Тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n-n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}.$$

Разделив числитель и знаменатель на n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1}=1.$$

Ответ. 1.

Вычислить пределы:

3.10. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$. **3.11.** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2-5n+6}-n)$.

3.12. $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt{n^2+1}-n)$. **3.13*.** $\lim\limits_{n\to\infty}(n+\sqrt[3]{1-n^3})$.

Для того чтобы установить сходимость монотонной последовательности, можно использовать следующую теорему. Если последовательность монотонно возрастает (убывает), то для ее сходимости достаточно, чтобы она была ограничена сверху (снизу).

Если доказано, что предел последовательности существует, то для его вычисления в ряде случаев удобно использовать формулу

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}. \qquad (5)$$

Убедиться в существовании предела, а иногда и найти его можно, используя следующее утверждение. Если для трех последовательностей начиная с некоторого N справедливо неравенство

$$a_n\leqslant b_n\leqslant c_n$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ существует и

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n. \tag{6}$$

Пример 3.5. Найти предел последовательности $x_n = q^n$, если известно, что $|q| < 1$.

Решение. Представим последовательность в рекуррентном виде:

$$x_{n+1} = qx_n.$$

Так как $|q| < 1$, то $|x_{n+1}| < |x_n|$ для любого $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $(|x_n|)$ монотонно убывает. Так как $|x_n| \geqslant 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $(|x_n|)$ ограничена снизу. Следовательно, последовательность $(|x_n|)$ сходится. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = y$. Тогда для вычисления y_n согласно формуле (5) получаем уравнение

$$y = |q|\,y. \tag{*}$$

Так как $|q| < 1$, то уравнение (*) имеет единственный корень $y = 0$.

Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty} (-|x_n|) = 0$. Так как неравенство

$$-|x_n| \leqslant x_n \leqslant |x_n|$$

справедливо для всех $n \in \mathbb{N}$, то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

3.14.** Последовательность (x_n), первый член которой $x_1 = \sqrt{2}$, определяется рекуррентно по формуле

$$x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}.$$

Найти предел (x_n).

3.15*. Последовательность (x_n), первый член которой $x_1 = 1$, определяется рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n^2 + (1 - 2a)\,x_n + a^2.$$

Найти предел (x_n).

3.16. Последовательность задана рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n} + x_n\right),$$

где $x_1 > 0$, $a > 0$. Найти предел (x_n).

3.17. Доказать, что последовательность, первый член которой $x_1 = \frac{a}{2}$, а каждый последующий удовлетворяет рекуррентному

соотношению

$$x_n = \frac{a}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2},$$

возрастает и ограничена сверху. Найти ее предел.

3.18*. Найти предел последовательности, у которой

$$x_1 = \frac{a}{2}, \qquad x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2}.$$

3.19. Последовательность определяется рекуррентным соотношением

$$x_{n-1} = \frac{1}{3}\left(2x_n + \frac{a}{x_n^2}\right),$$

где $a > 0$ и $x > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$.

3.20. Последовательность определяется рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = \frac{x_n\left(x_n^2 + 2a\right)}{2x_n^3 + a},$$

где $a > 0$ и $x > 0$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt[3]{a}$.

§ 4. Арифметическая прогрессия

Последовательность, у которой задан первый член a_1, а каждый следующий член, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом d, называется *арифметической прогрессией*:

$$a_{n+1} = a_n + d, \qquad n \in \mathbb{N}; \tag{1}$$

где a_n — *n-й член прогрессии*, d — *разность прогрессии*. Формула *общего члена* арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + d\,(n-1). \tag{2}$$

Сумма n членов прогрессии S_n вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\,n = \frac{2a_1 + d\,(n-1)}{2}\,n. \tag{3}$$

Свойство членов арифметической прогрессии. Любой член арифметической прогрессии (кроме первого) равен полусумме равноотстоящих от него членов:

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}, \qquad k < n; \tag{4}$$

при $k = 1$ получаем

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \tag{5}$$

Арифметическая прогрессия полностью определена, если известны a_1 и d.

Пример 4.1. При делении девятого члена арифметической прогрессии на ее второй член в частном получается 5, а при делении 13-го члена этой прогрессии на ее шестой член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти первый член и разность прогрессии.

Решение. Условие задачи можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$a_9 = a_2 \cdot 5,$$
$$a_{13} = 2a_6 + 5.$$

Используя формулу общего члена арифметической прогрессии, получаем систему

$$a_1 + 8d = 5(a_1 + d),$$
$$a_1 + 12d = 2(a_1 + 5d) + 5,$$

в которой присутствуют только два неизвестных a_1 и d. Приводя в уравнениях системы подобные члены, получаем систему

$$4a_1 = 3d,$$
$$a_1 - 2d + 5 = 0,$$

решением которой являются $a_1 = 3$, $d = 4$.

Ответ. $a_1 = 3$, $d = 4$.

4.1. Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3, а произведение третьего и четвертого ее членов равно 65/72. Найти сумму 17-ти первых членов прогрессии.

4.2*. Найти арифметическую прогрессию, если известно, что

$$a_1 + a_3 + a_5 = -12, \quad a_1 a_2 a_5 = 80.$$

4.3*. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 2, а сумма квадратов этих чисел равна 14/9. Найти эти числа.

4.4. В арифметической прогрессии дано: $a_p = q$ и $a_q = p$; найти формулу общего члена прогрессии a_n $(p \neq q)$.

4.5*. Показать, что если для положительных чисел a, b, c числа a^2, b^2, c^2 являются последовательными членами арифметической прогрессии, то числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ тоже являются последовательными членами арифметической прогрессии.

4.6. Сумма и разность членов арифметической прогрессии положительна. Если увеличить разность на 2, не меняя первого члена, то сумма прогрессии увеличится в 3 раза. Если же разность исходной прогрессии увеличить в 4 раза, то сумма увеличится в 5 раз. Определить разность исходной прогрессии.

4.7. Найти число членов арифметической прогрессии, у которой отношение суммы первых 13 членов к сумме последних 13 равно $\frac{1}{2}$, а отношение суммы всех членов без первых трех к сумме всех членов без последних трех равно $\frac{4}{3}$.

При решении задач, в которых используется понятие суммы членов арифметической прогрессии, удобно применять следующую формулу, связывающую n-й член с суммой n членов:

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n. \tag{6}$$

Пример 4.2. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой прогрессии выражается формулой

$$S_n = 4n^2 - 3n.$$

Найти общий член прогрессии.

Решение. Используя (6), имеем

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = 4(n+1)^2 - 3(n+1) - (4n^2 - 3n) = 8n + 1,$$
$$a_n = 8(n-1) + 1 = 8n - 7.$$

Ответ. $a_n = 8n - 7$.

4.8. Известно, что при любом n сумма S_n членов некоторой последовательности $S_n = 2n^2 + 3n$. Найти десятый член этой последовательности и доказать, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

4.9. Последовательность чисел 1, 4, 10, 19, ... обладает тем свойством, что разности соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию 3, 6, 9, ... Найти номер члена последовательности, равного 15 454.

Пример 4.3. Найти сумму всех четных двузначных чисел.

Решение. Первое четное двузначное число равно 10, а последнее — 98. Используя формулу общего члена прогрессии для $d = 2$, $a_1 = 10$, $a_n = 98$, получаем

$$n = 1 + \frac{98 - 10}{2} = 45.$$

Подставляя найденное значение n в формулу $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, находим

$$S_n = \frac{98 + 10}{2} \cdot 45 = 54 \cdot 45 = 2430.$$

Ответ. 2430.

4.10. Решить уравнение $2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + x = 155$.

4.11. За изготовление и установку первого железобетонного кольца было уплачено 10 руб., а за каждое следующее кольцо платили на 2 руб. больше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено еще 40 руб. Средняя стоимость изготовления и установки одного кольца оказалась равной $22\frac{4}{9}$ руб. Сколько колец было установлено?

4.12. Решить уравнение $\frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \ldots + \frac{1}{x} = 3$.

4.13*. В арифметической прогрессии сумма m первых ее членов равна сумме n ее первых членов ($m \neq n$). Доказать, что в этом случае сумма ее первых $m + n$ членов равна нулю.

4.14*. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

4.15. Определить такую арифметическую прогрессию, в которой отношение между суммой n первых членов и суммой n членов, следующих за ними, не зависит от n.

4.16*. Найти сумму $50^2 - 49^2 + 48^2 - 47^2 + \ldots + 2^2 - 1$.

4.17*. Найти сумму первых 19-ти членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, \ldots$, если известно, что

$$a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224.$$

4.18. Найти $a_1 + a_6 + a_{11} + a_{16}$, если известно, что $a_1, a_2, \ldots$ — арифметическая прогрессия и

$$a_1 + a_4 + a_7 + \ldots + a_{16} = 147.$$

4.19*. Найти последовательность, в которой сумма любого числа членов, начиная с первого, в четыре раза больше квадрата числа членов.

4.20*. Доказать, что если S_n, S_{2n}, S_{3n} — суммы n, $2n$, $3n$ членов арифметической прогрессии, то

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n).$$

4.21*. Известно, что для некоторой арифметической прогрессии и для некоторой пары натуральных чисел m и n имеет место равенство $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$. Доказать, что

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

4.22*. При каких значениях параметра a найдутся такие значения x, что числа

$$5^{1+x} + 5^{1-x}, \quad \frac{a}{2}, \quad 25^x + 25^{-x}$$

будут тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

4.23. При каких значениях x три числа $\lg 2$, $\lg(2^x - 1)$, $\lg(2^x + 3)$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

4.24. Доказать, что если u_1, u_2, u_3 ($u_1 \neq u_2$) — члены (необязательно последовательные) арифметической прогрессии, то существует такое рациональное число λ, что

$$\frac{u_3 - u_2}{u_2 - u_1} = \lambda.$$

4.25*. Доказать, что числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами (необязательно соседними) арифметической прогрессии.

4.26*. Могут ли числа 2; $\sqrt{6}$; 4,5 быть членами арифметической прогрессии?

4.27*. Длины сторон четырехугольника образуют арифметическую прогрессию. Можно ли вписать в него окружность?

4.28. Пусть S_n — сумма n членов некоторой последовательности и известно, что $S_n/S_m = n^2/m^2$. Доказать, что для членов этой последовательности справедливо отношение

$$a_n/a_m = (2n-1)/(2m-1).$$

§ 5. Геометрическая прогрессия

Последовательность, у которой задан первый член $b_1 \neq 0$, а каждый следующий, начиная со второго, получается умножением предыдущего на одно и то же число $q \neq 0$, называется *геометрической прогрессией*:

$$b_n = b_{n-1}q; \tag{1}$$

где b_n — *n-й член прогрессии*, q — *знаменатель прогрессии*. Формула *общего члена* геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}. \tag{2}$$

Сумма n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}. \quad (3)$$

Если $|q| < 1$, то прогрессию называют *бесконечно убывающей*. Предел суммы ее членов $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называют *суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии*. Он вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \quad (4)$$

Свойство членов геометрической прогрессии. Квадрат любого (кроме первого) члена геометрической прогрессии равен произведению равноотстоящих от него членов:

$$b_n^2 = b_{n-k}b_{n+k}, \qquad k < n, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (5)$$

Геометрическая прогрессия полностью определена, если известны b_1 и q.

Пример 5.1. Найти четыре последовательных члена геометрической прогрессии, из которых второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

Решение. Пусть b_1, b_2, b_3, b_4 — четыре последовательных члена геометрической прогрессии. Условие задачи можно записать в виде следующей системы уравнений:

$$b_1 - 35 = b_2,$$
$$b_3 - 560 = b_4.$$

Используя формулу общего члена, эту систему перепишем в виде

$$b_1 - b_1q = 35,$$
$$b_1q^2 - b_1q^3 = 560.$$

Подставляя значение $b_1(1-q)$ во второе уравнение системы, получаем для q уравнение $q^2 = 16$, корни которого равны 4 и (-4).

Теперь из первого уравнения системы по значениям $q = 4$ и $q = -4$ получаем соответственно значения $b_1 = -35/3$, $b_1 = 7$.

Ответ. $\left(-\frac{35}{3}, \frac{35\cdot 4}{3}, -\frac{35\cdot 16}{3}, -\frac{35\cdot 64}{3}\right)$; $(7, -28, -448, -1008)$.

5.1. Доказать, что для любого четного числа членов геометрической прогрессии $S_{неч}$ — сумма членов, стоящих на нечетных местах, и $S_{четн}$ — сумма членов, стоящих на четных местах, связаны равенством $qS_{неч} = S_{четн}$.

5.2. Найти первый и пятый члены геометрической прогрессии, если известно, что знаменатель ее равен 3, а сумма шести ее первых членов равна 1820.

5.3. Найти четыре последовательных члена геометрической прогрессии, если известно, что сумма крайних членов равна (-49), а сумма средних членов равна 14.

5.4. В геометрической прогрессии с положительными членами $S_2 = 4$, $S_3 = 13$. Найти S_4.

5.5. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а их произведение равно 27. Найти эти числа.

5.6. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же чисел равна 91. Найти эти числа.

5.7. Определить три числа, являющихся тремя последовательными членами геометрической прогрессии, если сумма их равна 21, а сумма обратных величин равна 7/12.

5.8. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма их квадратов равна 340. Найти данные числа.

5.9. Произведение первых трех членов геометрической прогрессии равно 64, а сумма кубов этих членов равна 584. Найти прогрессию.

5.10. Сумма первых трех членов геометрической прогрессии равна 31, а сумма первого и третьего равна 26. Найти прогрессию.

5.11. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

5.12. Дана геометрическая прогрессия с положительными членами. Выразить произведение первых ее n членов через их сумму S_n и через S'_n — сумму обратных величин этих членов.

5.13. Сумма любых пяти последовательных членов возрастающей геометрической прогрессии в 19 раз больше третьего из них. Найти эту прогрессию, если известно, что ее m-й член равен единице.

5.14. Вычислить сумму квадратов n членов геометрической прогрессии, у которой первый член равен u_1 и знаменатель $q \neq 1$.

5.15. Доказать, что отношение суммы квадратов нечетного числа членов геометрической прогрессии к сумме первых степеней тех же членов является некоторым многочленом относительно q (q — знаменатель прогрессии).

5.16. Доказать, что если S_n, S_{2n}, S_{3n} — суммы n, $2n$, $3n$ первых членов геометрической прогрессии, то

$$S_n(S_{3n}-S_{2n})=(S_{2n}-S_n)^2.$$

5.17*. Найти сумму

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2+\ldots+\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right)^2, \qquad x\neq\pm 1.$$

5.18*. Найти сумму

$$S_n=\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}.$$

5.19*. Найти сумму

$$S_n=x+2x^2+3x^2+\ldots+nx^n, \qquad x\neq 1.$$

5.20. Найти число членов геометрической прогрессии, у которой отношение суммы последних 14-ти членов к сумме первых 14-ти равно 9, а отношение суммы всех членов без первых семи к сумме всех членов без последних 7-ми равно 3.

Пример 5.2. Найти отличный от нуля знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый член в 4 раза больше суммы всех ее последующих членов. (Считается, что $b_1\neq 0$).

Решение. Составим уравнение, связывающее по условию задачи n-й член прогрессии с суммой членов, начиная с $(n+1)$-го члена. Имеем

$$b_n=4\frac{b_{n+1}}{1-q}.$$

Выражая b_n, b_{n+1} через b_1 и q, получаем уравнение

$$b_1q^{n-1}=4\frac{b_1q^n}{1-q},$$

которое после деления правой и левой его частей на b_1q^{n-1} приобретает вид $1=\dfrac{4q}{1-q}$. Его корнем является $q=1/5$.

Ответ. $q=1/5$.

5.21. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов ее членов равна $153\frac{3}{5}$. Найти четвертый член и знаменатель этой прогрессии.

5.22*. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой отношение каждого члена к сумме всех последующих членов равно $\frac{2}{3}$.

5.23. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии с положительными членами сумма первых трех членов равна 10,5, а сумма прогрессии равна 12. Найти прогрессию.

5.24. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов ее членов равна 192. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

5.25. Первый член некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии равен единице, а ее сумма равна S. Найти сумму квадратов членов этой прогрессии.

5.26*. При каком значении x прогрессия

$$\frac{a+x}{a-x},\ \frac{a-x}{a+x},\ \left(\frac{a-x}{a+x}\right)^3,\ \ldots, \text{ где } a>0,$$

будет бесконечно убывающей? Найти сумму членов этой прогрессии.

5.27. Сторона квадрата равна a. Середины сторон этого квадрата соединили отрезками. Получился новый квадрат. С этим квадратом поступили так же, как и с исходным, и т. д. Найти предел P суммы периметров и предел S суммы площадей этих квадратов.

5.28. Найти условие, при котором три числа a, b и c были бы соответственно k-м, p-м и m-м членами геометрической прогрессии.

5.29. Могут ли числа 11, 12, 13 быть членами (не обязательно соседними) одной геометрической прогрессии?

5.30. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, сумма которой равна $\frac{16}{3}$, содержит член $\frac{1}{6}$. Отношение суммы всех членов, стоящих до него, к сумме всех членов, стоящих после него, равно 30. Определить порядковый номер этого члена.

5.31. Найти отношение первого члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии к сумме всех ее членов, если отношение всех членов этой прогрессии, имеющих четные номера, к сумме всех членов, номера которых кратны трем, равно 3.

§ 6. Смешанные задачи на прогрессии

Смешанными задачами на прогрессию принято называть такие задачи, при решении которых используются свойства как арифметических, так и геометрических прогрессий.

Пример 6.1. Три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если от третьего отнять 4, то эти числа будут последовательными членами арифметической прогрессии. Если же от второго и третьего членов полученной арифметической прогрессии отнять по единице, то полученные числа снова будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найти эти числа.

Решение. Обозначим искомые числа a, b, c. Для составления первого уравнения, связывающего a, b и c, используем свойство членов геометрической прогрессии:

$$b^2 = ac.$$

Из условия задачи и свойства членов арифметической прогрессии получим второе уравнение

$$2b = a + c - 4.$$

И, наконец, последнее условие задачи можно записать в виде уравнения

$$(b-1)^2 = a(c-5).$$

Для решения системы

$$\begin{aligned} b^2 &= ac,\\ 2b &= a + c - 4,\\ (b-1)^2 &= a(c-5) \end{aligned}$$

вычтем из первого уравнения третье. При этом получается линейное уравнение $2b - 1 = 5a$, связывающее b и a. Выражая теперь из системы линейных уравнений

$$\begin{aligned} 2b - 1 &= 5a;\\ 2b &= a + c - 4 \end{aligned}$$

неизвестные a и c через b, имеем

$$a = \frac{2b-1}{5}, \quad c = \frac{8b+21}{5}.$$

Исключим из системы неизвестные a и c, подставив их выражения через b в первое уравнение системы. Тогда получим относительно b квадратное уравнение

$$9b^2 - 34b + 21 = 0,$$

корни которого равны 3 и 7/9. Подставляя эти значения b в выражения для a и c, получаем искомые числа.

Ответ. (1, 3, 9); (1/9, 7/9, 49/9).

6.1. Найти три числа, являющихся последовательными членами геометрической прогрессии, если известно, что увеличение второго числа на 2 делает эти три числа членами арифметической прогрессии, а если после этого увеличить последнее число на 9, то вновь полученные числа снова будут членами геометрической прогрессии

6.2. Три числа, из которых третьим является 12, являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Если вместо 12 взять 9, то эти три числа будут тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Найти эти числа.

6.3*. Дано трехзначное число, цифры которого являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии. Если из этого числа вычесть 792, то получается число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Если из цифры исходного числа, обозначающей число сотен, вычесть 4, а остальные цифры оставить без изменения, то получится число, цифры которого являются последовательными членами арифметической прогрессии. Найти это число.

6.4. Даны четыре числа, из которых первые три являются тремя последовательными членами геометрической, а последние три — членами арифметической прогрессии; сумма крайних чисел равна 32, сумма средних чисел равна 24. Найти эти числа.

6.5. Первые члены арифметической и геометрической прогрессий одинаковы и равны 2, третьи члены тоже одинаковы, а вторые отличаются на 4. Найти эти прогрессии, если все их члены положительны.

6.6. Первый член арифметической прогрессии равен 1, а сумма первых девяти членов равна 369. Первый и девятый члены геометрической прогрессии совпадают с первым и девятым членами арифметической прогрессии. Найти седьмой член этой геометрической прогрессии.

6.7. Среди 11 членов арифметической прогрессии первый, пятый и одиннадцатый являются тремя последовательными членами некоторой геометрической прогрессии. Найти формулу общего члена этой арифметической прогрессии, если первый ее член равен 24.

6.8. В некоторой арифметической прогрессии второй член является средним пропорциональным между первым и четвертым. Показать, что четвертый, шестой и девятый члены этой прогрессии являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найти знаменатель этой прогрессии.

6.9. Доказать, что если a, b и c одновременно являются 5-м, 17-м и 37-м членами как арифметической, так и геометрической прогрессии, то $a^{b-c}b^{c-a}c^{a-b} = 1$.

6.10. Доказать, что если a, b, c — три последовательных члена геометрической прогрессии, то

$$\frac{1}{\log_a N}, \quad \frac{1}{\log_b N}, \quad \frac{1}{\log_c N}$$

— последовательные члены арифметической прогрессии. (Считается, что числа a, b, c положительны и не равны единице.)

6.11. Даны две прогрессии: геометрическая с $b_n > 0$ и знаменателем q и возрастающая арифметическая a_n с разностью d. Найти x из условия

$$\log_x b_n - a_n = \log_x b_1 - a_1.$$

§ 7. Разные задачи

Проверить, будут ли ограничены следующие последовательности:

7.1. $x_n = 1 + (-1)^n \frac{1}{n}$.

7.2. $x_n = n(1 - (-1)^n)$.

7.3*. $x_n = \frac{3n+5}{2n-3}$.

7.4*. Общий член последовательности представлен в виде

$$x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Сколько членов последовательности будет меньше $\frac{1023}{1024}$?

7.5. Доказать, что последовательность

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{2 + u_n^2}{2u_n}$$

является убывающей.

7.6. Доказать, что последовательность

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

является возрастающей.

7.7*. Пусть a_n — сторона правильного 2^{n+1}-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Доказать, что последовательность (a_n) является убывающей, а последовательность периметров (P_n) — возрастающей.

7.8. Катет равнобедренного прямоугольного треугольника разделен на n равных частей, и на полученных отрезках построены вписанные прямоугольники. Найти предел последовательности (S_n) площадей, образованных из ступенчатых фигур.

7.9. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, отрезком $[0; 1]$ оси абсцисс и прямой $x = 1$, как предел последовательности площадей ступенчатых фигур, состоящих из прямоугольников, построенных так же, как в предыдущей задаче.

7.10. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^3+1} - n)$.

7.11*. Найти трехзначное число, которое делится на 45 и цифры которого являются членами арифметической прогрессии.

7.12.** Доказать, что если в арифметической прогрессии $S_n = n^2p$, $S_k = k^2p$, $k \neq n$, то $S_p = p^3$.

7.13*. Доказать, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — члены арифметической прогрессии с разностью d, то

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} = \frac{\sqrt{a_{n+1}} - \sqrt{a_1}}{d}.$$

7.14. Четыре числа a, b, c, d являются членами геометрической прогрессии. Доказать, что

$$(a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 = (a-d)^2.$$

7.15*. Решить систему уравнений

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{u} = \frac{u}{s} = \frac{s}{t},$$
$$x = 8u,$$
$$x + y + z + u + s + t = 15\frac{3}{4}.$$

7.16*. Доказать равенство

$$(\underbrace{66\ldots6}_{n\text{ цифр}})^2 + \underbrace{88\ldots8}_{n\text{ цифр}} = \underbrace{44\ldots4}_{2n\text{ цифр}}.$$

7.17*. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 - 3x + A = 0$, а x_3 и x_4 — корни уравнения $x^2 - 12x + B = 0$. Известно, что последовательность x_1, x_2, x_3, x_4 является возрастающей геометрической прогрессией. Найти A и B.

Сумма n членов произвольной последовательности в некоторых случаях может быть найдена с помощью построения вспомогательной последовательности $\{S_n\}$, удовлетворяющей условию

$$S_{k+1} - S_k = u_k.$$

Нетрудно убедиться, что

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots \\ \ldots + (S_{n+1} - S_n) = S_{n+1} - S_1. \quad (2)$$

Пример 7.1. Найти сумму

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \ldots + \frac{1}{a_na_{n+1}},$$

если известно, что $a_1, \ldots, a_{n+1}$ — последовательные члены арифметической прогрессии с разностью $d \neq 0$, ни один из которых не равен нулю.

Решение. Записывая дробь $\frac{1}{a_1a_2}$ в виде

$$\frac{1}{a_1a_2}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\cdot\frac{1}{a_2-a_1}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)\frac{1}{d},$$

где $d=a_2-a_1$, и взяв S_k равным

$$S_k=-\frac{1}{d}\frac{1}{a_k},$$

имеем

$$S_{k+1}-S_k=-\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}\right)=\frac{1}{d}\left(\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}a_k}\right)=\frac{1}{a_{k+1}a_k}=u_k.$$

Далее, используя (1) и (2), получаем

$$\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}=S_{n+1}-S_1=-\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}\right)=\frac{n}{a_{n+1}a_1}.$$

Ответ. $\frac{n}{a_{n+1}a_1}$.

7.18. Доказать тождество

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}.$$

7.19*. Доказать тождество

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right).$$

7.20*. Доказать тождество

$$\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\frac{2}{3\cdot 5\cdot 7}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}.$$

7.21. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия. Доказать тождество

$$\frac{1}{a_1a_n}+\frac{1}{a_2a_{n-1}}+\ldots+\frac{1}{a_na_1}=\frac{2}{a_1\cdot a_n}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

7.22. Найти сумму n чисел вида 1, 11, 111, 1111, ...

7.23. Определить следующие суммы:

а) $1-2+3-4+\ldots+(-1)$;
б) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot n$;
в) $2\cdot 1^2+3\cdot 2^2+\ldots+(n+1)n^2$.

При вычислении пределов последовательностей, члены которых являются результатами суммирования, используются следующие формулы:

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \tag{3}$$

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \tag{4}$$

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}. \tag{5}$$

Используя (3), (5) и формулы для сумм n членов арифметической и геометрической прогрессий, вычислить пределы:

7.24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+\ldots+2^n}{1+5+\ldots+5^n}$.

7.25. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

7.26. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt{3}}{3^{n-1}}\right)$.

7.27. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n+1)}{n+1}-\frac{2n-1}{2}\right)$.

7.28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}+\frac{1}{n}\right)$.

7.29. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10}+\frac{29}{10^2}+\ldots+\frac{5^n+2^n}{10^n}\right)$.

7.30*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$.

7.31*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\ldots+\frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$,

где (a_n) — арифметическая прогрессия с разностью d, члены которой отличны от нуля.

7.32. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^4}+\frac{8}{n^4}+\ldots+\frac{n^3}{n^4}\right)$.

Найти пределы последовательностей:

7.33.** $a_n=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\ldots$

$\ldots\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}$ (в последнем сомножителе n радикалов).

7.34. $a_n=\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots+\sqrt{a}}}$ (n радикалов).

7.35*. $a_n=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\ldots+\sqrt{3}}}}$ (n радикалов).

ГЛАВА 8

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

§ 1. Предел функции

Пусть $(a; b)$ — некоторый промежуток числовой оси и $x_0\in(a; b)$. Будем считать, что функция $y=f(x)$ определена во всех точках промежутка $(a; b)$ за исключением, может быть, точки x_0. Говорят, что число A — *предел функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0, и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $x\in(a; b)$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Говорят, что число A — *предел функции* $y=f(x)$ *при* x, *стремящемся к бесконечности*, и пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $n_0(\varepsilon)$, что для всех $x>n_0(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной на промежутке* $[a; b]$, если существуют такие числа m и M, что для всех $x\in[a; b]$ выполняется неравенство $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x\to x_0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x\in(a; b)$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$, справедливо неравенство $|f(x)|<\varepsilon$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x\to x_0$, если для любого числа $E>0$ существует такое $\delta(E)$, что для всех $x\in(a; b)$, удовлетворяющих неравенству $0<|x-x_0|<\delta(E)$, справедливо неравенство $|f(x)|>E$. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$.

Для того чтобы доказать, что число A является пределом функции $f(x)$ при $x\to x_0$, достаточно для любого ε найти число $\delta(\varepsilon)$, фигурирующее в определении предела.

Пример 1.1. Доказать, что

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4.$$

Решение. Для того чтобы для данного ε найти нужное число $\delta(\varepsilon)$, составим неравенство

$$0 < \left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

При $x \neq 2$ оно эквивалентно неравенству

$$0 < |x-2| < \varepsilon, \qquad (**)$$

из которого видно, что в качестве $\delta(\varepsilon)$ можно взять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, и в силу эквивалентности неравенств (*) и (**) при всех значениях x, удовлетворяющих неравенству (**), будет выполняться неравенство (*).

Пример 1.2. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0} 2^{1/x^2} = \infty.$$

Решение. Для того чтобы для данного E найти требуемое число $\delta(\varepsilon)$, составим неравенство

$$2^{1/x^2} > E. \qquad (*)$$

Логарифмируя обе его части по основанию 2, получаем эквивалентное неравенство

$$\frac{1}{x^2} > \log_2 E, \qquad (**)$$

решая которое относительно x получаем

$$|x| < \left(\frac{1}{\log_2 E}\right)^{1/2}.$$

Таким образом, в качестве $\delta(E)$ можно взять

$$\delta(E) = \left(\frac{1}{\log_2 E}\right)^{1/2}.$$

Доказать, что:

1.1. $\lim\limits_{x\to 3} (x+5) = 8$.

1.2. $\lim\limits_{x\to 2} (x^2-4) = 0$.

1.3. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$, $a > 0$.

1.4. $\lim\limits_{x\to 1} (6-2x) = 4$.

1.5. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

1.6. $\lim\limits_{x\to a} 2^{\frac{1}{|x-a|}} = \infty$.

1.7. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

При решении некоторых задач удобно использовать следующее определение предела функции. Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках промежутка $(a; b)$, за исключением, может быть, точки $x_0 \in (a; b)$. Говорят, что число A — *предел функции* $f(x)$ при x, стремящемся к x_0, если для любой последовательности значений аргумента (x_n), стремящейся к x_0 $(x_n \neq x_0)$, для соответствующей последовательности значений функции $f(x_n)$

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A.$$

Пример 1.3. Доказать, что функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$ при $x \to 0$ предела не имеет.

Решение. Возьмем две последовательности значений аргумента, сходящиеся к нулю: $x_n^{(1)} = 1/n$, $x_n^{(2)} = -1/n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{-1/n} = \lim_{n\to\infty} (-1) = -1,$$

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(1)}\right) \neq \lim_{n\to\infty} f\left(x_n^{(2)}\right).$$

Таким образом, построены две последовательности значений аргумента, отличные от нуля, пределом которых является нуль, такие, что соответствующие последовательности значений функции сходятся к разным числам (одна к 1, другая к -1). Но так как в определении предела требуется, чтобы для каждой из рассмотренных последовательностей значений аргумента предел последовательности значений функции был одним и тем же числом, то мы тем самым доказали, что данная функция при $x \to 0$ предела не имеет.

Доказать, что следующие функции не имеют предела:

1.8*. $f(x) = \sin(1/x)$ при $x \to 0$.

1.9. $f(x) = e^{-1/x}$ при $x \to 0$.

1.10. $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x \leqslant 0 \end{cases}$ при $x \to 0$.

1.11. $f(x) = \{x\}$, $x \to 4$, где $\{x\}$ — дробная часть числа x.

§ 2. Вычисление пределов функций

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то существуют пределы

$$\lim_{x\to a} cf_1(x) = c \lim_{x\to a} f_1(x), \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to a} [f_1(x) \pm f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x) \pm \lim_{x\to a} f_2(x), \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)\lim_{x\to a} f_2(x), \tag{3}$$

$$\lim_{x\to a}[f_1(x)/f_2(x)] = \lim_{x\to a} f_1(x)/\lim_{x\to a} f_2(x) \quad (\lim_{x\to a} f_2(x)\neq 0). \tag{4}$$

При отыскании предела отношения двух многочленов, зависящих от x, при $x\to\infty$, оба члена отношения необходимо предварительно разделить на x^n, где n — наивысшая степень этих многочленов.

Пример 2.1. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)(x-2)}{2x^2-5x+3}$.

Решение. Разделим числитель и знаменатель дроби на x^2. Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3)(x-2)}{2x^2-5x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\frac{x-3}{x}\right)\left(\frac{x-2}{x}\right)}{2-5/x+3/x^2}.$$

Воспользовавшись теперь формулами (4), (3), а также (2) и (1) (при $c=-1$), получим

$$\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1-3/x)\lim\limits_{x\to\infty}(1-2/x)}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}. \tag{*}$$

Используя равенство $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a}{x}=0$, получим

$$\frac{\left(1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}\right)\left(1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}\right)}{2-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. 1/2.

Вычислить пределы:

2.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^2}{(x-3)(x+2)}$. **2.2.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+5x-6}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

2.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$. **2.4.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+5}{x+\sqrt{x}}$.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены и $Q(a)\neq 0$, то предел отношения

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$$

находится непосредственно с помощью формул (1)—(4). Если же $P(a)=0$ и $Q(a)=0$, то, записывая многочлены $P(x)$ и

$Q(x)$ в виде

$$P(x)=(x-a)^k P_1(x), \quad Q(x)=(x-a)^n Q_1(x)$$

(k и n — кратности корня $x=a$ многочленов $P(x)$ и $Q(x)$), необходимо до перехода к пределу произвести сокращение числителя и знаменателя дроби $P(x)/Q(x)$ на общий множитель.

Пример 2.2. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}.$$

Решение. Записываем выражение, стоящее под знаком предела, в виде

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-9}=\frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)}=\frac{x-2}{x+3}.$$

Предел полученной дроби вычисляем с помощью формул (1)—(4):

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-2}{x+3}=\frac{1}{6}.$$

Ответ. 1/6.

Вычислить пределы:

2.5. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{x^2+1}$. **2.6.** $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{(x+1)^3}{x^3+1}$.

2.7. $\lim\limits_{x\to 1/2}\dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$. **2.8.** $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

2.9. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{3}{8-x^3}\right)$.

2.10. $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{(x^3-2ax^2-a^2x+2a^3)(x-2a)^{-1}}{x^3-a^2x}+\right.$

$\left.+\dfrac{2a}{x^2-ax}-\dfrac{2}{x-a}\right]$.

2.11. а) $\lim\limits_{x\to 1/2} f(x)$, б) $\lim\limits_{x\to 3/2} f(x)$,

где $f(x)=\dfrac{\dfrac{|x-1|}{2}+x\,|x-1|+2-\dfrac{2}{x}}{\sqrt{x-2+1/x}}$.

2.12. а) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, б) $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, где $f(x)=\dfrac{x\,|x-3|}{(x^2-x-6)\,|x|}$.

2.13*. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-5x^2+7x-3}$.

Вычисление пределов от выражений, содержащих иррациональности, иногда упрощается введением новых переменных.

Пример 2.3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}.$$

Решение. Обозначим $\sqrt[3]{x}=t$. Тогда для переменного t выражение, стоящее под знаком предела, можно записать в виде

$$\frac{t^2-2t+1}{(t^3-1)^2}.$$

Число, к которому стремится новое переменное t при $x\to 1$, находится как предел значения функции $t(x)=\sqrt[3]{x}$ при $x\to 1$, т. е.

$$\lim_{x\to 1} t(x)=\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x}=1.$$

Таким образом,

$$\lim_{t\to 1}\frac{t^2-2t+1}{(t^3-1)^2}=\lim_{t\to 1}\frac{(t-1)^2}{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}=$$
$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{(t^2+t+1)^2}=\frac{1}{9}.$$

Ответ. 1/9.

Вычислить пределы:

2.14. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$. **2.15.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

2.16. $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Вычисление предела от иррационального выражения иногда можно осуществить переводом иррациональности из числителя в знаменатель или наоборот.

Пример 2.4. Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}.$$

Решение. Умножая числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, на выражение, сопряженное числителю, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1-1}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)}=0.$$

Ответ. 0.

Вычислить пределы:

2.17. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$. **2.18.** $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$.

2.19. $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$. **2.20.** $\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{\sqrt{x-5}-2}$.

2.21. $\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x+5}-3}$. **2.22.** $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$.

2.23*. $\lim_{x\to -\infty} x(\sqrt{4x^2+7}+2x)$. **2.24.** $\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$.

2.25. $\lim_{x\to\infty}\frac{9x-\sqrt{x^2-4}}{x}$. **2.26.** $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}$.

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Пример 2.5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}.$$

Решение. Преобразуем числитель дроби по формуле

$$1-\cos 2x=2\sin^2 x.$$

Тогда получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\sin x=0.$$

Ответ. 0.

Пример 2.6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}.$$

Решение. Обозначим $y=\arcsin x$; тогда $x=\sin y$. Так как при $x\to 0$ $\arcsin x$ стремится к нулю, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1.$$

Ответ. 1.

Вычислить пределы:

2.27. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin mx}$. **2.28*.** $\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

2.29*. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$. **2.30*.** $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$.

2.31. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg} x}$. **2.32*.** $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos(x+\pi/6)}$.

2.33*. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(x-\pi/3)}{1-2\cos x}$. **2.34.** $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin(x/2)}{\pi-x}$.

2.35*. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

§ 3. Непрерывность функции в точке

Функция $f(x)$, определенная на промежутке $(a;\ b)$, называется *непрерывной в точке* $x_0\in(a;\ b)$, если:

1) существует предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;

2) этот предел равен значению функции в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0).$$

Доказательство непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 состоит в проверке справедливости равенства

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0). \tag{1}$$

Пример 3.1. Доказать, что функция

$$f(x)=3x^2+5$$

непрерывна в точке $x=2$.

Решение. Используя теоремы о пределах, имеем

$$\lim_{x\to2}(3x^2+5)=3\lim_{x\to2}x^2+5=17.$$

С другой стороны, значение функции в точке 2 тоже равно 17. Следовательно, равенство (1) выполняется и данная функция непрерывна в точке $x=2$.

Доказать непрерывность следующих функций в указанных точках:

3.1. $f(x)=x^2-2x+1$ в точке 1.

3.2. $f(x)=\dfrac{1+\cos 2x}{\cos x}$ в точка $x=\dfrac{\pi}{4}$.

3.3. $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant1,\\ 1, & x<1\end{cases}$ в точке $x=1$.

3.4. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ в точке $x=0$.

3.5. $f(x)=\begin{cases}e^{-1/x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ в точке $x=0$.

3.6. $f(x)=\begin{cases}(1+x)^{1/x}, & x\neq0,\\ e, & x=0\end{cases}$ в точке $x=0$.

3.7. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}, & x\neq0,\\ 1/6, & x=0\end{cases}$ в точке $x=0$.

При доказательстве непрерывности функции $f(x)$, определенной на промежутке $(a;\ b)$, в точке $x_0\in(a;\ b)$ в ряде случаев вместо равенства (1) удобнее проверить справедливость равенства

$$\lim_{\Delta x\to0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0, \tag{2}$$

при выполнении которого функция непрерывна в точке x_0.

Пример 3.2. Доказать, что функция

$$f(x)=\sin x$$

непрерывна для любого значения аргумента x.

Решение. Для данной функции составим разность $f(x+\Delta x)-f(x)$:

$$\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(\frac{2x+\Delta x}{2}\right).$$

Воспользовавшись тем, что

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sin(\Delta x/2)}{\Delta x/2}=1,\quad \left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\leqslant1,$$

с помощью формул (2), (5) из § 2 получаем

$$\lim_{\Delta x\to0}[\sin(x+\Delta x)-\sin x]=0.$$

Доказать непрерывность следующих функций на всей области их определения:

3.8. $f(x)=x^2$. **3.9*.** $f(x)=\cos x$.
3.10*. $f(x)=\ln x$. **3.11*.** $f(x)=e^x$.

При доказательстве непрерывности часто используется следующая теорема.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то их сумма, разность, произведение и частное (если $g(x_0)\neq0$) непрерывны в точке x_0.

Пример 3.3. Доказать непрерывность функции

$$f(x)=\frac{2x^2-2}{x^2+1}$$

на всей числовой оси.

Решение. Так как $f(x)$ представляет собой отношение двух многочленов, причем знаменатель всюду положителен, то непрерывность $f(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$ следует из непрерывности в этой точке числителя и знаменателя.

3.12. Доказать, что дробно-рациональная функция $w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc \neq 0)$ непрерывна в своей области определения.

3.13. Будет ли функция $y = \operatorname{tg} x$ непрерывна на всей числовой оси?

Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция не определена в точке x_0, то говорят, что x_0 — *точка устранимого* ***разрыва***. В этом случае можно доопределить функцию $f(x)$ по непрерывности, положив

$$\tilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x). \qquad (3)$$

Пример 3.4. Доопределить функцию

$$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

в точке $x = 2$ по непрерывности.

Решение. Точка $x = 2$ не принадлежит области определения данной функции, но

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+2) = 4.$$

Доопределяя функцию $f(x)$ в точке $x = 2$ значением, равным 4, получаем функцию

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{при } x \neq 2, \\ 4 & \text{при } x = 2, \end{cases}$$

которая на всей области определения исходной функции совпадает с исходной функцией и будет непрерывной на всей числовой оси.

Ответ. $\tilde{f}(2) = 4$.

Доопределить по непрерывности следующие функции в указанных точках:

3.14. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в точке $x = 0$.

3.15. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$ в точке $x = 0$.

3.16. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ в точке $x = 0$.

3.17. $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt[4]{x}}{9 - \sqrt{x}}$ в точке $x = 81$.

Подобрать параметры так, чтобы $f(x)$ стала непрерывной в указанной точке (если точка не указана, то на всей числовой прямой):

3.18. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3}, & x \neq 3, \\ A, & x = 3. \end{cases}$

3.19. $f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0. \end{cases}$

3.20. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.

3.21. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.

3.22. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1-\cos mx}, & x \neq 0, \\ A, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$.

3.23*. $f(x) = \begin{cases} (1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}, & x \neq 1, \\ A, & x = 1 \end{cases}$ в точке $x = 1$.

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(a; x_0)$. Число A называют *левым пределом функции* $f(x)$ *в точке* x_0 и пишут

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что для любого $x \in (a; x_0)$, удовлетворяющего неравенству $x_0 - \delta(\varepsilon) < x$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0 *слева*, если точка x_0 принадлежит области определения функции и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

Аналогично определяются правый предел функции и непрерывность функции справа.

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывной слева и справа в точке x_0.

Пример 3.5. Каким условиям должны удовлетворять параметры a и b, чтобы функция

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{при } x\leqslant 1,\\ ax^2+bx & \text{при } x>1\end{cases}$$

была непрерывной?

Решение. Вычислим левый и правый пределы данной функции в точке $x=1$:

$$\lim_{x\to 1-0}(x-1)=0,\qquad \lim_{x\to 1+0}(ax^2+bx)=a+b.$$

Так как данная функция в точке $x=1$ непрерывна слева и $f(1)=0$, то для ее непрерывности необходимо и достаточно выполнения равенства $a+b=0$.

Ответ. $a+b=0$.

Подобрать параметры, входящие в определение функции, так, чтобы функция $f(x)$ стала непрерывной:

3.24. $f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\leqslant\pi/2;\\ \sin x+b, & x>\pi/2.\end{cases}$

3.25. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\leqslant 1;\\ ax, & x>1.\end{cases}$

3.26. $f(x)=\begin{cases} |x^2-5x+6|, & x>2;\\ ax-b, & x\leqslant 2.\end{cases}$

3.27. $f(x)=\begin{cases} |x^2-5x+6|, & x<3;\\ ax-b, & x\geqslant 3.\end{cases}$

3.28. $f(x)=\begin{cases} 2^{1/(x-1)}, & x<1;\\ ax^2+bx+1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

3.29. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{x^2+1}+1, & x>0;\\ -x^2+b, & x\leqslant 0.\end{cases}$

3.30. $f(x)=\begin{cases} x^2+x+1, & x\geqslant -1;\\ \sin(\pi(x+a)), & x<1.\end{cases}$

3.31. $f(x)=\begin{cases} x+3, & x\leqslant 3;\\ a\cdot 2^x, & x>3.\end{cases}$

§ 4. Разные задачи

Вычислить пределы:

4.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\sin x-\operatorname{tg} x}{x^2\sin x}$.

4.2. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

Проверить справедливость неравенств:

4.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}>\lim\limits_{x\to -1/2}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-18x-10}+\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$.

4.4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}+\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sqrt{2}-2\cos x}{\sin(x-\pi/4)}>\lg 0{,}005$.

Вычислить пределы:

4.5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2+5x-6}$.

4.6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(2x-\pi)}{\cos 3(x+\pi/2)}$.

4.7. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 2x}{1+\cos^3 x}:\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$.

4.8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^3 x}$.

4.9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$.

4.10. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\cos x-\cos a}$.

4.11. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}$.

4.12. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x}$.

4.13. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin x-\cos x}{\operatorname{tg} x-1}$.

4.14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$.

4.15. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos(\pi/4+x)}{1-\operatorname{tg} x}$.

4.16. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sqrt{2}/2}$.

4.17. $\lim\limits_{x\to 3\pi/2}\dfrac{\sin 2x}{1+\sin x}$.

4.18. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$.

4.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\cos x}$.

4.20. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin(\pi/3-x)}{2\cos x-1}$.

4.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$.

4.22. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sec 2x+1}{\cos x}$.

4.23. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 2x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

4.24. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1+\cos 2x}{\operatorname{ctg}^2 x}$.

4.25. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{\sin(x-a)}$.

4.26. $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\cos^2 x}$.

4.27. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin(\pi/4-x)}{\cos^2 x-1/2}$.

4.28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$.

4.29. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}^2 a}{\operatorname{tg}(x-a)}$.

4.30. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 a}{\sin\dfrac{x-a}{2}}$.

4.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 3x-\operatorname{tg}^3 x}{\operatorname{tg} x}$.

4.32. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x-2}{\sin x-\cos x}$.

4.33. $\lim\limits_{x\to\pi/4} \left[(\sin x-\cos x)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+x\right)\right]$.

4.34. $\lim\limits_{x\to\pi/2} [(1-\sin x)\operatorname{tg}^2 x]$. **4.35.** $\lim\limits_{x\to a}\left[(a-x)\sec\dfrac{\pi x}{2a}\right]$.

4.36. $\lim\limits_{x\to a}\left(\sin\dfrac{a-x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2a}\right)$.

4.37. $\lim\limits_{x\to\operatorname{arctg} 3} \dfrac{\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-3}{\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+3}$.

4.38. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)$. **4.39.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2^x\sin\dfrac{a}{2^x}\right)$.

4.40. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x}$.

Доопределить функции по непрерывности:

4.41. $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt[3]{x^2-1}-2}$ в точке $x=3$.

4.42. $f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{\sin 2x}$ в точке $x=0$.

4.43. $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ в точке $x=0$.

Выяснить, при каком выборе параметров функция $f(x)$ будет непрерывной:

4.44. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-5x+6}, & x\neq 3,\\ A, & x=3\end{cases}$ в точке $x=3$.

4.45. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}, & x\neq 2,\\ A, & x=2.\end{cases}$

ГЛАВА 9

ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1. Вычисление производных

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(a;\ b)$. Возьмем предел отношения приращения функции

$$\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \qquad (1)$$

к приращению независимого переменного Δx $(\Delta x=x-x_0)$ при Δx, стремящемся к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Если этот предел существует, то говорят, что функция $f(x)$ *имеет производную* в точке x_0, или что $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$. Если предел не существует, то говорят, что функция $f(x)$ ***не дифференцируема*** в точке x_0.

Задача, связанная с вычислением производной, исходя из ее определения, заключается в непосредственном вычислении предела (2).

Пример 1.1. Вычислить производную функции

$$f(x)=\sin x.$$

Решение. Составим приращение функции $\Delta f(x_0)$:

$$\Delta f(x_0)=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0.$$

Чтобы найти предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0}{\Delta x},$$

воспользуемся формулой

$$\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

С учетом непрерывности функции $\cos x$ имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x/2}\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x_0.$$

Так как точка x_0 выбрана произвольно, то можно заключить, что

$$(\sin x)'=\cos x.$$

Ответ. $(\sin x)'=\cos x$.

Исходя из определения производной, вычислить производные следующих функций:

1.1. $f(x)=1/x$. **1.2.** $f(x)=\cos x$.
1.3*. $f(x)=e^x$. **1.4*.** $f(x)=\ln x$.
1.5*. $f(x)=x^n$. **1.6.** $f(x)=c$.

Односторонние пределы

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \tag{3}$$

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \tag{4}$$

называются соответственно *левой* и *правой производными* функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначаются $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$. Для существования производной $f'(x_0)$ необходимо и достаточно, чтобы обе производные (левая и правая) существовали в точке x_0 и были равны:

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0). \tag{5}$$

Пример 1.2. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\geqslant 1,\\ x^2, & x<1,\end{cases}$$

не дифференцируема в точке $x=1$.

Решение. Приращение функции в точке $x=1$ равно

$$\Delta f(1)=f(1+\Delta x)-f(1)=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x\geqslant 0,\\ (1+\Delta x)^2-1, & \Delta x<0,\end{cases}$$

или, после преобразований,

$$\Delta f(1)=\begin{cases}\Delta x, & \Delta x\geqslant 0,\\ 2\Delta x+(\Delta x)^2, & \Delta x<0.\end{cases}$$

Следовательно, по определению (3), (4) имеем

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{2\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2,$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

Так как $f'_+(1)\neq f'_-(1)$, то производная $f'(x)$ в точке $x=1$ не существует.

Доказать недифференцируемость следующих функций в указанных точках:

1.7. $f(x)=|x|$ при $x=0$.
1.8. $f(x)=|x^2-5x+6|$ при $x=2$ и $x=3$.
1.9. $f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1,\\ 2-x, & x>1,\end{cases}$

при $x=1$.

1.10*. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

не имеет в точке $x=0$ ни правой, ни левой производных.

1.11. Доказать, что функция $f(x)=x|x|$ дифференцируема в точке $x=0$.

Производные основных элементарных функций:

$$(x^a)'=ax^{a-1}, \tag{6}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a,\quad a>0,\quad (e^x)'=e^x, \tag{7}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a},\quad a>0,\quad a\neq 1,\quad (\ln x)'=\frac{1}{x}, \tag{8}$$

$$(\sin x)'=\cos x, \tag{9}$$

$$(\cos x)'=-\sin x, \tag{10}$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}, \tag{11}$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}, \tag{12}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{13}$$

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}. \tag{14}$$

Правила дифференцирования. Пусть c — постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ — дифференцируемые функции; тогда

$$c' = 0, \tag{15}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x), \tag{16}$$

$$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + g'(x)\,f(x), \tag{17}$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\,g(x) - g'(x)\,f(x)}{g^2(x)}. \tag{18}$$

Теорема о дифференцировании сложной функции. Пусть $y = f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$; тогда сложная функция $F(x) = g[f(x)]$ имеет производную в точке x_0, равную

$$F'(x_0) = g'(y_0)\,f'(x_0). \tag{19}$$

Пример 1.3. Вычислить производную функции

$$F(x) = (x^2 + x + 1)^{100}.$$

Решение. Полагая $y = f(x) = x^2 + x + 1$, $g(y) = y^{100}$, имеем

$$g'(y) = 100y^{99}, \quad f'(x) = 2x + 1.$$

Тогда, согласно (19), получаем

$$F'(x) = 100\,(x^2 + x + 1)^{99}\,(2x + 1).$$

Ответ. $F'(x) = 100\,(x^2 + x + 1)^{99}\,(2x + 1)$.

Вычислить производные следующих сложных функций:

1.12. $y = \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$. **1.13.** $y = \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}}$.

1.14. $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$. **1.15.** $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2 + bx + c)}}$.

1.16. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1 + x}{1 - x}$. **1.17.** $y = \dfrac{(a + bx^n)^m}{(a - bx^n)^m}$.

1.18. $y = \dfrac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x - 5)$.

1.19. $y = \dfrac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10\operatorname{tg}^2 x + 1)}{3\operatorname{tg}^3 x}$.

1.20. $y = \ln\cos\dfrac{x - 1}{x}$.

Предварительно упростив выражения, вычислить производные следующих функций:

1.21. $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} + 1)(x^2 - \sqrt{x})}{x\sqrt{x} + x + \sqrt{x}}$.

1.22. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x + \sqrt{2 - x^2}}\,\sqrt[6]{1 - x\sqrt{2 - x^2}}}{\sqrt[3]{1 - x^2}}$.

1.23. $f(x) = \dfrac{\left[(1 - x^2)^{-1/2} + 1 + \dfrac{1}{(1 - x^2)^{-1/2} - 1}\right]^{-2}}{2 - x^2 - 2\sqrt{1 - x^2}}$.

1.24. $f(x) = \dfrac{(x^{2/m} - 9x^{2/n})\left(\sqrt[n]{x^{1-m}} - 3\sqrt[n]{x^{1-n}}\right)}{(x^{1/m} + 3x^{1/n})^2 - 12x^{(m+n)/(mn)}}$.

1.25. $f(x) = (\sqrt{1 - x^4} + 1) : \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}} + \sqrt{1 - x^2}\right)$.

1.26. $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}} - t^3 + \sqrt[3]{\dfrac{t^5 + 2t^4 + 4t^3}{4 - 4t + t^2}}\right.}{\dfrac{1}{\sqrt{2} - \sqrt{t}} + \dfrac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{2}}}$.

1.27. $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} + 2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) - (\sqrt{x} - 2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} + 1\right)}{(2 - \sqrt{x + 2}) : \left(\sqrt{\dfrac{2}{x} + 1} - \dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}$.

1.28. $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{2x + 2\sqrt{x^2 - 1}}}{\left(\dfrac{\sqrt{x - 1}}{\sqrt{x + 1}} + \dfrac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x - 1}} + 2\right)^{1/3}}$.

1.29. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}} + \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}} - 2}\,(2x + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{(x + 1)^3} - \sqrt{(x - 1)^3}}$;

1.30. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - x^2}}\,(\sqrt{(1 + x)^3} - \sqrt{(1 - x)^3})}{2 + \sqrt{1 - x^2}}$.

1.31. $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt[4]{ax^3} - \sqrt[4]{a^3x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}} + \dfrac{1 + \sqrt{ax}}{\sqrt[4]{ax}}\right)^{-2} \times$

$$\times \sqrt{1 + 2\sqrt{\frac{a}{x}} + \frac{a}{x}}.$$

Если функция $f(x)$ определена на некотором промежутке $[a; b]$, то в качестве значений ее производных на концах этого промежутка принимаются значения левой производной на правом конце и правой — на левом конце соответственно.

Пример 1.4. Вычислить на промежутке $[0; 2]$ производную функции

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}.$$

Решение. Так как выражение под радикалом представляет собой полный квадрат, то, согласно определению модуля, представим данную функцию в следующем виде:

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \in [1;\ 2], \\ 1-x, & x \in [0;\ 1). \end{cases} \qquad (*)$$

Дифференцируя $f(x)$ отдельно на промежутках $[0;\ 1)$ и $(1;\ 2]$, получаем

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0;\ 1), \\ 1, & x \in (1;\ 2]. \end{cases}$$

Так как левая и правая производные $f(x)$ в точке $x=1$ не совпадают, то в точке $x=1$ производной не существует; в качестве значения $f'(x)$ на концах промежутка $[0;\ 2]$ принимаем значения левой производной функции $(*)$ в точке 2 и правой производной функции $(*)$ в точке 0.

Ответ. $f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0;\ 1), \\ 1, & x \in (1;\ 2]. \end{cases}$

Вычислить производные следующих функций:

1.32*. $f(x) = x\dfrac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$.

1.33. $f(x) = \dfrac{2x\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^2-1}}{2\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}\right)^2-1}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{x}}-\sqrt{x}\right)}$.

1.34. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2}}{(x^2+1)\,\frac{1}{x^2}}$.

1.35*. $f(x) = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

§ 2. Промежутки монотонности и экстремумы функций

Говорят, что функция $y=f(x)$ *возрастает* на промежутке $(a;\ b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих $(a;\ b)$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Говорят, что функция $y=f(x)$ *убывает* на промежутке $(a;\ b)$ если для любых x_1 и x_2, принадлежащих $(a;\ b)$, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$ Функции, возрастающие (убывающие) на промежутке $(a;\ b)$, называются *монотонными* на этом промежутке.

Достаточные условия монотонности функции. Пусть функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема на промежутке $(a;\ b)$. Для того чтобы функция была возрастающей на промежутке $(a;\ b)$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f'(x) > 0 \quad \text{при любом} \quad x \in (a;\ b).$$

Для того чтобы функция была убывающей на промежутке $(a;\ b)$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$f'(x) < 0 \quad \text{при любом} \quad x \in (a;\ b).$$

Точки, принадлежащие промежутку $(a;\ b)$, в которых производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* функции $y=f(x)$. Из определения критической точки следует, что если производная функции меняет знак, то это может произойти только при переходе через критическую точку. Таким образом, промежутки убывания, возрастания (промежутки монотонности) функции $f(x)$ ограничены критическими точками. Поэтому, для того чтобы определить промежутки монотонности функции, необходимо:

1) найти критические точки $f(x)$;

2) определить знак производной $f'(x)$ внутри промежутков, ограниченных критическими точками.

Пример 2.1. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$f(x) = xe^{-3x}.$$

Решение. Находим производную

$$f'(x) = e^{-3x} - 3xe^{-3x} = e^{-3x}(1-3x).$$

Производная $f'(x)$ существует всюду и обращается в нуль в точке 1/3. Точка $x = 1/3$ делит числовую ось на два промежутка: $(-\infty;\ 1/3)$ и $(1/3;\ \infty)$. Так как функция e^{-3x} всегда положительна, то знак производной определяется вторым сомножителем. Следовательно, на промежутке $(-\infty;\ 1/3)$ $f'(x) > 0$, а на промежутке $(1/3;\ \infty)$ $f'(x) < 0$.

Ответ. Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty;\ 1/3)$ и убывает на промежутке $(1/3;\ \infty)$.

Исследовать на возрастание и убывание функции:

2.1. $f(x) = \dfrac{x^2-2}{2x+3}$. 2.2. $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

2.3. $f(x) = \dfrac{3}{2}x - \sin^2 x$.

2.4. $f(x) = 2\ln(x-2) - x^2 + 4x + 1$,

2.5. $f(x)=\dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$. **2.6.** $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x}$.

2.7*. Найти множество всех значений параметра a, при которых функция

$$f(x)=\sin 2x-8(a+1)\sin x+(4a^2+8a-14)x$$

является возрастающей для всех $x\in\mathbf{R}$ и при этом не имеет критических точек.

2.8*. Найти все значения параметра a, при которых функция

$$y(x)=8ax-a\sin 6x-7x-\sin 5x$$

возрастает и не имеет критических точек для всех $x\in\mathbf{R}$.

Говорят, что функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 *максимум* (или *минимум*), если найдется такая δ-окрестность точки x_0, принадлежащая области определения функции, что для всех $x\neq x_0$, принадлежащих промежутку $(x_0-\delta;\ x_0+\delta)$, выполняется неравенство

$$f(x)<f(x_0)\qquad(\text{соответственно } f(x)>f(x_0)).$$

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными значениями*.

Необходимое условие существования экстремума функции. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a;\ b)$. Если в некоторой точке $x_0\in(a;\ b)$ функция $f(x)$ достигает своего экстремума, то $f'(x_0)=0$.

Достаточное условие существования экстремума функции. Пусть функция определена и непрерывна на промежутке $(a;\ b)$ и на всем промежутке (за исключением, быть может, конечного числа точек) дифференцируема. Если при переходе через критическую точку производная функции меняет знак, то такая критическая точка является точкой экстремума функции: точкой максимума, если знак меняется с плюса на минус, и точкой минимума, если знак меняется с минуса на плюс.

Пример 2.2. Найти экстремум функции

$$f(x)=\sqrt{2x^2-x+2}.$$

Решение. Находим производную

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+2}}.\qquad(*)$$

Приравниваем производную $f'(x)$ нулю:

$$\frac{1}{2}\,\frac{4x-1}{\sqrt{2x^2-x+2}}=0.$$

Отсюда находим критическую точку $x_0=1/4$. Из выражения $(*)$ видно, что при $x>1/4$ $f'(x)>0$, а при $x<1/4$ $f'(x)<0$, т. е. при переходе через $x_0=1/4$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, $x_0=1/4$ — точка минимума, причем $f(x_0)=\sqrt{15/8}$. Знаменатель выражения $(*)$ положителен для всех $x\in\mathbf{R}$. Следовательно, других критических точек, кроме $x=1/4$, функция $f(x)$ не имеет.

Ответ. $\min\limits_{x\in\mathbf{R}} f(x)=f(1/4)=\sqrt{15/8}$.

Найти экстремумы следующих функций:

2.9. $f(x)=\dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$. **2.10.** $f(x)=x+\sin 2x$.

2.11. $f(x)=xe^{x-x^2}$. **2.12.** $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+9}$.

2.13. $f(x)=2x^3+3x^2-12x+5$. **2.14.** $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

2.15. $f(x)=2x^3-6x^2-18x+7$.

2.16. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Методы исследования функций на экстремум позволяют устанавливать справедливость некоторых трансцендентных неравенств.

Пример 2.3. Доказать справедливость неравенства

$$e^x-x>1\quad\text{при}\quad x\neq 0.\qquad(*)$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=e^x-1-x$$

и найдем ее экстремум. Решая уравнение $f'(x)=0$, т. е. уравнение $e^x-1=0$, получаем $x=0$.

При $x=0$ функция $f(x)$ достигает своего единственного минимума, так как $f'(x)$ при переходе через точку $x=0$ меняет знак с минуса на плюс. Так как $f(0)=0$, то для всех $x\neq 0$ справедливо $f(x)>0$, т. е. $e^x-1-x>0$, или $e^x-x>1$, что и требовалось доказать.

Доказать неравенства:

2.17. $x-x^3/6<\sin x<x$ при $x>0$.

2.18. $\cos x>1-x^2/2$ при $x\neq 0$.

2.19. $\ln(1+x)<x$ при $x>0$.

§ 3. Наибольшее и наименьшее значения функций

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на конечном промежутке $[a; b]$. Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции необходимо найти все максимумы (минимумы) функции на промежутке $(a; b)$, выбрать из них наибольший (наименьший) и сравнить его со значениями функции в точках a и b. Наибольшее (наименьшее) из этих чисел и будет *наибольшим* (*наименьшим*) *значением* функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$; оно обозначается $\max\limits_{x \in [a;\, b]} f(x)$ ($\min\limits_{x \in [a;\, b]} (x)$). При нахождении наибольшего или наименьшего значения функции может оказаться, что внутри промежутка $[a; b]$ производная существует во всех точках промежутка и ни в одной точке промежутка в нуль не обращается (т. е. критические точки функции отсутствуют). Это говорит о том, что в рассматриваемом промежутке функция возрастает или убывает и, следовательно, достигает своего наибольшего и наименьшего значения на концах промежутка.

Пример 3.1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ на промежутке $[1; 6]$.

Решение. Так как

$$f'(x) = \frac{1}{8} - \frac{2}{x^2},$$

то единственной критической точкой, попадающей в заданный промежуток, будет точка $x = 4$. Сравнивая значения функции в точке $x = 4$ со значениями функции на концах промежутка, получаем

$$f(4) = 1, \quad f(1) = 2\frac{1}{8}, \quad f(6) = 1\frac{1}{12},$$

т. е. наименьшее значение $f(x)$ достигается в точке $x = 4$, а наибольшее — на левом конце промежутка (при $x = 1$).

Ответ. $\max\limits_{x \in [1;\, 6]} f(x) = f(1) = 2\frac{1}{8}$; $\min\limits_{x \in [1;\, 6]} f(x) = f(4) = 1$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций на указанных промежутках:

3.1. $f(x) = x^5 - x^3 + x + 2, \quad x \in [-1; 1]$.

3.2. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1, \quad x \in [-2; 1]$.

3.3. $f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in [0; \pi]$.

3.4. $f(x) = \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x, \quad x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3.5. $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x,$

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

При отыскании наибольших (наименьших) значений некоторых функций иногда удобно использовать следующее свойство.

Если непрерывная функция $F(x)$ на промежутке $[a; b]$ может быть представлена в виде $F(x) = f[g(x)]$, где $g(x)$ и $f(y)$ — непрерывные функции на промежутках $x \in [a; b]$ и $y \in [c; d]$ соответственно, $c = \min\limits_{x \in [a;\, b]} g(x)$, $d = \max\limits_{x \in [c;\, d]} g(x)$, то

$$\max_{x \in [a;\, b]} F(x) = \max_{y \in [c;\, d]} f(y) \quad \text{и} \quad \min_{x \in [a;\, b]} F(x) = \min_{y \in [c;\, d]} f(y).$$

Пример 3.2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $F(x) = \frac{\sin 2x}{\sin(x + \pi/4)}$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Решение. Используя формулы

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x),$$

$$\sin 2x = (\sin x + \cos x)^2 - 1,$$

представляем данную функцию в виде сложной функции

$$F(x) = f[g(x)],$$

где

$$f(y) = \frac{y^2 - 1}{y}\sqrt{2}, \quad g(x) = \sin x + \cos x.$$

Найдем наибольшее и наименьшее значения $g(x)$. Критическими точками $g(x)$ будут корни уравнения

$$\cos x - \sin x = 0,$$

из которых в промежуток $[0; \pi/2]$ попадает только $x = \pi/4$. Сравнивая $g(0)$, $g(\pi/4)$ и $g(\pi/2)$, заключаем, что областью изменения $g(x)$ является промежуток $[1; \sqrt{2}]$. Нетрудно заметить, что

$$f'(y) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{1}{y^2}\right) > 0$$

на всей области определения $f(y)$, в том числе и для $y \in [1; \sqrt{2}]$. Следовательно, функция $f(y)$ возрастает на промежутке $[1; \sqrt{2}]$ и достигает своего наибольшего и наименьшего значений соответственно на правом и левом концах промежутка:

$$\max_{y\in[1;\sqrt{2}]} f(y)=f(\sqrt{2})=1,$$
$$\min_{g\in[1;\sqrt{2}]} f(y)=f(1)=0.$$

Эти же значения являются наибольшими и наименьшими и для исходной функции $F(x)$.

Ответ. $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} F(x)=1$, $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]} F(x)=0$.

Найти наибольшие и наименьшие значения функций:

3.6. $f(x)=\dfrac{\sin 2x}{\sin(\pi/4+x)}$, $x\in\left[\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

3.7*. $f(x)=\dfrac{1}{\sin x+4}-\dfrac{1}{\cos x-4}$, $x\in\mathbb{R}$.

3.8. $f(x)=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, $x\in[\pi/6;\ \pi/3]$.

3.9*. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\left(\frac{2+\cos x}{\sin x}\right)^2$$

на промежутке $[0;\ \pi]$.

Нахождение наибольших и наименьших значений функций, содержащих знак абсолютной величины.

Пример 3.3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=|x^2-5x+6| \tag{*}$$

на промежутке $[0;\ 2{,}4]$.

Решение. Для того чтобы раскрыть модуль в выражении (*), найдем корни уравнения $f(x)=0$. Решая уравнение $x^2-5x+6=0$, получаем $x=2$, $x=3$. Таким образом,

$$f(x)=\begin{cases} x^2-5x-6 & \text{при } x\in(-\infty;\ 2)\cup(3;\ \infty);\\ -(x^2-5x+6) & \text{при } x\in[2;\ 3].\end{cases} \tag{**}$$

Из (**) видно, что на исследуемом промежутке $[0;\ 2{,}4]$ функция $f(x)$ допускает два представления в зависимости от значения аргумента:

$$f(x)=\begin{cases} -(x^2-5x+6), & x\in(2;\ 2{,}4],\\ x^2-5x+6, & x\in[0;\ 2].\end{cases}$$

Вычислим производную функции $f(x)$:

$$f'(x)=\begin{cases} -(2x-5), & x\in(2;\ 2{,}4];\\ 2x-5, & x\in[0;\ 2).\end{cases}$$

При $x\in(2;\ 2{,}4]$ $f'(x)>0$, следовательно, $f(x)$ возрастает, а при $x\in[0;\ 2)$ $f'(x)<0$, следовательно, $f(x)$ убывает; точка $x=2$ — критическая точка, так как производной $f'(x)$ в этой точке не существует. Сравнивая значения функции на концах промежутка $[0;\ 2{,}4]$ с ее значением в критической точке, заключаем, что

$$\max_{x\in[0;\,2{,}4]} f(x)=f(0)=6,\qquad \min_{x\in[0;\,2{,}4]} f(x)=f(2)=0.$$

Ответ. $\max\limits_{x\in[0;\,2{,}4]} f(x)=f(0)=6$, $\min\limits_{x\in[0;\,2{,}4]} f(x)=f(2)=0$.

Найти наибольшее и наименьшее значения следующих функций на указанных промежутках:

3.10. $f(x)=\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$, $x\in[-2;\ 0]$.

3.11. $f(x)=\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{1+2x+x^2}$,
а) $x\in[0;\ 2]$; б) $x\in[-2;\ 0]$.

3.12. $f(x)=\sqrt{1-2x+x^2}-\sqrt{1+2x+x^2}$, $x\in(-\infty;\ \infty)$.

3.13. $f(x)=|x^2+2x-3|+\dfrac{3}{2}\ln x$, $x\in\left[\dfrac{1}{2};\ 4\right]$.

3.14. Найти точки минимума функции

$$f(x)=4x^3-x|x-2|,\qquad x\in[0;\ 3],$$

и ее наибольшее значение на этом промежутке.

3.15. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\sqrt{x(10-x)}.$$

3.16*. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=(x-1)^2\sqrt{x^2-2x+3},\qquad x\in[0;\ 3].$$

3.17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=|x^2+x|+|x^2+5x+6|$$

на отрезке $\left[-\dfrac{5}{2};\ \dfrac{1}{2}\right]$.

§ 4. Задачи, сводящиеся к нахождению наибольшего и наименьшего значений и эстремумов функций

В условиях многих задач явно не формулируется, что требуется найти наибольшее и наименьшее значения и экстремумы. К таким задачам относятся, например, задачи, связанные с нахождением множества значений функций, Пример 4.1. Найти образ промежутка [−1; 3] при отображении, заданном функцией

$$f(x) = 4x^3 - 12x.$$

Решение. Чтобы найти образ данного промежутка, нужно найти множество значений функции $f(x)$ для $x \in [-1; 3]$, которое в силу непрерывности исходной функции представляет собой промежуток $\left[\min\limits_{x \in [-1;\ 3]} f(x);\ \max\limits_{x \in [-1;\ 3]} f(x)\right]$. Таким образом, исходная задача сводится к задаче на отыскание наибольшего и наименьшего значений функции $f(x)$ на промежутке [−1; 3].

Критические точки $f(x)$ находятся из уравнения

$$12x^2 - 12 = 0,$$

корнями которого являются $x_1 = 1$, $x_2 = -1$. Сравнивая значения функции $f(x)$ в критических точках и на концах промежутка, получаем

$$\max_{x \in [-1;\ 3]} f(x) = f(3) = 72,$$
$$\min_{x \in [-1;\ 3]} f(x) = f(1) = -8.$$

Следовательно, образом промежутка [−1; 3] при отображении, заданном исходной функцией, будет промежуток [−8; 72].

Ответ. [−8; 72].

4.1. Найти множество, на которое отображает луч $[1; \infty)$ производная функции $f(x) = x(\ln x - 1)$.

4.2. Найти образ промежутка [0; 0,5] при отображении, заданном производной функции $f(x) = \operatorname{tg} 3x$.

4.3. Найти пересечение множеств, на которые отображается промежуток [0; 1] производными функций $y_1 = \dfrac{x+3}{x-5}$, $y_2 = \sqrt[3]{6x+5}$.

4.4*. В какой промежуток переводит всю действительную прямую функция $y = \dfrac{x-1}{x^2-3x+3}$?

4.5. Найти множество значений функций:

а) $y = \dfrac{x^2}{x^4+1}$; б) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$.

4.6*. Доказать, что справедливо неравенство

$$\frac{x}{ax^2+b} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{ab}}.$$

4.7*. Доказать, что для функции $f(x) = \cos x \sin 2x$ справедливо неравенство

$$\min_{x \in [-\pi;\ \pi]} f(x) > -7/9.$$

4.8*. Доказать, что для функции $f(x) = \sin x \sin 2x$ выполнено неравенство

$$\max_{x \in [-\pi;\ \pi]} f(x) < 0{,}77.$$

4.9*. Доказать, что для $x \in [0; \pi/2]$ справедливо неравенство

$$\cos x \sqrt{\sin x} \leqslant 2^{1/2} \cdot 3^{-3/4}.$$

4.10. Доказать, что при $x \in [3/4; 2]$ справедливо неравенство

$$1 \leqslant \sqrt[3]{\frac{x^2}{2x-1}} \leqslant \sqrt{\frac{4}{3}}.$$

4.11*. Показать, что при любых действительных значениях x функция

$$y = \frac{x^2+x+1}{x^2+1}$$

не может иметь значений, больших 3/2, и значений, меньших 1/2.

4.12*. Найти все a, при которых имеется хотя бы одна пара чисел (x, y), удовлетворяющих условиям

$$x^2 + (y+3)^2 < 4, \quad y = 2ax^2.$$

4.13*. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна наименьшему значению квадратного трехчлена $2x^2 - 4x + 10$. Найти сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии.

4.14*. При каком значении параметра a значения функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + a$$

в точке $x = 2$ и в точках экстремума, взятые в некотором порядке, являются членами геометрической прогрессии?

4.15. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции

$$f(x) = x^3 + 3x - 9$$

на промежутке [−2; 3]; разность между первым и вторым членами прогрессии равна $f'(0)$. Найти знаменатель прогрессии.

4.16. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наименьшему значению функции

$$f(x) = 3x^2 - x + \frac{25}{12},$$

а первый член прогрессии равен квадрату ее знаменателя. Найти знаменатель прогрессии.

4.17*. Найти наименьшее значение a, при котором уравнение

$$\frac{4}{\sin x}+\frac{1}{1-\sin x}=a$$

имеет на промежутке $(0;\ \pi/2)$ хотя бы одно решение.

4.18*. Доказать, что функция

$$z=(x+1/x)^2+(y+1/y)^2$$

не меньше 12,5, если $x>0$, $y>0$, $x+y=1$.

4.19*. Показать, что функция

$$z=2x^2+2xy+y^2-2x+2y+2$$

не меньше чем (-3).

4.20*. При каком значении a сумма квадратов корней уравнения

$$x^2-(a-2)x-a-1=0$$

принимает наименьшее значение?

4.21*. Доказать, что при всех значениях $x\in\mathrm{R}$ имеет место неравенство

$$-\frac{1}{2}\leqslant\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{1}{2}.$$

4.22. Доказать, что на промежутке

$$\left[-\frac{3}{2};\ 10^{-3}\sqrt{\sqrt{25}^{\log_5 5}+\sqrt{49}^{\log_5 7}}\right]$$

справедливо неравенство $0\leqslant 2x+3\sqrt[3]{x^2}\leqslant 1$.

4.23. Доказать, что при $\alpha\in[0;\ \pi/3]$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{\sin(\pi/3+\alpha)}+\frac{1}{\sin(\pi/3-\alpha)}\geqslant\frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

4.24. Доказать, что для всех x и y справедливо неравенство

$$x^4+y^4+\frac{2}{x^2y^2}\geqslant 4.$$

4.25*. Доказать справедливость неравенства

$$\frac{9-\sqrt{85}}{2}<\frac{-2x+3}{x^2+6x+10}<\frac{9+\sqrt{85}}{2}.$$

4.26*. Доказать, что $1/4<\sin^6 x+\cos^6 x\leqslant 1$.

4.27. Доказать, что при $x\in[0;\ 2/3]$ справедливо неравенство

$$5e^{1/3}<\left(3x^2-7x+7\right)e^x<\frac{11}{3}\sqrt[3]{e^2}.$$

4.28. Сколько корней на отрезке $[0;\ 1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2-1)(4x^4-8x^2+1)=1?$$

4.29. При каких значениях p и q график кубической параболы $y=x^3+px+q$ касается оси Ox?

4.30. При каком условии уравнение $x^3+px+q=0$ имеет:
1) один действительный корень;
2) три действительных корня?

§ 5. Текстовые задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций

Для решения текстовой задачи на наибольшее (наименьшее) значение следует сначала, используя условия задачи, составить функцию $f(x)$ и определить промежуток изменения ее аргумента, а затем отыскать наибольшее (наименьшее) значение этой функции на найденном промежутке.

Пример 5.1. Число 26 представить в виде суммы трех положительных слагаемых, сумма квадратов которых наименьшая, если известно, что второе слагаемое втрое больше первого.

Решение. Обозначим неизвестные слагаемые x, y, z. По условию задачи введенные неизвестные удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}x+y+z&=26,\\ y&=3x.\end{aligned}\tag{$*$}$$

Используя $(*)$, выразим неизвестные y и z через x:

$$y=3x,\quad z=26-4x.\tag{$**$}$$

Составим теперь функцию, минимум которой требуется найти:

$$S(x)=x^2+9x^2+(26-4x)^2.$$

Промежуток изменения аргумента в данном случае определяется из условия положительности всех слагаемых. Решая систему неравенств

$$\begin{aligned}x&>0,\\ 26-4x&>0,\end{aligned}$$

получаем, что искомый промежуток имеет вид $\left(0;\ \frac{13}{2}\right)$. Таким образом, задача свелась к отысканию минимума функции $S(x)$ на промежутке $\left(0;\ \frac{13}{2}\right)$. Единственной критической точкой функции $S(x)$ на промежутке $\left(0; \frac{13}{2}\right)$ является точка $x = 4$. При переходе через эту точку производная функции $S(x)$ меняет знак с минуса на плюс, следовательно, $S(x)$ убывает на промежутке $(0; 4)$ и возрастает на промежутке $\left(4; \frac{13}{2}\right)$. Таким образом, при $x = 4$ функция $S(x)$ достигает своего минимума. Подставляя $x = 4$ в уравнения (**), получаем значения остальных неизвестных.

Ответ. $26 = 4 + 12 + 10$.

5.1. Число 18 представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

5.2. Число 36 представить в виде произведения двух сомножителей так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

5.3. Число 180 представить в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы два из них относились, как $1:2$, а произведение всех трех слагаемых было наибольшим.

5.4. Данное положительное число a представить в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

5.5*. Парабола $y=x^2+px+q$ пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой 1. При каких p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox минимально? Найти это расстояние.

5.6. Найти наименьшее из расстояний от точки M с координатами $(0, -2)$ до таких точек (x, y), что

$$y = \frac{16}{\sqrt{3x^3}} - 2, \qquad x > 0.$$

5.7. В сегмент параболы $y^2 = 2px$, отсекаемый прямой $x = 2a$, вписать прямоугольник наибольшей площади.

Пример 5.2. Найти высоту конической воронки наибольшего объема, если ее образующая равна l.

Решение. Объем конуса, площадь основания которого равна S, а высота — H, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

где $S = \pi R^2$, R — радиус окружности, лежащей в основании конуса. По теореме Пифагора R и H связаны равенством

$$R^2 + H^2 = l^2.$$

Воспользовавшись этим равенством, выразим V как функцию только одного переменного H:

$$V = \frac{1}{3}\pi (l^2 - H^2) H.$$

Решая уравнение

$$V'(H) = \frac{\pi}{3}(l^2 - 3H^2) = 0,$$

находим две критические точки функции $V(H)$: $H_1 = l/\sqrt{3}$, $H_2 = -l/\sqrt{3}$, из которых только точка H_1 принадлежит промежутку $(0; l)$. При переходе через точку H_1 функция $V'(H) = \frac{1}{3}(l^2 - 3H^2)$ меняет знак с плюса на минус, и, следовательно, на промежутке $(0; l/\sqrt{3})$ функция $V(H)$ возрастает, а на промежутке $(l/\sqrt{3}, l)$ убывает. Таким образом, $H = l/\sqrt{3}$ — высота конуса максимального объема при заданной длине образующей l.

Пример 5.3. В трапецию $ABCD$, боковая сторона AB которой (длины 8 см) перпендикулярна основанию, вписать прямоугольник наибольшей площади так, чтобы одна из его сторон лежала на большем основании трапеции. Основания трапеции равны 6 и 10 см соответственно. Вычислить площадь этого прямоугольника.

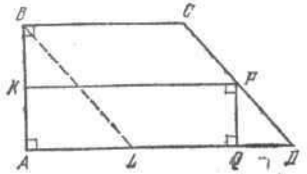


Рис. 9.1

Решение. Рассмотрим отдельно два случая. Первый — вершина прямоугольника P лежит на боковой стороне трапеции CD (см. рис. 9.1). Второй — вершина P лежит на основании трапеции BC.

В первом случае обозначим стороны прямоугольника $AQ = x$ и $AK = y$. Составим уравнение, связывающее неизвестные x и y. Для этого проведем вспомогательный отрезок BL, параллельный стороне CD (см. рис. 9.1), и рассмотрим два прямоугольных треугольника ABL и QPD. Катеты этих треугольников равны соответственно $AB = 8$, $AL = 4$, $QD = 10 - x$, $PQ = y$. Искомое уравнение получается из условия подобия треугольников ABL в QPD:

$$\frac{y}{10 - x} = 2, \quad \text{или} \quad y = 20 - 2x.$$

Площадь прямоугольника $AKPQ$ равна

$$S(x) = x(20 - 2x).$$

Интервал изменения x в первом случае находится из условия, что точка Q — проекция точки P, лежащей на стороне CD, следовательно, $x \geqslant 6$.

Таким образом, задача свелась к отысканию наименьшего значения функции $S(x)$ на промежутке $[6; 10]$. Единственная критическая точка функции $S(x)$: $x=5$ не принадлежит найденному промежутку. Следовательно, производная функции $S(x)$ не меняет на этом промежутке знак. Вычисляя производную $S(x)$ в произвольной точке промежутка $[6; 10]$, убеждаемся, что она отрицательна. Таким образом, наибольшее значение $S(x)$ достигается в левом конце промежутка, т. е.

$$\max_{x\in[6;\ 10]} S(x) = S(6) = 48 \text{ см}^2.$$

Площадь прямоугольников, относящихся ко второму случаю, не превосходит 48 см², так как при одинаковой боковой стороне, равной 8 см, длины их оснований не могут быть больше 6 см.

Ответ. 48 см².

5.8. Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R, найти тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.

5.9. Определить размеры цилиндра, имеющего наибольший объем, если площадь его полной поверхности равна 2π.

5.10*. Среди всех прямоугольных треугольников площади S найти тот, для которого площадь описанного круга будет наименьшей.

5.11*. В полукруг радиуса l вписана трапеция $ABCD$ так, что ее основание AD является диаметром, а вершины B и C лежат на окружности. Какова величина угла φ при основании трапеции $ABCD$, имеющей наибольший периметр?

5.12*. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине α найти треугольник с наибольшим периметром.

5.13. В равнобедренный треугольник ABC вписан прямоугольник, две вершины которого лежат на основании AC, две другие — на сторонах AB и BC. Найти наибольшее значение площади прямоугольника, если $|AB|=12$, $|BD|=10$, BD — высота треугольника ABC.

5.14. Рассматриваются всевозможные трапеции, обе боковые стороны и меньшее основание которых равны a. Найти величину большего основания трапеции, имеющей наибольшую площадь.

5.15. Длина стороны квадрата $ABCD$ — 10 см. На его сторонах отложены отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 длины x каждый, причем $A_1\in AB$, $B_1\in BC$, $C_1\in CD$, $D_1\in DA$. Доказать, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, и найти значение x, при котором площадь этого квадрата — наименьшая.

5.16. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник. При каком значении угла α при вершине треугольника высота H, проведенная к боковой стороне, имеет наибольшую длину? Найти эту длину.

5.17*. Каков должен быть угол α при вершине равнобедренного треугольника заданной площади S, чтобы радиус r вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?

При участии тела в двух независимых движениях его путь (или проекция пути на некоторое направление) является функцией от двух или более переменных, связь между которыми может быть установлена из физических соображений.

5.18. Путнику требуется попасть на противоположный берег реки. Под каким углом α ему следует направить лодку, чтобы добиться наименьшего сноса, если скорость лодки равна $V_л$, а скорость реки — $V_р$?

5.19. Тело бросают под углом α к горизонту со скоростью V_0. При каком значении угла α тело улетит дальше всего?

5.20*. Определить наименьшую высоту $h=|OB|$ двери вертикальной башни $ABCD$, чтобы через эту дверь в башню можно было внести жесткий стержень длины l; конец стержня скользит вдоль горизонтальной прямой, на которой находится основание башни AB. Ширина башни $|AB|=d<l$.

5.21. На странице текст должен занимать 384 см². Верхние и нижние поля должны быть по 3 см, а правые и левые — по 2 см. Если принять во внимание только экономию бумаги, то каковы быть должны оптимальные размеры страницы?

5.22. Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота y этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление: а) на сжатие; б) на изгиб?

Примечание. Сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения, а на изгиб — произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты.

5.23. Лампа висит над центром круглого стола радиуса r. При какой высоте h лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшей? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения луча света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

5.24. Требуется устроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была огорожена сеткой, а четвертой стороной примыкала к длинной каменной стене. Какова наивыгоднейшая (в смысле площади) форма площадки, если имеется l погонных метров сетки?

5.25. На прямолинейном отрезке AB длины a, соединяющем два источника света A (силы p) и B (силы q), найти точку M, освещаемую слабее всего. (Освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

5.26*. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки A берега. Пассажир лодки желает достигнуть точки B, находящейся на берегу на расстоянии 5 км от A. Лодка движется со скоростью 4 км/час, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна прибыть лодка, чтобы пассажир достиг точки B в кратчайшее время?

5.27*. Дождевая капля, начальная масса которой m_0, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряется так, что убыль массы пропорциональна времени (коэффициент пропорциональности равен k). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей и какова она? (Сопротивлением воздуха пренебрегаем.)

5.28*. Расходы на топку парохода пропорциональны кубу его скорости. Известно, что при скорости 10 км/ч расходы на топливо составляют 30 руб. в час; остальные расходы (не зависящие от скорости) составляют 480 руб. в час. При какой скорости парохода общая стоимость 1 км пути будет наименьшей? Какова будет при этом общая сумма расходов в час?

5.29. Для доставки продукции завода из пункта N в город A строится шоссе NP, соединяющее завод с железной дорогой AB, проходящей через город A. Стоимость перевозок по шоссе вдвое больше, чем по железной дороге. К какому пункту P нужно провести шоссе, чтобы общая стоимость перевозок продукции завода из пункта N в город A по шоссе и по железной дороге была наименьшей? Расстояние от N до железной дороги равно 100 км, а расстояние от города A до станции железной дороги, находящейся на одной окружности с A и N, которые находятся в концах диаметра этой окружности, равно a км.

При решении задач о времени достижения наименьшего расстояния между двумя объектами, двигающимися под углом друг к другу, следует воспользоваться тем, что расстояние между объектами, достигнутое к моменту времени t, представляет собой одну из сторон треугольника, двумя другими сторонами которого являются некоторые функции расстояний, пройденных объектами к этому моменту.

5.30. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 и 50 км/ч. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени машины находятся от перекрестка на расстояниях 2 и 3 км (соответственно), определите, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.

5.31*. Три пункта A, B, C расположены так, что $\angle ABC = 60°$. Одновременно из точки A выходит автомобиль, а из точки B — поезд. Автомобиль движется по направлению к B со скоростью 80 км/ч, а поезд — к пункту C со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если $|AB| = 200$ км?

5.32*. Два самолета летят горизонтально на одной высоте под углом 120° друг к другу с одинаковой скоростью v. В некоторый момент один из самолетов прилетел в точку пересечения путей, а второй в этот момент находился в a км от нее (не долетев до точки пересечения). Через сколько времени после этого момента расстояние между самолетами будет наименьшим?

5.33. Определить, при каком диаметре круглого отверстия в плотине секундный расход воды Q будет иметь наибольшее значение, если $Q = cy\sqrt{h-y}$, где h — глубина низшей точки отверстия (считать h и коэффициент c постоянными).

5.34. Стоимость бриллианта пропорциональна квадрату его массы. При обработке бриллиант был расколот на две части. Каковы размеры частей, если известно, что при этом произошла максимальная потеря стоимости?

5.35. Составляется электрическая цепь из двух параллельно соединенных сопротивлений. При каком соотношении между этими сопротивлениями сопротивление цепи минимально, если при последовательном соединении сопротивлений оно равно R?

5.36*. Гонцу нужно добраться из пункта A, находящегося на одном берегу реки, в пункт B, находящийся на другом берегу. Зная, что скорость движения по берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом α гонец должен пересечь реку, для того чтобы достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки равна h, расстояние между пунктами A и B (вдоль берега) — d.

5.37*. Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой прямой линией. Скорость распространения света в первой среде равна v_1, а во второй — v_2. Пользуясь *принципом Ферма*, согласно которому световой луч распространяется вдоль той кривой AMB, для прохождения которой требуется минимум времени, вывести закон преломления светового луча.

5.38*. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон отражения светового луча от плоскости в однородной среде.

5.39. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R, течет ток I, то количество тепла, выделяющегося в единицу времени, пропорционально I^2R. Определить, как следует разветвить ток I на токи I_1 и I_2 при помощи двух проводов с сопротивлениями R_1 и R_2, чтобы выделение тепла было наименьшим.

5.40. Прямоугольный участок площадью 9000 м² необходимо огородить забором, две противоположные стороны которого каменные, а другие — деревянные. Один метр деревянного забора стоит 10 р., а каменного — 25 р. Какое наименьшее количество денег может быть выделено по смете на строительство этого забора?

5.41*. Требуется построить некоторое количество одинаковых жилых домов с общей площадью 40 000 м². Затраты на постройку одного дома складываются из стоимости фундамента, пропорциональной корню квадратному из величины жилой площади дома, и стоимости наземной части, пропорциональной кубу корня квадратного из величины жилой площади. Строительство дома на 1000 м² обходится в 184,8 тыс. р., причем в этом случае стоимость наземной части составляет 32 % стоимости фундамента. Определить, какое количество домов нужно построить, чтобы стоимость затрат была наименьшей, и найти эту стоимость.

При решении некоторых задач вместо нахождения наибольшего (наименьшего) значения величины, указанной в формулировке задачи, удобнее искать наибольшее (наименьшее) значение другой величины, представляющей монотонную функцию от первой.

5.42*. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой 5,6 м. На каком расстоянии от колонны должен стоять человек ростом (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

5.43*. По прямолинейному шоссе едет экскурсионный автобус. В стороне от шоссе расположен дворец, от парадного входа которого идет дорога перпендикулярно шоссе. На каком расстоянии от точки пересечения этих дорог должен остановиться автобус, чтобы экскурсанты могли лучше рассмотреть из автобуса фасад дворца, если длина дворца — $2a$, фасад расположен под углом 60° относительно шоссе и расстояние от парадного входа (который является центром симметрии дворца) до шоссе равно b?

5.44*. Груз весом P, лежащий на горизонтальной площадке, должен быть сдвинут с места приложенной силой. Сила трения пропорциональна силе, прижимающей тело к плоскости, и направлена против двигающей силы; коэффициент пропорциональности (коэффициент трения) равен k. Под каким углом α к горизонту надо приложить силу, чтобы величина ее оказалась наименьшей? Определить наименьшую величину сдвигающей силы.

5.45*. На наклонной плоскости лежит груз весом P. На вершине наклонной плоскости расположен блок, через который перекинута веревка, привязанная одним концом к грузу, а другим — к гире весом p $(p < P)$. При каком угле α груз будет удержан на наклонной плоскости гирей наименьшего веса, если коэффициент трения равен k и $\alpha \in [\operatorname{arctg} k;\ \pi/2]$?

5.46. Рычаг второго рода имеет точку опоры в A, а в точке B $(AB = a)$ подвешен груз P. Вес единицы длины рычага равен p. Какова должна быть длина рычага, чтобы груз P уравновешивался наименьшей силой? (Момент уравновешивающей силы должен быть равен сумме моментов груза P и рычага)

Иногда задачи, сформулированные как задачи на наибольшее и наименьшее значения, допускают более простые решения, основанные на геометрических соображениях.

Пример 5.4. Русла двух рек (в пределах некоторой области) представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить эти реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

Решение. Геометрическое место точек, находящихся на расстоянии d от прямой линии, представляет собой две прямые, параллельные данной, проведенные на этом расстоянии по обе стороны от нее. Точки, лежащие внутри образованной таким образом полосы, находятся от данной прямой на расстоянии, меньшем d, а вне полосы — на расстоянии, большем d. Если прямая не пересекает параболу, то, увеличивая ширину полосы, мы в конце концов коснемся параболы. Полученная точка касания будет точкой параболы, находящейся ближе всего к прямой. Следовательно, для нахождения этой точки достаточно найти координаты точки касания той касательной, которая параллельна данной прямой. Из условия параллельности (см. § 6) имеем

$$2x = 1 \Rightarrow x = 1/2 \quad \text{и} \quad y = 1/4.$$

Для того чтобы найти точку на прямой (второй конец канала), запишем уравнение прямой, перпендикулярной прямой $x - y - 2 = 0$ и переходящей через точку (1/2, 1/4):

$$y - 1/4 = -(x - 1/2), \quad \text{или} \quad y = -x + 3/4.$$

Решая систему уравнений

$$y = -x + 3/4,$$
$$y = x - 2,$$

получаем $x = 11/8$, $y = -5/8$.

Ответ. Координаты концов канала: (1/2, 1/4) и (11/8, —5/8).

5.47. Прямая l проходит через точки (3, 0) и (0, 4). Точка A лежит на параболе $y = 2x - x^2$. Найти расстояние ρ от точки A до прямой в случае, когда A совпадает с началом координат, и указать координаты точки $A(x_0, y_0)$ на параболе, при которых расстояние от нее до прямой будет наименьшим.

5.48*. Четыре точки A, B, C, D в указанном порядке лежат на параболе $y = ax^2 + bx + c$. Координаты A, B и D известны: A (—2, 3), B (—1, 1), D (2, 7). Определить координаты C в случае, когда площадь четырехугольника $ABCD$ наибольшая.

5.49. На координатной плоскости даны точки A (—2, 0) и B (0, 4) и прямая l: $y = x$. Найти периметр треугольника AMB, где M — точка с абсциссой 3, лежащая на прямой l. При каком положении точки M на прямой l периметр треугольника AMB наименьший?

5.50*. Дан угол $\angle AOB$ и внутри него точка M. Как следует провести через точку M прямую, чтобы она отсекла от угла треугольник наименьшей площади?

5.51. Дан угол $\angle AOB$ и внутри него точка M. Как построить треугольник наименьшего периметра, чтобы одна его вершина была в точке M, вторая — на стороне AO и третья — на стороне BO данного угла?

5.52. Рассматриваются такие всевозможные трапеции, вписанные в окружность радиуса R, что центр окружности лежит внутри трапеции, а одно из оснований равно $R\sqrt{3}$. Найти боковую сторону той из трапеций, которая имеет наибольшую площадь.

5.53. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ (D — вершина, ABC — основание). Известно, что $|AB| = a$, $|AD| = b$. Пирамиду пересекает плоскость α, параллельная ребрам AD и BC. На каком расстоянии от ребра AD должна быть проведена плоскость α, чтобы площадь сечения была наибольшей?

5.54. Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, у которых основаниями являются квадраты, а каждая из боковых граней имеет периметр 6 см. Найти среди них параллелепипед с наибольшим объемом и вычислить величину этого объема.

5.55. В круговой сектор радиуса R с прямым центральным углом вписан прямоугольник так, что одна его вершина совпадает с центром круга, а противоположная вершина лежит на окружности. Найти длины сторон прямоугольника, имеющего наибольшую площадь.

5.56. Хорда AB равна радиусу окружности. Хорда CD, параллельная AB, проведена так, что площадь четырехугольника $ABCD$ максимальна. Найти угловую величину меньшей из дуг, стягиваемых хордой CD.

5.57*. В данный круговой сектор радиуса R вписать прямоугольник наибольшей площади (угол сектора равен α). Вычислить значение этой площади.

§ 6. Задачи на геометрический смысл производной

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $y_0 = f(x_0)$. Прямая, определяемая уравнением

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0), \tag{1}$$

называется *касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$. Записывая уравнение (1) в виде

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \tag{2}$$

можно заключить, что из всех прямых, проходящих через точку $M(x_0, y_0)$, касательной к графику функции $f(x)$ будет та прямая, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0)$ (угловой коэффициент есть тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox).

Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется *нормалью* к графику функции $y = f(x)$ в этой точке. Уравнение нормали имеет вид

$$(y - y_0) f'(x_0) + (x - x_0) = 0. \tag{3}$$

Под *углом между графиками* функций

$$y = f_1(x) \quad \text{и} \quad y = f_2(x)$$

в их общей точке $M(x_0, y_0)$ понимается угол α между касательными к этим графикам в точке $M(x_0, y_0)$. Тангенс угла вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \left| \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)} \right|. \tag{4}$$

Если выражение $1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)$ обращается в нуль, то кривые пересекаются под прямым углом.

Для того чтобы получить уравнение касательной (нормали) к графику функции $y = f(x)$ в точке, абсцисса которой известна и равна x_0, достаточно найти значения $f'(x_0)$ и $y = f(x_0)$ и подставить их в уравнение (1) (соответственно в (3)). Координаты точки на графике функции, в которой требуется провести касательную, определяются из условий задачи.

Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Пусть прямые заданы уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Для того чтобы эти прямые были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1 = k_2$. Для того чтобы эти прямые были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы $k_1k_2 = -1$.

Пример 6.1. На кривой $y = x^2 - 7x + 3$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = -5x + 3$.

Решение. Из условия параллельности двух прямых следует, что угловой коэффициент касательной в искомой точке должен быть равен (-5) Тогда абсциссу точки касания найдем, используя равенство

$$y'(x) = 2x - 7 = -5 \Rightarrow x = 1,$$

а ординату — подстановкой $x = 1$ в уравнение кривой $y(1) = -3$.

Ответ. Искомая точка имеет координаты $(1, -3)$.

6.1. На кривой $y = x^3 - 3x + 2$ найти точки, в которых касательная параллельна прямой $y = 3x$.

6.2. Записать уравнение горизонтальной касательной к графику функции $y = e^x + e^{-x}$.

6.3. Записать уравнение касательной к графику функции $y = \cos(2x - \pi/3) + 2$ в точке с абсциссой $x_0 = \pi/2$.

6.4. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y = x^2 + 4x - 17$, проведенная в точке $M\ (5/2, -3/4)$? Записать уравнение этой касательной.

6.5*. Известно, что прямая $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{32}$ является касательной к графику функции $f(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x$. Найти координаты точки касания.

6.6. Показать, что координаты точки пересечения касательных к кривой $y = 1 - x^2/a^2$, проведенных через точки с координатами $y = 0$, не зависят от параметра a. Найти координаты точки пересечения.

6.7. Вычислить площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y = x/(2x - 1)$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

6.8. Найти уравнение общей касательной к кривым

$$y = x^2 + 4x + 8, \quad y = x^2 + 8x + 4.$$

6.9. При каком значении $x_0 \in [0, \pi/2]$ касательные к графику функции $f(x) = \sin x + \sin 2x$ в точках с абсциссами x_0 и $x_0 + \pi/2$ параллельны?

6.10. Найти все значения x_0, при которых касательные к графикам функций

$$y(x) = 3\cos 5x, \quad y(x) = 5\cos 3x + 2$$

в точках с абсциссой x_0 параллельны.

6.11. Найти координаты точек пересечения с осью Ox тех касательных к графику функции

$$y(x) = \frac{x+1}{x-3},$$

которые образуют с осью Ox угол $3\pi/4$.

6.12*. На графике функции $y(x) = x^3 - 3x^2 - 7x + 6$ найти все точки, в каждой из которых касательные к этому графику отсекают от положительной полуоси Ox вдвое меньший отрезок, чем от отрицательной полуоси Oy. Определить длины отсекаемых отрезков.

6.13*. Хорда параболы $y = -a^2x^2 + 5ax - 4$ касается кривой $y = 1/(1 - x)$ в точке $x = 2$ и делится этой точкой пополам. Найти a.

6.14. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = |x^2 - |x||$ в точке с абсциссой $x = -2$.

6.15. Две касательные к графику функции $y = \sqrt{17(x^2 + 1)}$ пересекаются под прямым углом в некоторой точке оси Oy. Записать уравнения касательных.

Пример 1.2. Определить, под каким углом синусоида

$$y = \frac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$$

пересекает ось абсцисс в начале координат.

Решение. Искомый угол по определению равен углу наклона касательной к оси абсцисс, проведенной к синусоиде в начале координат. Таким образом, тангенс искомого угла совпадает с угловым коэффициентом этой касательной и равен значению производной функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin 3x$, вычисленному при $x = 0$. Так как

$$y' = \frac{3}{\sqrt{3}}\cos 3x,$$

то $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{3}}$ и, следовательно, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.

Ответ. $\alpha = \pi/3$.

6.16. Показать, что касательные, проведенные к графику функции

$$y = \frac{x-4}{x-2}$$

в точках пересечения его с осями координат, параллельны.

6.17. В каких точках касательная к графику функции

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$$

образует с осью Ox угол 45°?

6.18. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная, проведенная к кривой $y = 2x^3 - x$ в точке пересечения этой кривой с осью Oy?

6.19.** Показать, что кривые, задаваемые уравнениями

$$xy = a^2, \quad x^2 - y^2 = b^2,$$

пересекаются под прямым углом.

6.20*. Показать, что семейства линий, задаваемых уравнениями

$$y = ax, \quad y^2 + x^2 = c^2,$$

при любых a и c пересекаются под прямым углом.

В случае, когда требуется найти уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$, проходящей через заданную точку $M(x_1, y_1)$, не принадлежащую графику этой функции, абсциссу x_0 и ординату y_0 точки касания можно определить из системы уравнений

$$\begin{gathered} y_1 - y_0 = f'(x_0)(x_1 - x_0), \\ f(x_0) = y_0. \end{gathered} \tag{5}$$

Пример 6.3. В какой точке кривой

$$y = x^2 - 5x + 6 \tag{*}$$

следует провести касательную для того, чтобы последняя проходила через точку $M_1(1, 1)$?

Решение. Составим систему (5):

$$\begin{gathered} 1 - y_0 = (2x_0 - 5)(1 - x_0), \\ y_0 = x_0^2 - 5x_0 + 6. \end{gathered}$$

Подставляя y_0 из второго уравнения в первое, получаем квадратное уравнение

$$x_0^2 - 2x_0 = 0.$$

Отсюда искомые точки имеют координаты (2, 0) и (0, 6).

Ответ. (2, 0), (0, 6).

6.21. В какой точке кривой

$$y = ax^2 + bx + c$$

нужно провести касательную для того, чтобы касательная проходила через начало координат? Исследовать, при каких значениях a, b и c задача имеет решение.

6.22. В какой точке кривой

$$y = x^2 - 5x + 6$$

нужно провести касательную, чтобы она проходила через точку $M(a, b)$? Исследовать, при каких значениях a и b задача имеет решение.

6.23. Записать уравнение касательной к кривой

$$y = (x+1)/x,$$

если известно, что касательная проходит через точку $M(a, b)$. Сколько существует решений в зависимости от выбора точки? Найти эти решения.

6.24*. Записать уравнение прямой, проходящей через точку с координатами (1/2, 2), касающейся графика

$$y(x) = -\frac{x^2}{2} + 2$$

и пересекающей в двух точках график функции

$$y(x) = \sqrt{4 - x^2}.$$

6.25. В какой точке M_0 кривой $y = \sqrt{2}\, x^{3/2}$ касательная перпендикулярна прямой $4x + 3y + 2 = 0$?

Известно, что равенство нулю дискриминанта квадратного уравнения означает, что соответствующая парабола касается оси абсцисс (прямой $y = 0$). Аналогичные соображения могут быть использованы при нахождении уравнений касательных.

Пример 6.4. Найти те касательные к окружности

$$x^2 + y^2 = 25,$$

которые параллельны прямой

$$2x - y + 1 = 0.$$

Решение. Все прямые, параллельные прямой $2x - y + 1 = 0$, описываются уравнением вида $y = 2x + c$. Условие пересечения данной прямой и окружности состоит в совместности следующей системы:

$$\begin{gathered} 2x + c = y, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{gathered}$$

Подставив y из второго уравнения в первое, имеем

$$x^2+(2x+c)^2=25.$$

Условие существования единственного решения заключается в том, что дискриминант последнего уравнения равен нулю. Из этого условия получаем для c следующие возможные значения: $c_1=5\sqrt{5}$ и $c_2=-5\sqrt{5}$.

Ответ. $y=2x+5\sqrt{5}$, $y=2x-5\sqrt{5}$.

6.26*. Под каким углом видна окружность

$$x^2+y^2=16$$

из точки $(8,\ 0)$?

6.27. Точка M двигалась по окружности

$$(x-4)^2+(y-8)^2=20,$$

потом сорвалась с нее и, двигаясь по касательной к окружности, пересекла ось Ox в точке $(-2,\ 0)$. Определить точку окружности, с которой сорвалась движущаяся точка.

6.28. Найти условие, при котором прямая $y=kx+b$ касается параболы $y^2=2px$.

6.29*. Найти геометрическое место точек, из которых парабола $y=x^2$ видна под прямым углом.

6.30. Найти угол между касательными к графику функции $y=x^2$, проходящими через точку с координатами $(0,\ -1)$.

6.31*. Прямой угол перемещается так, что стороны его все время касаются кривой $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Найти геометрическое место вершин угла.

6.32. Докажите, что две касательные к параболе $y=x^2$, проведенные из произвольной точки прямой $y=-\frac{1}{4}$, взаимно перпендикулярны.

6.33. Через произвольную точку оси абсцисс проведены две прямые, одна из которых касается параболы $y=x^2$ (и не совпадает с осью абсцисс), а другая проходит через точку $\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$. Докажите, что прямые перпендикулярны.

6.34. Докажите, что любая касательная к гиперболе $y=\frac{1}{x}$ образует равные по величине углы с двумя прямыми, одна из которых проходит через точку касания и точку $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$, а другая — через точку касания и точку $(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$.

6.35. Докажите, что отрезок любой касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$, заключенной между осями координат, делится точкой касания пополам.

6.36. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного осями координат и произвольной касательной к гиперболе $y=\frac{1}{x}$, равна 2.

6.37. При каком значении параметра a парабола $y=ax^2$ касается кривой $y=\ln x$.

6.38. Найти координаты точки, лежащей на графике функции $y=1+\cos x$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$ и наименее удаленной от прямой $x\sqrt{3}+2y+4=0$.

§ 7. Приложения производной в задачах механики

Если путь, пройденный телом к моменту времени t, определяется функцией

$$y=f(t), \tag{1}$$

то скорость движения V в момент времени t равна производной функции $f(t)$:

$$V=f'(t), \tag{2}$$

а ускорение — производной скорости:

$$a=[f'(t)]'. \tag{3}$$

Пример 7.1. Человек приближается со скоростью b к подножию башни высотой h. Какова скорость его приближения к вершине башни, когда он находится на расстоянии l от основания?.

Решение. Обозначим $x(t)$ — расстояние от человека до подножия башни в момент времени t. Тогда расстояние $y(t)$ от человека до вершины башни в момент времени t вычисляется по формуле $y(t)=\sqrt{h^2+x^2(t)}$. Дифференцируя $y(t)$ по t, получаем

$$y'(t)=\frac{x(t)\,x'(t)}{\sqrt{h^2+x^2(t)}}$$

и, учитывая, что $x'(t)=b$, а расстояние от человека до подножия башни — l, имеем

$$V=\frac{bl}{\sqrt{h^2+l^2}}.$$

Ответ. $V=\frac{bl}{\sqrt{h^2+l^2}}$.

Найдя закон движения, вычислить скорость движения в следующих задачах.

7.1*. Нижний конец лестницы длиной 5 м скользит по полу в направлении от стены, у которой она стоит. Какова скорость верхнего конца лестницы в тот момент, когда нижний конец находится на расстоянии 3 м от стены, если скорость нижнего конца постоянна и равна 2 м/с?

7.2. Человек, приближающийся к вертикальной стене, освещен сзади фонарем, находящимся на расстоянии l от стены. Скорость человека равна v. С какой скоростью увеличивается его тень, если рост человека h?

7.3. Точка движется по гиперболе $y = 10/x$ так, что ее абсцисса растет равномерно со скоростью единица в секунду. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (5, 2)?

7.4*. По оси Ox движутся две точки, имеющие законы движения

$$x_1 = 100 + 5t, \quad x_2 = \frac{1}{2} t^2, \qquad t \geqslant 0.$$

Какова относительная скорость этих точек в момент встречи (x дается в сантиметрах, t — в секундах)?

7.5.** Колесо радиуса R катится без скольжения по прямой. Центр круга движется со скоростью v. В обод колеса вбит гвоздь. Найти скорость перемещения гвоздя в момент времени t.

7.6*. Точка движется с угловой скоростью w по окружности радиуса R с центром в начале координат. Какую скорость имеет изменение абсциссы точки при прохождении ею оси Ox?

7.7*. Тело брошено под углом α к горизонту со скоростью v. Какова максимальная высота подъема тела?

7.3. Угол α (в радианах), на который повернется колесо за t секунд, равен $\alpha = 3t^2 - 12t + 36$. Найти угловую скорость колеса в момент $t = 4$ с и момент, когда колесо остановится.

7.9*. Два тела движутся под углом 60° друг к другу; уравнение движения первого тела

$$S_1(t) = t^2 - 2t,$$

а уравнение движения второго тела

$$S_2(t) = 2t.$$

В момент времени $t = 0$ тела находились в одной точке. С какой скоростью увеличивается расстояние между телами?

7.10. Лошадь бежит по окружности со скоростью 20 км/ч. В центре окружности стоит фонарь, по касательной к окружности в точке, откуда лошадь начинает свой бег, расположен забор. С какой скоростью будет перемещаться тень лошади вдоль забора в момент, когда лошадь пробежит 1/8 окружности?

7.11.** Ракета движется прямолинейно по закону $S(t) = V_0 t + at^2/2$. Через время t_1 после начала движения от нее отделяется некоторый предмет, который продолжает двигаться по инерции. В какой момент времени t и какую новую скорость V надо придать предмету, чтобы, двигаясь дальше равномерно, он догнал ракету в момент t_2, имея при этом одинаковую с ней скорость? Приведите геометрическую интерпретацию задачи. Каков закон движения этого предмета?

7.12*. Ракета запускается по прямой из некоторой точки. Закон движения ракеты $S = t^2/2$ $(t \geqslant 0)$. В какой момент времени t_0, считая от начала движения, следует отключить двигатели, чтобы ракета, двигаясь дальше по инерции с набранной скоростью, оказалась в момент t_1 на расстоянии S_1 от первоначальной точки?

ГЛАВА 10

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 1. Неопределенный интеграл

Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на данном промежутке, если для всех значений x из этого промежутка справедливо равенство

$$F'(x)=f(x). \tag{1}$$

Если на некотором промежутке $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то выражение

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C, \tag{2}$$

где C — произвольная постоянная (константа интегрирования), называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$ на этом промежутке.

Основные правила интегрирования:

$$\int af(x)\,dx=a\int f(x)\,dx, \tag{3}$$

где a — постоянная величина;

$$\int [f_1(x)\pm f_2(x)]\,dx=\int f_1(x)\,dx\pm\int f_2(x)\,dx; \tag{4}$$

$$\int f(ax+b)\,dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C \tag{5}$$

($a\neq 0$ и b — постоянные).

Таблица неопределенных интегралов:

$$\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\qquad n\neq -1; \tag{6}$$

$$\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C; \tag{7}$$

$$\int a^x\,dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,\qquad a>0 \tag{8}$$

$$\int e^x\,dx=e^x+C;$$

$$\int \sin x\,dx=-\cos x+C; \tag{9}$$

$$\int \cos x\,dx=\sin x+C; \tag{10}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C; \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C; \tag{12}$$

$$\int \frac{dx}{\sin x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C; \tag{13}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C; \tag{14}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C,\qquad a\neq 0; \tag{15}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C,\qquad a\neq 0. \tag{16}$$

Вычисление неопределенного интеграла (нахождение первообразной) данной функции осуществляется сведе́нием с помощью правил интегрирования неопределенного интеграла от данной функции к табличному интегралу.

Пример 1.1. Найти все первообразные функции

$$f(x)=\frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}},$$

где m и n — целые числа.

Решение. Преобразуем $f(x)$ к виду

$$f(x)=x^{2m-1/2}-2x^{m+n-1/2}+x^{2n-1/2}.$$

Используя правила интегрирования (3), (4) и формулу (6), получим

$$\int (x^{2m-1/2}-2x^{m+n-1/2}+x^{2n-1/2})\,dx=\frac{1}{2m+1/2}x^{2m+1/2}-$$
$$-\frac{2}{m+n+1/2}x^{m+n+1/2}+\frac{1}{2n+1/2}x^{2n+1/2}+C=$$
$$=\frac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\frac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\frac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}+C.$$

Ответ. $\dfrac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1}-\dfrac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1}+\dfrac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}+C.$

Применяя основные правила интегрирования и таблицу неопределенных интегралов, найти первообразные следующих функций:

1.1*. $f(x)=\dfrac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}$. **1.2.** $f(x)=\dfrac{x-2\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

1.3*. $f(x)=x\sqrt{1-x}$. **1.4*.** $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x/2}}$.

1.5*. $f(x)=\dfrac{x-1}{(2x-1)^3}$. **1.6*.** $f(x)=\dfrac{x}{2}\sqrt{1+x}$.

Упростив подынтегральное выражение, найти следующие неопределенные интегралы:

1.7. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}\,dx.$

1.8. $\displaystyle\int\frac{2\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{t}}-\sqrt{t}\right)}\,dt.$

1.9. $\displaystyle\int\sqrt{\frac{2x}{(1+x)\sqrt[3]{1+x}}}\;\sqrt[3]{\frac{4+8/x+4/x^2}{\sqrt{2}}}\,dx.$

1.10. $\displaystyle\int\left(\frac{1-x^{-2}}{x^{1/2}-x^{-1/2}}-\frac{2}{x^{3/2}}+\frac{x^{-2}-x}{x^{1/2}-x^{-1/2}}\right)dx.$

1.11. $\displaystyle\int\left(\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}-\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)dx.$

1.12. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1}+\right.$

$\displaystyle\left.+\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)dx.$

1.13. $\displaystyle\int\frac{\left((1-x^2)^{-1/2}+1+\dfrac{1}{(1-x^2)^{-1/2}-1}\right)^{-2}}{(2-x^2-2\sqrt{1-x^2})}\,dx.$

1.14. $\displaystyle\int\left(\frac{x^{-6}-64}{4+2x^{-1}+x^{-2}}\,\frac{x^2}{4-4/x+1/x^2}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}\right)dx.$

1.15. $\displaystyle\int\frac{(x^{2/m}-9x^{2/n})(x^{(1-m)/m}-3x^{(1-n)/n})}{(x^{1/m}+3x^{1/n})^2-12x^{(m+n)/mn}}\,dx.$

1.16. $\displaystyle\int\frac{\left(2-x+4x^2+\dfrac{5x^2-6x+3}{x-1}\right)}{2x+1+2x/(x-1)}\,dx.$

1.17. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x}+1/\sqrt{1+x}}\,dx.$

1.18. $\displaystyle\int\frac{(\sqrt{x}+2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}-1\right)-(\sqrt{x}-2)\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}}+1\right)}{(2-\sqrt{x-2}):\left(\sqrt{\dfrac{2}{x}+1}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)}\,dx.$

1.19. $\displaystyle\int\frac{\dfrac{x^4+5x^3+15x-9}{x^6+3x^4}+\dfrac{9}{x^4}}{(x^3-4x+3x^2-12)/x^5}\,dx.$

1.20. $\displaystyle\frac{\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\;\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx.$

1.21*. $\displaystyle\int 4\cos\frac{x}{2}\cos x\sin\frac{21}{2}x\,dx.$

1.22. $\displaystyle\int -4\sin\frac{x}{2}\sin x\sin\frac{11}{2}x\,dx.$

1.23. $\displaystyle\int 2\sqrt{2}\cos\alpha\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)d\alpha.$

1.24. $\displaystyle\int 2\sin^2(3\pi-2x)\cos^2(5\pi+2x)\,dx.$

1.25. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}\pi-2x\right)\cos 4x\,dx.$

1.26. $\displaystyle\int\left[\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\frac{x}{4}\right)-\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}+\frac{x}{4}\right)\right]dx.$

1.27. $\displaystyle\int[\cos^2(45^\circ-x)\cos^2(60^\circ+x)-\cos 75^\circ\sin(75^\circ-2x)]\,dx.$

1.28. $\displaystyle\int\frac{\sin 2x+\sin 5x-\sin 3x}{\cos x+1-2\sin^2 2x}\,dx.$

1.29. $\displaystyle\int\left[\frac{\operatorname{ctg}^2 2x-1}{2\operatorname{ctg} 2x}-\cos 8x\operatorname{ctg} 4x\right]dx.$

1.30. $\displaystyle\int\frac{\cos 4x+1}{\operatorname{ctg} x-\operatorname{tg} x}\,dx.$

1.31. $\displaystyle\int\left[\sin\alpha\sin(x-\alpha)+\sin^2\left(\frac{x}{2}-\alpha\right)\right]dx.$

1.32. $\displaystyle\int\left[\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{5}{4}\pi\right)}+\cos^2\alpha\right]d\alpha.$

1.33. $\displaystyle\int\operatorname{tg}^2 x\,dx.$

1.34. $\displaystyle\int\operatorname{ctg}^2 x\,dx.$

§ 2. Задачи на свойства первообразных

Для функции $f(x)$ первообразной, график которой проходит через точку $M(x_0, y_0)$, будет функция

$$G(x) = F(x) + C, \tag{1}$$

где $F(x)$ — произвольная первообразная $f(x)$, а постоянная C удовлетворяет уравнению

$$F(x_0) + C = y_0. \tag{2}$$

Пример 2.1. Для функции $f(x) = \cos^2 x$ найти ту первообразную, график которой проходит через точку $M(\pi/2, \pi/4)$.

Решение. Вычислим неопределенный интеграл от функции $f(x) = \cos^2 x$:

$$\int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Для того чтобы из всех найденных первообразных выбрать искомую, составим, согласно (2), уравнение

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{4} + C = \frac{\pi}{4},$$

корнем которого является $C = 0$.

Ответ. $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}$.

2.1. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 2)$, у которой тангенс угла наклона касательной в каждой точке в три раза больше квадрата абсциссы этой точки.

2.2. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(1, 1)$, тангенс угла наклона которой в каждой точке равен удвоенной абсциссе этой точки.

2.3. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $A(0, -1)$, если все ее касательные параллельны прямой $y = 5x - 3$.

Если графики дифференцируемых функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ касаются друг друга в точке $M(x_0, y_0)$, то выполняются соотношения

$$f_1(x_0) = f_2(x_0), \tag{3}$$

$$f_1'(x_0) = f_2'(x_0). \tag{4}$$

Пример 2.2. Найти все первообразные функции $y = x + 2$, касающиеся кривой $y = x^2$.

Решение. Так как функция $y = x + 2$ является производной любой своей первообразной, то, согласно (4), уравнение для отыскания абсциссы точки касания имеет вид

$$2x = x + 2.$$

Корень этого уравнения будет $x = 2$. Значение функции $y = x^2$ в точке $x = 2$ равно 4. Следовательно, из всех первообразных функций $y = x + 2$, т. е. функций $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + C$, требуется найти ту, график которой проходит через точку $M(2, 4)$. Постоянную C найдем из условия $f(2) = \frac{1}{2}\cdot 4 + 2\cdot 2 + C = 4 \Rightarrow C = -2$.

Ответ. $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

2.4. Найти ту первообразную функции $f(x) = x$, график которой касается прямой $y = x - 1$.

2.5. Найти все первообразные функции $f_1(x) = x^2$, графики которых касаются параболы $f_2(x) = x^2 + 1$.

2.6. Найти все первообразные функции $f(x) = 3/x$, графики которых касаются кривой $y = x^3$.

Если тело движется со скоростью, изменяющейся по закону

$$v = f(t), \tag{5}$$

то зависимость пути, пройденного телом, от времени t представляется в виде

$$S(t) = F(t) + C, \tag{6}$$

где $F(t)$ — некоторая первообразная функции $f(t)$, а константа C находится из дополнительных условий.

Пример 2.3. Тело движется прямолинейно со скоростью, изменяющейся по закону

$$v = 2t \text{ м/с}.$$

Найти закон движения тела, если известно, что за первые 2 с оно прошло 15 м.

Решение. Множество всех первообразных функции $v(t) = 2t$ будет $S(t) = t^2 + C$. Согласно дополнительному условию имеем

$$S(2) = 2^2 + C = 15,$$

откуда получаем $C = 11$. Таким образом, закон движения тела будет

$$S(t) = t^2 + 11.$$

2.7. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = \sin t\cos t$ м/с. Найти уравнение движения точки, если при $t = \pi/3$ пройденный путь составляет 17/8 м.

2.8. Первый пешеход вышел из пункта A со скоростью, изменяющейся по закону $v(t) = 2t$, а второй в тот же момент вышел из пункта B, отстоящего от A на 4 км, вслед за первым с постоянной скоростью $2p$ км/ч. При каких значениях p второй пешеход догонит первого? Найти значение p, при котором пешеходы поравняются только один раз.

§ 3. Определенный интеграл

Определенным интегралом на промежутке $[a; b]$ от непрерывной функции $f(x)$ называется приращение $F(b) - F(a)$ любой первообразной F этой функции на промежутке $[a; b]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ (\textit{формула Ньютона — Лейбница}). \qquad (1)$$

Здесь a, b — нижний и верхний пределы интегрирования соответственно; $f(x)$ — подынтегральная функция. Разность $F(b) - F(a)$, стоящая в правой части формулы (1), иногда обозначается $F(x)\,|_a^b$.

Для того чтобы вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$, необходимо найти любую первообразную функции и вычислить разность ее значений в правом и левом концах промежутка $[a; b]$. Вычисление определенного интеграла функции $f(x)$ на промежутке $[a; b]$ называется *интегрированием* данной функции.

Основные правила интегрирования:

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx; \qquad (2)$$

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx; \qquad (3)$$

$$\int_a^b f(kx + p)\,dx = \frac{1}{k}\int_{ka+p}^{kb+p} f(t)\,dt, \qquad k \neq 0; \qquad (4)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad c \in [a; b]. \qquad (5)$$

Пример 3.1. Вычислить определенный интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx.$$

Решение. Представим подынтегральную функцию в виде

$$\cos^4 x = \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) =$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1 + \cos 4x}{2}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x.$$

Первообразной функции $\cos^4 x$ будет функция

$$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x.$$

Вычислим определенный интеграл по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\,\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{16}\pi.$$

Ответ. $3\pi/16$.

Вычислить интегралы:

3.1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{4x - 2\sqrt{x}}{x}\,dx.$ 3.2. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x \sin x\,dx.$

3.3. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos x \sin 3x\,dx.$

Пример 3.2. Вычислить интеграл

$$\int_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}}\,dx.$$

Решение. Перепишем интеграл в виде

$$\int_3^{-13} \left(2 - \frac{x}{3}\right)^{1/3} dx.$$

Воспользовавшись формулой (4) при $k = -1/3$, $p = 2$, находим нижний и верхний пределы интегрирования в правой части формулы (4):

$$ka + p = -\frac{1}{3}\cdot 3 + 2 = 1$$

и

$$kb + p = (-18)\left(-\frac{1}{3}\right) + 2 = 8$$

соответственно. Обозначая $2 - \frac{x}{3} = t$ в согласии с формулой (4), получаем

$$\int_3^{-18} \left(2 - \frac{x}{3}\right)^{1/3} dx = -3\int_1^8 t^{1/3}\,dt = \frac{3t^{4/3}}{4}(-3)\Big|_1^8 =$$

$$= -36 + \frac{9}{4} = -33{,}75.$$

Ответ. $-33{,}75$.

Вычислить интегралы:

3.4. $\displaystyle\int_{-8}^{8} \frac{dx}{\sqrt{5 + x/2}}$. **3.5.*** $\displaystyle\int_{-4}^{2} \frac{x\,dx}{\sqrt{2 - x/2}}$.

3.6*. $\displaystyle\int_{1/3}^{5/3} (x-2)\sqrt{3x-1}\,dx$. **3.7*.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x-1} + \sqrt{1+x}}$.

3.8. $\displaystyle\int_2^9 \sqrt[3]{x-1}\,dx$. **3.9.** $\displaystyle\int_0^{7/3} \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}\,dx$.

3.10. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sin 2t - \cos 2t)^2\,dt$. **3.11.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x+1)^2}$.

3.12. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin x \cos 3x\,dx$. **3.13.** $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/4} (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^{-1}\,dx$.

3.14. $\displaystyle\int_0^{\pi} \left[\cos^2\left(\frac{3}{8}\pi - \frac{x}{4}\right) - \cos^2\left(\frac{11}{8}\pi + \frac{x}{4}\right)\right]dx$.

3.15. $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left[1 - \frac{1}{1 - \sin^{-1}(2x + 3\pi/2)}\right]dx$.

Если подынтегральная функция представляет собой выражение, содержащее переменную под знаком абсолютной величины,

то вычисление определенного интеграла с данными пределами интегрирования можно свести к вычислению суммы определенных интегралов с подынтегральными функциями, уже не содержащими переменную под знаком абсолютной величины.

Пример 3.3. Вычислить

$$\int_1^5 (|x-3| + |1-x|)\,dx.$$

Решение. Подынтегральную функцию можно представить в виде

$$f(x) = \begin{cases} 4 - 2x, & x \leqslant 1, \\ 2, & 1 < x < 3, \\ 2x - 4, & x \geqslant 3. \end{cases}$$

Воспользовавшись свойством (5) определенного интеграла, получаем

$$\int_1^3 (|x-3| + |1-x|)\,dx + \int_3^5 (|x-3| + |1-x|)\,dx =$$

$$= \int_1^3 2\,dx + \int_3^5 (2x-4)\,dx = 2x\Big|_1^3 + (x^2 - 4x)\Big|_3^5 = 4 + 8 = 12.$$

Ответ. 12.

Вычислить интегралы:

3.16. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{x^2 - 2x + 1}\,dx$. 3.17. $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{x^2 - 2x + 1}\,dx$.

3.18. $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos^2 x}\,dx$. 3.19. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x}\,dx$.

3.20. $\displaystyle\int_3^5 \left(\sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}\right)dx$.

3.21. $\displaystyle\int_0^3 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 4}} + \sqrt{x^2 - 4x + 4}\right)dx$.

3.22. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} \left[\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - 2\right]^{1/2} dx$.

3.23. $\displaystyle\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2x}\,dx$. **3.24.** $\displaystyle\int_{\pi/4}^{3\pi/2} \sqrt{1 + \cos 2x}\,dx$.

§ 4. Интегралы с переменным верхним пределом

Интеграл с переменным верхним пределом

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt \qquad (1)$$

— это та первообразная функции $f(x)$ $(F'(x)=f(x))$, значение которой в точке a равно нулю.

Пример 4.1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$F(x)=\int_0^x (t+1)\,dt$$

на промежутке [2; 3].

Решение. Найдем критические точки функции $F(x)$. Так как $F(x)$ — первообразная для функции $x+1$, то $F'(x)=x+1$; функция $F'(x)$ не обращается в нуль на промежутке [2; 3] и является положительной. Следовательно, наибольшего значения функция достигает на правом конце отрезка, а наименьшего — на левом:

$$\max_{x\in[2;\,3]} F(x)=F(3)=\int_0^3 (t+1)\,dt=\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_0^3=7{,}5;$$

$$\min_{x\in[2;\,3]} F(x)=F(2)=\int_0^2 (t+1)\,dt=\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_0^2=4.$$

Найти наибольшие и наименьшие значения функций на указанных промежутках:

4.1. $F(x)=\int_0^x \sin t\,dt, \qquad x\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right].$

4.2. $F(x)=\int_0^x (2t-5)\,dt, \qquad x\in[-1;\ 3].$

4.3. $F(x)=\int_0^x (t^2-5t+6)\,dt, \qquad x\in[0;\ 4].$

4.4. Найти наибольшие и наименьшие значения функции

$$F(x)=\int_1^x |t|\,dt$$

на промежутке $\left[-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right]$.

4.5. Записать уравнения касательных к графику функции

$$F(x)=\int_2^x (2t-5)\,dt$$

в точках, где он пересекает ось абсцисс.

4.6. Найти абсциссы точек пересечения графиков функций

$$F_1(x)=\int_2^x (2t-5)\,dt, \qquad F_2(x)=\int_3^x (2t-5)\,dt.$$

4.7. Найти точки пересечения графиков функций

$$F_1(x)=\int_2^x (2t-5)\,dt, \qquad F_2(x)=\int_0^x 2t\,dt.$$

4.8. Найти ту первообразную от функции

$$F(x)=\int_3^x (2t-5)\,dt,$$

график которой проходит через начало координат.

4.9. Для графика функции

$$F(x)=\int_0^x 2|t|\,dt$$

найти касательные, параллельные биссектрисе первого координатного угла.

Пусть материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t)$; A — некоторая точка на траектории движения материальной точки. Если в момент времени $t=t_0$ расстояние между движущейся точкой и точкой A равно S_0, то в любой момент времени $t>t_0$ расстояние от движущейся точки до точки A вычисляется по формуле

$$S(t)=\int_{t_0}^t v(x)\,dx+S_0. \qquad (2)$$

П р и м е р 4.2. Скорость движущейся прямолинейно точки меняется по закону $v(t)=\sqrt{t}+2t$ (км/ч). В момент времени $t=1$ ч точка находилась в 5 км от пункта A, расположенного на траектории движения точки. На каком расстоянии от пункта A окажется точка в момент $t=3$ ч?

Р е ш е н и е. Координату точки как функцию времени представим, согласно (1) и (2), в виде

$$S(t)=\int\limits_1^t(\sqrt{x}+2x)\,dx$$

Вычислим значение $S(t)$ при $t=3$:

$$S(3)=\int\limits_1^3(\sqrt{t}+2t)\,dt+5=\left(\frac{2t^{3/2}}{3}+t^2\right)\Bigg|_1^3+5=$$

$$=2\sqrt{3}+9-\frac{2}{3}-1+5=12\frac{1}{3}+2\sqrt{3}.$$

О т в е т. На расстоянии $\left(12\frac{1}{3}+2\sqrt{3}\right)$ км от пункта A.

4.10. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти зависимость между пройденным расстоянием и временем, если известно, что за первые 3 с тело прошло 18 см, а движение началось в момент времени $t=0$.

4.11*. Сила, действующая на материальную точку, равномерно меняется относительно пройденного пути. В начале пути она равнялась 100 Н, а когда точка переместилась на 10 м, сила возросла до 600 Н. Найти функцию, определяющую зависимость работы от пути.

4.12. Тело движется равноускоренно, причем известно, что скорость его к моменту $t=2$ с достигла величины 4 м/с, а пройденный путь стал равен 3 м. Найти закон движения тела.

4.13. При постоянном ускорении тело за первую секунду преодолело расстояние 4 м от пункта A, а за первые 3 с расстояние между ними возросло до 16 м. Найти зависимость расстояния, пройденного телом, от времени, если известно, что при $t=0$ тело находилось в пункте A.

§ 5. Задачи на свойства интегралов

5.1. Решить неравенство

$$\left[\ln\frac{1}{(3-x)^3}\right]'-\frac{\dfrac{6}{\pi}\displaystyle\int\limits_0^{\pi}\sin^2\frac{x}{2}\,dx}{x+2}>0.$$

5.2. Решить неравенство

$$\sqrt{5x-6-x^2}+\frac{\pi}{2}\int\limits_0^x dz>x\int\limits_0^{\pi}\sin^2x\,dx.$$

5.3. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-x-12}-\int\limits_0^x dz<x\int\limits_0^{\pi/2}\cos 2x\,dx.$$

5.4. Найти такие числа A и B, чтобы функция вида

$$f(x)=A\sin\pi x+B$$

удовлетворяла условиям

$$f'(1)=2,\qquad \int\limits_0^2 f(x)\,dx=4.$$

5.5. Найти все числа a $(a>0)$, для которых

$$\int\limits_0^a(2-4x+3x^2)\,dx\leqslant a.$$

5.6. Найти все решения уравнения

$$\int\limits_0^{\alpha}\cos(x+\alpha^2)\,dx=\sin\alpha,$$

принадлежащие промежутку $[2;3]$.

5.7. Две точки начинают двигаться по прямой в один и тот же момент из одного и того же места в одном направлении. Скорости точек равны $v_1(t)=3t^2$ м/с, $v_2(t)=2t$ м/с соответственно. Через сколько секунд расстояние между ними составит 216 м?

5.8. Доказать, что любая первообразная нечетной непрерывной функции, определенной на промежутке $[-a;a]$, есть функция четная.

5.9. Доказать, что четная непрерывная функция, определенная на промежутке $[-a;a]$, имеет на этом промежутке по крайней мере одну нечетную первообразную.

5.10. Справедливо ли следующее утверждение: для того чтобы любая первообразная непрерывной функции $f(x)$ была четной на промежутке $[-a;a]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была нечетной на этом промежутке?

5.11. Найти значения A, B, C, при которых функция вида

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C$$

удовлетворяет условиям

$$f'(1) = 8, \qquad f(2) + f''(2) = 33, \qquad \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{7}{3}.$$

5.12. Найти все значения α из промежутка $[0;\ 2\pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \sin x\,dx = \sin 2\alpha.$$

5.13. Найти положительные значения a, которые удовлетворяют уравнению

$$\int_0^a (3x^2 + 4x - 5)\,dx = a^3 - 2.$$

5.14. Найти все значения α из промежутка $[-\pi;\ 0]$, удовлетворяющие уравнению

$$\sin \alpha + \int_{\alpha}^{2\alpha} \cos 2x\,dx = 0.$$

§ 6. Вычисление площадей фигур

Фигура, ограниченная графиком непрерывной функции $f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), прямыми $x = a$, $x = b$ и осью OX, называется *криволинейной трапецией*. Ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если для всех x из промежутка $[a;\ b]$ выполняется условие $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ ($f_2(x) - f_1(x) \geqslant 0$), то площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \tag{2}$$

Если для всех y из промежутка $[c;\ d]$ выполняется условие $\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)$ ($\psi_2(y) - \psi_1(y) \geqslant 0$), то площадь фигуры, заключенной между прямыми $y = c$, $y = d$ и графиками непрерывных функций $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d [\psi_2(y) - \psi_1(y)]\,dy. \tag{3}$$

Пример 6.1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$x = 0, \qquad x = \pi/2, \qquad f_1(x) = \sin x, \qquad f_2(x) = \cos x.$$

Решение. Поскольку знак разности $f_2(x) - f_1(x)$ на промежутке $[0;\ \pi/2]$ не остается постоянным, то разобьем этот промежуток на области, где эта разность сохраняет знак. Для этого составим уравнение

$$f_2(x) - f_1(x) = 0,$$

единственным корнем которого, принадлежащим промежутку $[0;\ \pi/2]$, является точка $x = \pi/4$. Так как

$$\sin x \geqslant \cos x \quad \text{при} \quad x \in [\pi/4;\ \pi/2],$$
$$\sin x < \cos x \quad \text{при} \quad x \in [0;\ \pi/4),$$

то, согласно (2), получаем

$$S = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\sin x - \cos x)\,dx =$$
$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$
$$= (\sqrt{2} - 1) + (-1 + \sqrt{2}) = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Ответ. $S = 2(\sqrt{2} - 1)$.

Заметим, что, используя симметрию фигуры относительно оси $x = \pi/4$, можно было бы вычислить площадь по формуле

$$S = 2\int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx.$$

Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

6.1. $y = x^2 + x$, $y = x + 1$.

6.2. $y = -2x^2 + 3x + 6$, $y = x + 2$.

6.4. $y = 0$, $y = 20 - 2x^2 - 6x$.

6.4. $y = x^2$, $y = 1/x$, $y = 0$, $x = 2$.

6.5. $y = (1/2)^x$, $x - 2y + 2 = 0$, $x = 2$.

6.6. $y=4x-x^2$, $y-x=0$.
6.7. $y=5/x$, $y=6-x$.
6.8. $y=x^3$, $y=1/x$, $x=2$.
6.9. $y=x^2+1$, $y=-x^2+3$.
6.10. $y=1/\cos^2 x$, $y=0$, $x=0$, $x=\pi/4$.
6.11. $y=2^x$, $y=2$, $x=-1$.
6.12. $xy=7$, $y=0$, $x=4$, $x=12$.
6.13. $y=(x-1)^2$, $y=x+1$.
6.14. $y=-x^2+\dfrac{7}{2}x+1$, $y=2^{-x}$, $x=2\ (x\leqslant 2)$.
6.15. $x=1$, $x=2$, $y=0$, $\log_2 x+\log_2 y=0$.
6.16. $y=2x^2+1$, $y=x+2$, $y=1{,}5$.
6.17. $y=2^x$, $y=4^x$, $x=1$.
6.18. $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$.
6.19. $2yx=16+x^2$, $y=5$.
6.20. $y=-1+8x^2-x^4$, $y=15$, $x=1\ (x\geqslant 1)$.
6.21. $y=1/(1+x^2)$, $y=x^2/2$.
6.22. $3y=-x^2+8x-7$, $y+1=4/(x-3)$.
6.23*. $y=\sqrt{x}$, $y=\sqrt{4-3x}$, $y=0$.

6.24*. Найти площадь фигуры, множество точек которой удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{aligned} &x^2+y^2\leqslant r^2, && r>0,\\ &x-y\leqslant 0, && y\geqslant 0. \end{aligned}$$

6.25*. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной частями линий $\max(x, y)=1$ и $x^2+y^2=1$, лежащими в первом квадранте:

$$\max(x, y)=\begin{cases} x, & \text{если } x\geqslant y,\\ y, & \text{если } x<y. \end{cases}$$

6.26. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2$, $y=2x-x^2$.

Если функция $y=f(x)$ на промежутке $[a;\ b]$ строго монотонна, то вычисление площади, ограниченной графиком функции на этом промежутке и осью Ox, иногда удобно свести к вычислению площади, ограниченной графиком обратной функции $x=g(y)$ на промежутке $[c;\ d]$ и осью Oy, где

$$c=\min\,[f(a);\ f(b)],$$
$$d=\max\,[f(a);\ f(b)].$$

Пример 6.2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\ln x$, прямой $x=2$ и осью OX.

Решение. Функцией, обратной к $y=\ln x$, является $x=e^y$. Из рис. 10.1 видно, что площадь заштрихованной фигуры S_1 равна разности площадей S — прямоугольника со сторонами 2 и $\ln 2$ и S_2 — криволинейной трапеции $OABC$. Согласно (3)

$$S_2=\int_0^{\ln 2} e^y\,dy=e^y\Big|_0^{\ln 2}=$$
$$=e^{\ln 2}-e^0=2-1=1,$$
$$S=2\ln 2.$$

Таким образом, искомая площадь есть

$$S_1=S-S_2=2\ln 2-1.$$

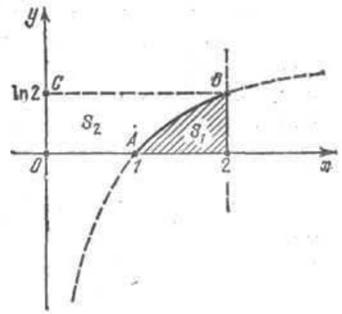


Рис. 10.1

Найти площади фигур, ограниченных графиками функций:

6.27. $y=\arcsin x$, $x=1$, $y=0$.
6.28. $y=\arccos x$, $x=0$, $y=0$.

Площади некоторых фигур легко вычисляются, если использовать известные значения площадей частей круга радиуса R.

Пример 6.3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=\sqrt{1-x^2},\qquad y=0.$$

Решение. Возводя обе части уравнения $y=\sqrt{1-x^2}$ в квадрат, получаем уравнение окружности единичного радиуса: $y^2+x^2=1$. Таким образом, график функции $y=\sqrt{1-x^2}$ представляет собой верхнюю полуокружность радиуса 1. Следовательно, искомая площадь равна половине площади круга единичного радиуса.

Найти площади фигур, ограниченных линиями:

6.29*. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

6.30*. $y^2+x^2+2x=0$.

6.31.** В декартовой системе координат Oxy фигура F ограничена осью Ox, кривой $y=2x^2$ и касательной к этой кривой; абсцисса точки касания равна 2. Найти площадь фигуры F.

6.32. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке M (3, 5) и осью ординат. Сделать рисунок.

6.33. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1/x+1$, $x=1$ и касательной, проведенной в точке (2, 3/2) к кривой $y=1/x+1$.

6.34*. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $y = x^2 - 4x + 5$ и прямыми, касающимися ее в точках с абсциссами $x_1 = 1$ и $x_2 = 4$.

6.35. Из точки $(3/2, 0)$ к параболе $y = 2x^2 - 6x + 9$ проведена касательная, образующая острый угол с положительным направлением оси Ox. Определить площадь фигуры, заключенной между параболой, осью Ox, осью Oy и этой касательной.

6.36.** Какую часть площади квадрата отсекает парабола, проходящая через две соседние вершины квадрата и касающаяся середины одной из его сторон?

6.37*. Какую часть площади полукруга отсекает парабола, проходящая через концы диаметра полукруга и касающаяся окружности в точке, равноудаленной от концов диаметра?

6.38*. Найти площадь фигуры, ограниченной прямой $y = -8x - 46$ и параболой $y = 4x^2 + ax + 2$, если известно, что касательная к параболе в точке $x = -5$ составляет с осью Ox угол $\pi - \operatorname{arctg} 20$.

6.39*. При каком значении a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 1/x$, $y = 1/(2x-1)$, $x = 2$, $x = a$, равна $\ln \frac{4}{\sqrt{5}}$?

6.40. При каком значении a прямая $y = a$ делит площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 0$, $y = 2 + x - x^2$, пополам?

6.41*. При каком значении параметра $a > 0$ площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = a\sqrt{x}$, $y = \sqrt{2-x}$ и осью Oy, будет равна числу b? При каких значениях b задача имеет решение?

6.42*. Найти, при каком значении a площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \sin 2x$, прямыми $x = \pi/6$, $x = a$ и осью абсцисс, равна $1/2$.

6.43*. Найти все значения параметра b $(b>0)$, при которых площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = 1 - x^2$ и $y = bx^2$, будет равна a. При каких значениях a задача имеет решение?

6.44*. Через точку (x_0, y_0) графика функции $y = \sqrt{1 + \cos 2x}$ провести нормаль к этому графику, если известно, что прямая $x = x_0$ делит площадь, ограниченную данной кривой, осью Ox и прямыми $x = 0$ и $x = \frac{3}{4}\pi$, на равные части.

§ 7. Задачи на нахождение наибольших (наименьших) площадей фигур

Если в задаче требуется найти положение кривых, зависящих от одного или нескольких параметров, при котором площадь фигуры, ограниченной этими кривыми, максимальна (минимальна), то следует сначала составить функцию, выражающую зависимость этой площади от параметров, а затем решать задачу на отыскание наибольшего (наименьшего) значения этой функции на области возможного изменения параметров.

Пример 7.1. Найти все значения параметра a $(a \geqslant 1)$, при которых площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = 1$, $y = 2$ и кривыми $y = ax^2$, $y = \frac{1}{2}ax^2$, будет наибольшей.

Решение. Вычислим значение площади при фиксированном значении a. В данном случае удобно вычислять площадь, считая y независимым переменным. В силу симметрии парабол $y = ax^2$ и $y = \frac{1}{2}ax^2$ относительно оси Oy площадь фигуры, лежащей в полуплоскости $x > 0$, равна площади фигуры, лежащей в полуплоскости $x < 0$, и поэтому искомая площадь будет равна удвоенной площади фигуры, ограниченной линиями $x = \sqrt{y/a}$, $x = \sqrt{2y/a}$, $y = 1$, $y = 2$:

$$S(a) = 2\int_1^2 \left(\sqrt{\frac{2y}{a}} - \sqrt{\frac{y}{a}}\right) dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \int_1^2 (\sqrt{2y} - \sqrt{y})\, dy = \frac{2}{\sqrt{a}} \left(\frac{2\sqrt{2}\, y^{3/2}}{3} - \frac{2}{3} y^{3/2}\right)\Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} \frac{2}{3} (\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} - 1), \quad \text{где} \quad a \in [1; \infty).$$

Очевидно, что функция $S(a)$ монотонно убывает на промежутке $[1; \infty)$ и наибольшее значение принимает на левом конце промежутка $[1; \infty)$, т. е. при $a = 1$.

Ответ. $a = 1$.

7.1. При каком значении a площадь, ограниченная кривой $y = a^2x^2 + ax + 1$ и прямыми $y = 0$, $x = 1$, будет наименьшей?

7.2. Найти все значения параметра a $(a > 0)$, при которых площадь фигуры, ограниченной прямой $y = \frac{(a^2 - ax)}{1 + a^4}$ и параболой $y = \frac{(x^2 + 2ax + 3a^2)}{1 + a^4}$, будет наибольшей.

7.3. При каком положительном a площадь S криволинейной трапеции, ограниченной линиями

$$y = \frac{x}{6} + \frac{1}{x^2}, \qquad y = 0, \qquad x = a, \qquad x = 2a,$$

принимает наименьшее значение?

7.4*. Обозначим через $S(k)$ площадь, заключенную между параболой $y_1 = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y_2 = kx + 1$. Найти $S(-1)$ и вычислить наименьшее значение $S(k)$.

Пример 7.2. Касательная к параболе $y = x^2$ проведена так, что абсцисса x_0 точки касания принадлежит промежутку [1; 2]. Определить x_0, при котором треугольник, ограниченный касательной, осью ординат и прямой $y = x_0^2$, имеет наибольшую площадь.

Решение. Уравнение касательной в точке x_0 для функции $y = x^2$ имеет вид $y - x_0^2 = 2x_0(x - x_0)$. Ордината точки пересечения касательной и оси Oy равна

$$y_1 = x_0^2 - 2x_0^2 = -x_0^2,$$

и площадь искомого прямоугольного треугольника вычисляется по формуле

$$S(x_0) = \frac{x_0(x_0^2 + x_0^2)}{2} = x_0^3.$$

Требуется найти наибольшее значение $S(x_0)$ на промежутке [1; 2]. Очевидно, что функция $S(x_0)$ возрастает на этом промежутке, и, следовательно,

$$\max_{x_0 \in [1;\,2]} S(x_0) = S(2) = 8.$$

Ответ. $x_0 = 2$.

7.5. Касательная к графику функции $y = \sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса x_0 точки касания принадлежит промежутку [1/2; 1]. При каком значении x_0 площадь $S(x_0)$ треугольника, ограниченного этой касательной, осью Ox и прямой $x = 2$, будет наименьшей и чему равна эта наименьшая площадь?

7.6*. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y = x^2 + 1$ и прямыми $x = 1$, $x = 2$. В какой точке данной кривой с абсциссой $x \in [1; 2]$ следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади?

7.7*. При каком значении параметра a площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y = x^3 + 3x^2 + x + a$ и прямыми, параллельными оси ординат и пересекающими ось абсцисс в точках экстремума этой функции, будет наименьшей?

7.8*. Для каких значений a из промежутка [0; 1] площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = f(a)$, имеет наибольшее и для каких наименьшее значение, если $f(x) = x^\alpha + 3x^\beta$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, причем $\alpha > 1$, $\beta > 1$)?

7.9*. Для каких значений a площадь фигуры, ограниченной графиком кривой $\frac{x^3}{3} - x^2 + a$, прямыми $x = 0$, $x = 2$ и осью Ox, достигает своего минимума?

7.10*. Для каких значений a из промежутка [0; 1] площадь фигуры, ограниченной графиком функции $f(x)$ и прямыми $x = 0$, $x = 1$, $y = f(a)$, имеет наименьшее и для каких наибольшее значение, если $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$?

7.11*. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, графиком функции $y = |\sin x + \cos x - a|$ и осью абсцисс, где x_1 и x_2 — два последовательных экстремума функции $f(x) = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$, будет наименьшей?

§ 8. Вычисление объемов тел

Объем V тела, полученного в результате вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$), $x = a$, $x = b$ ($b > a$), вокруг оси Ox, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx. \tag{1}$$

Объем V тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $x = \varphi(y)$, ($\varphi(y) \geqslant 0$), прямыми $y = c$, $y = d$ ($d > c$) и осью Oy, вокруг оси Oy, вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_c^d \varphi^2(y)\,dy. \tag{2}$$

Пример 8.1. Вычислить объем тела, образованного вращением одной арки синусоиды (график функции $y = \sin x$ на промежутке $[0; \pi]$) вокруг оси Ox.

Решение. По формуле (1) находим

$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx = \pi \int_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2}\,dx = \pi\left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2x}{4}\right)\Big|_0^\pi = \pi\,\frac{1}{2}\,\pi = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Ответ. $\pi^2/2$.

8.1. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой $xy = 2$, прямыми $x = 1$, $x = 2$ и осью абсцисс.

8.2*. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной параболами $y^2 = x$, $y = x^2$.

8.3. Цепная линия $y = (e^x + e^{-x})/2$ вращается вокруг оси абсцисс. При этом получается поверхность, называемая *катеноидом*. Вычислить объем тела, образованного катеноидом и двумя плоскостями, перпендикулярными оси абсцисс и отстоящими от начала координат соответственно на расстояния a и b.

8.4*. Вычислить объем тела, полученного от вращения фигуры, ограниченной параболой $y = 2x - x^2$ и осью абсцисс, вокруг оси ординат.

8.5*. Найти объем тела, полученного от вращения криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = \arcsin x$, $y = \pi/2$ и $x = 0$, вокруг оси Oy.

8.6*. Найти объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = \ln 2$, $y = \ln x$, $y = 0$ и $x = 0$, вокруг оси Oy.

§ 9. Приложения определенного интеграла в задачах физики и механики

Вычисление пути. Путь S тела, движущегося со скоростью $V(t)$, за время, прошедшее от момента t_1 до момента t_2, вычисляется по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt. \qquad (1)$$

Пример 9.1. Тело движется прямолинейно со скоростью

$$v(t) = 2t^2 - t + 1 \text{ (м/с)}.$$

Найти путь, пройденный за первые 5 с.

Решение. Согласно (1) имеем

$$S(t) = \int_0^5 (2t^2 - t + 1)\, dt = \frac{2t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t\,\Big|_0^5 = \frac{250}{3} - \frac{25}{2} + 5 = 75\frac{5}{6}.$$

Ответ. $75\frac{5}{6}$ м.

9.1. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 2t + a$ (м/с). Найти значение a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ с тело прошло путь длиной 40 м.

9.2*. Тело движется прямолинейно со скоростью $v = 12t - t^2$ (м/с). Найти длину пути, пройденного телом от начала движения до его остановки.

9.3. Два тела начали двигаться по прямой в один и тот же момент из одной точки в одном направлении. Одно тело двигалось со скоростью $v_1(t) = 3t^2 + 2t$ (м/с), другое — со скоростью $v_2(t) = 2t$ (м/с). Какое расстояние будет между телами через 6 с?

9.4. Точка движется прямолинейно под действием постоянной силы с ускорением 2 м/с² и с нулевой начальной скоростью. Через 3 с после начала движения сила прекращает действовать и точка начинает двигаться равномерно с набранной к этому моменту скоростью. Найти закон движения точки $S(t)$.

Если материальная точка движется вдоль оси Ox под действием силы $F(x)$, зависящей от координаты x, то работа силы по перемещению материальной точки из a в b $(b > a)$ вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b F(x)\, dx. \qquad (2)$$

Пример 9.2. На материальную точку действует сила, которая линейно зависит от пройденного пути. В начале движения она составляет 100 Н, а когда точка переместилась на 10 м, сила возросла до 600 Н. Найти работу, произведенную этой силой на пройденном пути.

Решение. Из условия следует, что сила $F(x)$, действующая на точку, меняется по закону $F(x) = ax + b$, где параметры a и b находятся из условий

$$\begin{matrix} F(0) = 100, & & b = 100, & & b = 100, \\ & \text{или} & & \text{или} & \\ F(10) = 600, & & 100a + 100 = 600, & & a = 50. \end{matrix}$$

Таким образом, $F(x) = 50x + 100$ и работа силы на пройденном пути, согласно (2), равна

$$A = \int_0^{10} (50x + 100)\, dx = 25x^2 + 100x\,\Big|_0^{10} = 25 \cdot 100 + 100 \cdot 10 = 3500.$$

Ответ. 3500 Дж.

9.5*. На материальную точку действует сила, которая меняется обратно пропорционально квадрату расстояния до некоторого объекта. Известно, что она составляла 1 Н в момент, когда расстояние до объекта было 2 м. Вычислить работу этой силы по переносу материальной точки из пункта, находящегося на расстоянии 10 м от объекта, до пункта, находящегося на расстоянии 3 м.

9.6*. Вычислить работу, совершаемую при сжатии пружины на 15 см, если известно, что действующая сила пропорциональна сжатию пружины и что для сжатия на 1 см необходима сила 30 Н.

ГЛАВА 11

ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Задачи на движение

Система уравнений, которую необходимо составить на основании условия задачи на движение, обычно содержит следующие величины: расстояние, которое будем обозначать буквой S; скорости движущихся тел, которые будем обозначать буквами u, v, w, ... (или буквами, снабженными индексами: v_1, v_2, ...); время, которое будем обозначать буквами t, T. В случае, если движение равноускоренное (или равнозамедленное), ускорение будем обозначать буквой a.

Равномерное движение по прямой. Примем следующие допущения:

1. Движение на отдельных участках считается равномерным; при этом пройденный путь определяется по формуле $S = vt$.

2. Повороты движущихся тел считаются мгновенными, т. е. происходят без затрат времени; скорость при этом также меняется мгновенно.

3. Если тело движется по течению реки, то его скорость w (относительно берега) слагается из скорости тела в стоячей воде u (собственной скорости тела) и скорости течения реки v: $w = u + v$. Если тело движется против течения реки, то его скорость (относительно берега) $w = u - v$. Если в условии задачи речь идет о движении плотов, то полагают, что плот движется со скоростью течения реки.

В задачах на равномерное движение иногда встречается условие, состоящее в том, что либо два тела движутся навстречу друг другу, либо одно тело догоняет другое. Если при этом расстояние между телами равно S, а скорости тел равны v_1 и v_2, то:

1) при движении тел навстречу друг другу время, через которое они встретятся, равно $\dfrac{S}{v_1 + v_2}$;

2) при движении тел в одну сторону ($v_1 > v_2$) время, через которое первое тело догонит второе, равно $\dfrac{S}{v_1 - v_2}$.

Пример 1.1. Из города A в город B выезжает велосипедист, а через три часа после его выезда из города B выезжает навстречу ему мотоциклист, скорость которого в три раза больше скорости велосипедиста. Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B. Если бы мотоциклист выехал не через три, а через два часа после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A. Найти расстояние между A и B.

Решение. Обозначим искомое расстояние между пунктами A и B через S км, скорости велосипедиста и мотоциклиста — через $v_в$ км/ч и $v_м$ км/ч соответственно. Запишем условия задачи и уравнения, соответствующие этим условиям, в виде следующей таблицы:

Условие задачи	Уравнение
Скорость мотоциклиста в три раза больше скорости велосипедиста	$v_м = 3v_в$
Велосипедист и мотоциклист встречаются посередине между A и B, причем мотоциклист выехал из B на 3 ч позже, чем велосипедист из города A	$\dfrac{\frac{S}{2}}{v_в} = \dfrac{\frac{S}{2}}{v_м} + 3$
Если бы мотоциклист выехал через 2 ч после велосипедиста, то встреча произошла бы на 15 км ближе к A	$\dfrac{\frac{S}{2} - 15}{v_в} = \dfrac{\frac{S}{2} + 15}{v_м} + 2$

Используя первое уравнение, второе и третье уравнения можно записать в виде

$$\frac{S}{2v_в} = \frac{S}{6v_в} + 3,$$
$$\frac{S - 30}{2v_в} = \frac{S + 30}{6v_в} + 2.$$

Из первого уравнения этой системы получаем $v_в = S/9$. Подставляя во второе уравнение системы $v_в = S/9$, получаем уравнение для нахождения величины S:

$$\frac{3S - 180}{S} = 2 \Rightarrow S = 180.$$

Ответ. Расстояние между городами A и B равно 180 км.

Пример 1.2. От пристани отправился по течению реки плот. Через 5 ч 20 мин вслед за плотом от той же пристани отправилась моторная лодка, которая догнала плот, пройдя 20 км. Какова скорость плота, если известно, что собственная скорость моторной лодки больше скорости плота на 9 км/ч?

Решение. Обозначим собственную скорость лодки (т. е. скорость в стоячей воде) через $v_л$ км/ч, а скорость течения реки — через $v_р$ км/ч. По условию задачи собственная скорость моторной лодки больше скорости плота на 9 км/ч:

$$v_л - v_р = 9.$$

Моторная лодка, двигаясь по течению реки, прошла 20 км за время $20/(v_л + v_р)$; плот прошел те же 20 км за время $20/v_р$. Так как время, за которое плот проплыл 20 км, на 5 ч 20 мин (т. е. на 16/3 ч) больше времени, за которое то же расстояние проплыла моторная лодка, то

$$\frac{20}{v_р} - \frac{20}{v_л + v_р} = \frac{16}{3}.$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы

$$v_л - v_р = 9,$$
$$\frac{20}{v_р} - \frac{20}{v_л + v_р} = \frac{16}{3}.$$

Из первого уравнения получаем $v_л = v_р + 9$. Подставляя во второе уравнение $v_л = v_р + 9$, получаем уравнение для нахождения $v_р$:

$$\frac{20}{v_р} - \frac{20}{2v_р + 9} = \frac{16}{3} \Rightarrow 8v_р^2 + 21v_р - 135 = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $v_р = 3$. (Второй корень уравнения $v_р = -45/8$ не подходит по смыслу задачи.)

Ответ. Скорость течения реки (а также и скорость плота) равна 3 км/ч.

1.1. Пароход прошел 4 км против течения реки, а затем прошел еще 33 км по течению, затратив на это один час. Найти скорость парохода в стоячей воде, если скорость реки равна 6,5 км/ч.

1.2. Катер вышел одновременно с плотом, плывшим по течению реки, и прошел по течению реки $13\frac{1}{3}$ км, а затем, не останавливаясь, $9\frac{1}{3}$ км в обратном направлении, где и встретился с плотом. Найти, во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения.

1.3. Два автомобиля выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый автомобиль едет со скоростью 40 км/ч, скорость второго составляет 125 % от скорости первого. Через 30 мин из того же пункта в том же направлении выехал третий автомобиль, который сначала обогнал первый и через 1,5 ч после этого обогнал второй. Какова скорость третьего автомобиля?

1.4. В соревнованиях по бегу на дистанции 120 м участвуют три бегуна. Скорость первого из них больше скорости второго на 1 м/с, а скорость второго равна полусумме скоростей первого и третьего. Определить скорость третьего бегуна, если известно, что первый бегун пробежал дистанцию на 3 с быстрее третьего.

1.5. Искусственный водоем имеет форму прямоугольника с разностью сторон в 1 км. Два рыбака, находящихся в одной вершине этого прямоугольника, одновременно отправились в пункт, расположенный в противоположной вершине. При этом один рыбак поплыл напрямик на лодке, а второй пошел пешком вдоль берега. Определить размеры водоема, если каждый рыбак передвигался со скоростью 4 км/ч и один из них прибыл к месту назначения на 30 мин раньше второго.

1.6. Два велосипедиста выехали одновременно из двух мест, отстоящих одно от другого на 270 км, и едут навстречу друг другу. Второй проезжает в час на 1,5 км меньше, чем первый, и встречается с ним через столько часов, сколько километров в час делает первый. Определить скорость каждого велосипедиста.

1.7. Турист проплыл по реке на лодке 90 км, а затем прошел пешком 10 км. При этом на пеший путь было затрачено на 4 ч меньше, чем на путь по реке. Если бы турист шел пешком столько времени, сколько он плыл по реке, а плыл по реке столько времени, сколько шел пешком, то эти расстояния были бы равны. Сколько времени он шел пешком и сколько плыл по реке?

1.8. Расстояние между двумя городами равно S км. Два автомобилиста, выехав из этих городов навстречу друг другу, встретятся на полпути, если первый выедет на t ч раньше второго. Если же они выедут одновременно навстречу друг другу с теми же скоростями, то встреча произойдет через $2t$ ч. Определить скорость каждого автомобиля, если считать, что скорости постоянны на всем пути.

1.9. Из города A в город B, расстояние между которыми 120 км, на мопеде отправился курьер. Через час после этого из A на мотоцикле выехал второй курьер, который, нагнав первого и передав ему поручение, немедленно с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B. Какова скорость первого курьера, если скорость второго равна 50 км/ч?

1.10. Из порта A в порт C отправился пароход, который должен по пути пройти мимо маяка B, причем расстояние от A до B равно 140 км, а расстояние от B до C равно 100 км. Через 3 ч после выхода парохода за ним вышел из порта A быстроходный катер, который, догнав пароход, передал приказание увеличить скорость на 5 км/ч. Приказание было немедленно выполнено, и в результате пароход прошел мимо маяка B на полчаса раньше и прибыл в порт C на полтора часа раньше. Найти первоначальную скорость парохода и скорость катера.

1.11. Первый турист, проехав 1,5 ч на велосипеде со скоростью 16 км/ч, делает остановку на 1,5 ч, а затем продолжает путь с первоначальной скоростью. Спустя 4 ч после отправки в дорогу первого туриста вдогонку ему выезжает на мотоцикле второй турист со скоростью 56 км/ч. Какое расстояние они проедут, прежде чем второй турист догонит первого?

1.12. От пристани A одновременно отходят вниз по течению реки к пристани B две лодки. Первая лодка подходит к пристани B на 2 ч раньше второй. Если бы лодки отошли от этих пристаней одновременно, двигаясь навстречу друг другу (первая от A, а вторая от B), то они встретились бы через 3 ч. Расстояние между пристанями равно 24 км. Скорость второй лодки в стоячей воде в три раза больше скорости течения реки. Найти скорость течения реки.

1.13. Сначала катер шел S км по течению реки, а затем вдвое большее расстояние — по озеру, в которое река впадает. Весь рейс продолжался 1 ч. Найти собственную скорость катера, если скорость течения реки v км/ч.

1.14. В 9 ч самоходная баржа вышла из пункта A вверх по реке и прибыла в пункт B; 2 ч спустя после прибытия в пункт B баржа отправилась в обратный путь и прибыла в пункт A в 19 ч 20 мин того же дня. Предполагая, что скорость течения реки 3 км/ч и собственная скорость баржи постоянна, определить, когда баржа прибыла в B, если расстояние AB равно 60 км.

1.15. Автомобиль выехал из города A в город B и через 2 ч остановился на 45 мин. После этого он продолжал движение к городу B, увеличив первоначальную скорость на 20 км/ч, и прибыл в город B. Если бы автомобиль ехал без остановки с первоначальной скоростью, то на путь из A в B он затратил бы столько же времени. Найти первоначальную скорость автомобиля, если расстояние между городами A и B равно 300 км.

1.16. Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, расстояние между которыми 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он затратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

1.17*. Мотоциклист проезжает 1 км на 4 мин быстрее, чем велосипедист. Сколько километров проезжает каждый из них за 5 ч, если известно, что мотоциклист проезжает за это время на 100 км больше велосипедиста?

1.18. По графику поезд всегда проходит перегон в 120 км с одной и той же скоростью. Вчера поезд прошел половину перегона с этой скоростью и вынужден был остановиться на 5 мин. Чтобы вовремя прибыть в конечный пункт перегона, машинисту на второй половине перегона пришлось увеличить скорость поезда на 10 км/ч. Сегодня повторилась остановка поезда на середине того же перегона, только задержка продолжалась 9 мин. С какой скоростью машинист вел поезд сегодня на второй половине перегона, если опять в конечный пункт этого перегона поезд прибыл по расписанию?

1.19. Одновременно начали гонки с одного старта в одном направлении два мотоциклиста: один со скоростью 80 км/ч, другой со скоростью 60 км/ч. Через полчаса с того же старта и в том же направлении отправился третий гонщик. Найти скорость третьего гонщика, если известно, что он догнал первого гонщика на 1 ч 15 мин позже, чем второго.

1.20. Два велосипедиста выехали из пункта A одновременно и в одном направлении. Первый велосипедист ехал со скоростью 7 км/ч, а второй — со скоростью 10 км/ч. Через 30 мин из пункта A в том же направлении выехал третий велосипедист, который догнал первого велосипедиста, а через 1,5 ч после этого догнал и второго велосипедиста. Определить скорость третьего велосипедиста.

1.21. От пристани A вниз по течению реки одновременно отплыли пароход и плот. Пароход, доплыв до пристани B, расположенной в 324 км от пристани A, простоял там 18 ч и отправился назад в A. В момент, когда он находился в 180 км от A, второй пароход, отплывший из A на 40 ч позднее первого, нагнал плот, успевший к этому времени проплыть 144 км. Считая, что скорость течения реки постоянна, а скорости пароходов в стоячей воде постоянны и равны между собой, определить скорости пароходов и течения реки.

1.22. Пункт A находится по реке выше пункта B. В одно и то же время из пункта A отплыли вниз по реке плот и первая моторная лодка, а из пункта B вверх — вторая моторная лодка. Через некоторое время лодки встретились в пункте C, а плот за это время проплыл третью часть пути от A до C. Если бы первая лодка без остановки доплыла до пункта B, то плот за это время прибыл бы в пункт C. Если бы из пункта A в пункт B отплыла вторая лодка, а из пункта B в пункт A — первая лодка, то они встретились бы в 40 км от пункта A. Какова скорость обеих лодок в стоячей воде, а также расстояние между пунктами A и B, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

1.23. Из города A в город B одновременно выехали автомобиль и мотоцикл, а в тот момент, когда мотоцикл преодолел шестую часть пути, из A в том же направлении выехал велосипедист. К моменту прибытия автомобиля в город B велосипедист проехал четвертую часть пути. Скорость мотоцикла на 21 км/ч меньше скорости автомобиля и на столько же больше скорости велосипедиста. Найти скорость автомобиля.

1.24. Из пункта A в пункт B, находящийся в 100 км от пункта A, в одно и то же время отправились велосипедист и пешеход. Одновременно им навстречу из пункта B выехал автомобилист. Через час после выезда автомобилист встретил велосипедиста, а проехав еще 240/17 км, — пешехода, посадил его в машину, после чего они поехали вдогонку за велосипедистом и настигли его. Вычислить скорости велосипедиста и автомобилиста, если известно, что скорость пешехода равна 5 км/ч.

1.25. В полдень из пункта A в пункт B вышел пешеход и выехал велосипедист, и в полдень же из B в A выехал верховой. Через 2 ч встретились велосипедист и верховой на расстоянии 3 км от середины AB, а еще через 48 мин встретились пешеход и верховой. Определить скорость каждого и расстояние AB, если известно, что пешеход движется вдвое медленнее велосипедиста.

1.26. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста, которые встретились в 12 км от пункта B. Продолжая свое движение и доехав до пунктов B и A, они сразу же повернули обратно и снова встретились в 6 км от пункта A. Определить скорости велосипедистов и расстояние AB, если известно, что второй велосипедист вернулся в пункт B через час после того, как первый велосипедист вернулся в пункт A.

1.27. Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 ч быстрее товарного. Если бы каждый из поездов шел то время, которое тратит на путь от A до B другой поезд, то пассажирский прошел бы на 280 км больше, чем товарный. Если бы скорость каждого из поездов была увеличена на 10 км/ч, то пассажирский поезд проходил бы расстояние между A и B на 2 ч 24 мин быстрее товарного. Найти расстояние между городами A и B.

1.28. На лыжных соревнованиях на дистанции 10 000 м сначала стартовал первый лыжник, а через некоторое время после него — второй, причем скорость второго лыжника была на 1 м/с больше скорости первого. В момент, когда второй лыжник догнал первого, первый увеличил свою скорость на 2 м/с, а скорость второго лыжника осталась без изменения. В результате второй лыжник финишировал через 7 мин 8 с после первого. Если бы длина дистанции была на 500 м больше, то второй лыжник финишировал бы на 7 мин 33 с позже первого. Найти, сколько времени прошло между выходом со старта первого и второго лыжников.

1.29. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт B. Первый остановился через 42 мин, не доехав 1 км, а второй — через 52 мин, не доехав 2 км до B. Если бы первый велосипедист проехал столько, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первому потребовалось бы на 17 мин меньше второго. Сколько километров между пунктами A и B?

1.30. Расстояние между станцией и поселком 4 км. Мальчик и автомобиль одновременно отправились со станции в поселок. Через 10 мин мальчик встретил автомобиль, возвращающийся из поселка; пройдя еще 1/14 км он снова встретил автомобиль, который, дойдя до станции, снова поехал в поселок. Найти скорости мальчика и автомобиля, если известно, что они двигались равномерно и без остановок.

1.31. От станции железной дороги до пляжа 4,5 км. Мальчик и рейсовый автобус одновременно отправились от станции к пляжу. Через 15 мин мальчик встретил автобус, возвращающийся с пляжа, и успел пройти еще 9/28 км от места первой встречи с автобусом, прежде чем его догнал тот же автобус, который доехал до станции и опять отправился к пляжу. Найти скорости мальчика и автобуса, считая, что эти скорости постоянны и ни мальчик, ни автобус в пути не останавливались, но у пляжа и на станции автобус делал остановки продолжительностью в 4 мин каждая.

1.32. Велосипедист проезжает половину расстояния от пункта A до пункта B на 2 ч быстрее, чем пешеход проходит треть расстояния от A до B. За время, требуемое велосипедисту на весь путь от A до B, пешеход проходит 24 км. Если бы скорость велосипедиста увеличилась на 7 км/ч, то за то время, за которое пешеход пройдет 18 км, велосипедист проехал бы весь путь от A до B и еще 3 км. Найти скорость пешехода.

1.33. Буксиру нужно отогнать за минимальное время два понтона вниз по реке на расстояние 1 км. Было решено, что один понтон будет отправлен по течению реки самостоятельно, а другой будет некоторое время транспортировать буксир, после чего он оставит его, вернется за первым и отбуксирует его до конечного пункта. Сколько километров должен транспортироваться второй понтон, чтобы оба пришли к конечному пункту одновременно, и сколько потребуется времени на всю перевозку, если собственная скорость буксира v км/ч, а скорость течения реки u км/ч?

1.34*. Пассажир поезда знает, что на данном участке пути скорость этого поезда равна 40 км/ч. Как только мимо окна начал проходить встречный поезд, пассажир пустил секундомер и заметил, что встречный поезд прошел мимо окна за 3 с. Определить скорость встречного поезда, если известно, что его длина 75 м.

1.35. По прямым параллельным путям, расстояние между которыми равно 60 м, равномерно в противоположных направлениях движутся два поезда. Длина каждого поезда равна 100 м. Стрелочник находится на расстоянии 40 м от ближайшего к нему пути. Первый поезд загораживает от стрелочника часть второго поезда в течение 5 с. Скорость первого поезда равна 16 м/с. Определить скорость второго поезда. (Шириной поездов пренебречь.)

1.36. Два одинаковых парохода отходят одновременно от двух пристаней: первый пароход от пристани A вниз по течению, второй от пристани B вверх по течению. К моменту встречи первый пароход проходит втрое больший путь, чем второй. Каждый из пароходов, дойдя до конечного пункта, стоит там некоторое время, а затем возвращается обратно. Если стоянка первого парохода в B на 40 мин больше стоянки второго парохода в A, то на обратном пути пароходы встречаются в 12 км от A. Если же стоянка первого парохода в B на 40 мин меньше стоянки второго парохода в A, то на обратном пути пароходы встречаются в 26 км от B. Найти расстояние между A и B и скорость пароходов в стоячей воде.

1.37. Пристани A и B находятся на противоположных берегах озера. Пароход плывет из A в B и после десятиминутной стоянки в B возвращается в A, двигаясь в обоих направлениях с постоянной скоростью 18 км/ч. В момент выхода парохода из A навстречу ему из B в A отправляется движущаяся с постоянной скоростью лодка, которая встречается с пароходом в 11 ч 10 мин. В 11 ч 25 мин лодка находится на расстоянии 3 км от A. Направляясь из B в A после стоянки, пароход догоняет лодку в 11 ч 40 мин. Определить время прибытия лодки в A.

1.38. Колонна мотоциклистов с интервалом между соседними машинами в 50 м движется со скоростью 15 км/ч. В противоположном направлении вдоль колонны (от первой машины) едет велосипедист. Поравнявшись с 45-м мотоциклистом, он увеличивает свою скорость на 10 км/ч, доезжает до последнего мотоциклиста, поворачивает и с той же (увеличенной) скоростью догоняет первую машину. Если бы велосипедист с самого начала двигался с этой увеличенной скоростью, то он вернулся бы к голове колонны на 15/8 мин раньше. Найти первоначальную скорость велосипедиста (длинами велосипеда, мотоцикла и временем поворота велосипедиста пренебречь).

При решении текстовых задач прежде всего необходимо решить вопрос о том, для каких неизвестных составлять систему уравнений. В основу выбора неизвестных может быть положен следующий принцип: неизвестные следует вводить так, чтобы с помощью уравнений наиболее просто записать имеющиеся в задаче условия. При этом вовсе не обязательно, чтобы величина, которую требуется найти, содержалась среди выбранных неизвестных. Как правило, при таком выборе неизвестных искомая величина будет представлять собой некую комбинацию введенных неизвестных, для нахождения которой нет необходимости определять по отдельности все входящие в нее неизвестные.

В задачах на движение в качестве неизвестных обычно бывает удобно выбирать расстояние (если оно не задано) и скорости движущихся объектов, фигурирующих в условии задачи.

Пример 1.3. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, и одновременно из пункта B в пункт A выехал велосипедист. После встречи они продолжали свой путь. Автомобиль, доехав до пункта B, повернул назад и догнал велосипедиста через 2 ч после момента первой встречи. Сколько времени после первой встречи ехал велосипедист до пункта A, если известно, что к моменту второй встречи он проехал 2/5 всего пути от B до A?

Решение. Введем следующие неизвестные: расстояние S между пунктами A и B, скорости велосипедиста и автомобилиста $V_а$ и $V_в$ соответственно, t — время от начала движения до первой встречи. Выпишем условие задачи в таблицу:

Условие задачи	Уравнение
К моменту первой встречи t автомобиль и велосипедист вместе проезжают все расстояние между пунктами A и B.	$(V_а+V_в)\cdot t=S$
Через два часа после момента первой встречи автомобиль, доехав до пункта B и повернув, догнал велосипедиста, т. е. путь, пройденный автомобилем, складывается из удвоенного расстояния, пройденного велосипедистом до первой встречи, и расстояния, которое велосипедист успел проехать за 2 ч.	$2V_а=2tV_в+2V_в$
К моменту второй встречи велосипедист проехал 2/5 всего расстояния между пунктами A и B	$V_в(t+2)=\frac{2}{5}S$

Неизвестное x, которое требуется найти по условию задачи, представляет собой время, необходимое велосипедисту, чтобы доехать до пункта A, после первой встречи. Оно может быть выражено как следующая комбинация введенных неизвестных t, $V_а$, $V_в$:

$$x=\frac{V_а\cdot t}{V_в}.$$

Из системы уравнений

$$(V_а+V_в)\,t=S,$$
$$2V_а=2tV_в+2V_в,$$
$$V_в(t+2)=\frac{2}{5}S$$

определим t и выразим отношение скоростей $V_а/V_в$ через t.

Из второго уравнения системы имеем

$$V_а/V_в=t+1. \quad (*)$$

Исключая S из первого и третьего уравнения системы и учитывая равенство (*), получаем для неизвестной t уравнение

$$t\,(t+2)=(t+2)\cdot\frac{5}{2},$$

корни которого $t_1=-2$ и $t_2=5/2$.

Так как по физическому смыслу задачи $t>0$, то искомое неизвестное имеет вид

$$x=(t+1)\,t=\frac{5}{2}\cdot\frac{7}{2}=\frac{35}{4}=8\,\frac{3}{4}.$$

Ответ. 8 ч 45 мин.

1.39. Из города A в город B вышел пассажирский поезд. В то же время из B в A вышел товарный поезд. Скорость каждого из поездов на всем участке движения постоянна. Через 2 ч после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 280 км. Пассажирский поезд прибыл к месту назначения через 9 ч, а товарный — через 16 ч после встречи. Определить, какое время находился в пути каждый поезд.

1.40. Два поезда отправляются навстречу друг другу с постоянными скоростями, один из Москвы, другой из Ленинграда. Они могут встретиться на середине пути, если поезд из Москвы отправится на 1,5 ч раньше. Если бы оба поезда вышли одновременно, то через 6 ч расстояние между ними составляло бы десятую часть первоначального. Сколько часов каждый поезд тратит на прохождение пути между Москвой и Ленинградом?

1.41. Два велосипедиста выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и, двигаясь каждый с постоянной скоростью, встречаются через $2\frac{2}{5}$ ч. Если бы первый велосипедист увеличил свою скорость на 50 %, а второй — на 20 %, то на преодоление расстояния между пунктами A и B первому велосипедисту понадобилось бы времени на 2/3 ч больше, чем второму. За какое время преодолевает расстояние между пунктами A и B каждый велосипедист, двигаясь с первоначальной скоростью?

1.42. Из пункта A по шоссе выехали одновременно два автомобиля, а через час вслед за ними выехал третий. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в полтора раза, а между третьим и вторым — в два раза. Скорость какого автомобиля, первого или второго, больше и во сколько раз? (Известно, что третий автомобиль не обогнал первые два.)

1.43. Пассажирский поезд вышел из пункта A в пункт B. Через 3 ч вслед за ним из A вышел скорый поезд. Скорый поезд догнал пассажирский на середине пути между пунктами A и B. В момент прибытия скорого поезда в пункт B пассажирский поезд прошел 13/16 расстояния от A до B. Сколько времени потратил пассажирский поезд на весь путь от A до B, если скорости движения пассажирского и скорого поездов постоянны?

1.44. Из пункта A в пункт B выехал велосипедист. В тот момент, когда он проехал 1/4 часть пути между A и B, из B в A выехал мотоциклист, который, прибыв в A, не задерживаясь, повернул обратно и одновременно с велосипедистом прибыл в B. Время движения мотоциклиста до первой встречи с велосипедистом равно времени движения мотоциклиста из A в B. Считая скорости мотоциклиста при движении из A в B и из B в A различными, найти, во сколько раз скорость мотоциклиста при движении из A в B больше скорости велосипедиста.

1.45. Из пункта A в пункт B выезжает автобус. Достигнув пункта B, он продолжает движение в том же направлении. В тот момент, когда автобус достиг пункта B, из пункта A выезжает автомобиль и движется в том же направлении, что и автобус. Время, необходимое автомобилю на путь из A в B, на 3 ч 20 мин меньше времени, необходимого автобусу на тот же путь. Найти эти времена, если сумма их в 1,5 раза больше времени, за которое автомобиль догонит автобус.

1.46. Два велосипедиста и пешеход одновременно отправились из пункта A в пункт B. Более чем через 1 ч после выезда у первого велосипедиста сломался велосипед, и он продолжал путь пешком, двигаясь в 4,5 раза медленнее, чем на велосипеде. Его обгоняют: второй велосипедист — через 5/8 ч после поломки, а пешеход — через 10,8 ч после поломки. К моменту поломки второй велосипедист проехал в два раза большее расстояние, чем то, которое прошел пешеход к моменту, на 5/36 ч более позднему, чем момент поломки. Через сколько часов после начала движения сломался велосипед?

1.47. Два пешехода вышли одновременно: первый из A в B, второй из B в A. Когда расстояние между ними сократилось в шесть раз, из B в A выехал велосипедист. Первый пешеход встретился с ним в тот момент, когда второй прошел 4/9 расстояния между B и A. Велосипедист в пункт A и первый пешеход в пункт B прибыли одновременно. Определить отношение скоростей пешеходов к скорости велосипедиста.

1.48. Города A и B расположены на берегу реки, причем город B расположен ниже по течению. В 9 ч утра из города A в город B отправляется плот. В это же время из города B в город A отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 ч. Доплыв до города A, лодка поворачивает обратно и приплывает в город B одновременно с плотом. Успеют ли лодка и плот прибыть в город B к 21 ч (того же дня)?

1.49. Из пункта A в пункт B едет трактор. Радиус переднего колеса трактора меньше радиуса заднего колеса. На пути из A в B переднее колесо сделало на 200 оборотов больше, чем заднее. Если бы длина окружности переднего колеса была в 5/4 раза больше, то на пути из A в B оно сделало бы на 80 оборотов больше, чем заднее колесо. Найти длины окружностей переднего и заднего колес трактора, если длина окружности заднего колеса на 1 м больше длины окружности переднего колеса.

1.50. В авторалли одновременно стартовали 3 спортивных автомобиля разных марок. Экипаж первого автомобиля во время пути 3 ч устранял поломку и в результате финишировал на 1 ч позже второго экипажа. Определить скорости автомобилей, если известно, что скорость второго автомобиля относится к скорости третьего как 5 : 4, скорость третьего на 30 км/ч меньше скорости первого и что между моментами финиша второго и третьего автомобилей прошло 3 ч.

1.51. Пароход делает рейсы между двумя городами; он идет с одной скоростью при хорошей погоде и с другой — при плохой. В понедельник хорошая погода во время рейса стояла на 1 ч дольше, чем плохая. Во вторник пароход шел при хорошей погоде столько, сколько накануне при плохой, а при плохой погоде — на 1 ч 4 мин дольше. В среду пароход шел при хорошей погоде на 2 ч 30 мин дольше, чем накануне, а плохая погода застигла его в 9 км от места назначения. В четверг хорошая погода длилась на 0,5 ч дольше, чем во вторник, а затем произошла авария, и пароход снизил скорость на 5 км/ч. Найдите расстояние, которое проходил пароход за день, и скорость парохода в хорошую и в плохую погоду, если известно, что пароход шел после аварии на полчаса дольше, чем до нее.

1.52. Три пешехода одновременно вышли в путь, каждый по своему маршруту. Через t ч второму пешеходу осталось идти в полтора раза больше того, что прошел первый, а первому осталось идти втрое больше того, что прошел третий. Через $2t$ ч после выхода первому осталось идти вдвое меньше того, что прошел второй, а третий пешеход прошел столько, сколько осталось идти первому и второму вместе. За какое время первый и второй пешеходы прошли свои маршруты?

Некоторые задачи содержат условия, математическая запись которых представляет собой неравенство.

Пример 1.4. Из города A в город B, находящийся на расстоянии 105 км от A, с постоянной скоростью v км/ч выходит автобус. Через 30 мин вслед за ним из A со скоростью 40 км/ч выезжает автомобиль, который, догнав в пути автобус, поворачивает обратно и движется с прежней скоростью. Определить все те значения v, при которых автомобиль возвращается в город A позже, чем автобус приходит в город B.

Решение. Наряду с неизвестной скоростью автобуса v введем также неизвестное t — время, прошедшее от момента отправления автобуса до встречи его с автомобилем.

Первое уравнение представляет собой математическую запись условия того, что автомобиль, вышедший на 0,5 ч позже, догнал автобус, который к моменту его выхода отъехал от города A на $0{,}5v$ км:

$$\frac{0{,}5v}{40-v}=t. \qquad (*)$$

Второе условие, которое выражено в виде требования, заключается в том, что автобус должен дойти до города B быстрее, чем автомобиль вернется в город A. Очевидно, что для возвращения автомобилю понадобится столько же времени, т. е. t, а автобусу, чтобы доехать до города B, понадобится время $\frac{105-40t}{v}$. Тогда требование можно записать как неравенство

$$\frac{105-40t}{v}<t. \qquad (**)$$

Подставляя в неравенство (**) t из уравнения (*), получаем относительно v следующее неравенство:

$$v^2+250v-210\cdot 40>0. \qquad (***)$$

Так как автомобиль должен был догнать автобус в пути, то расстояние до встречи не должно превышать 150 км. Следовательно, второе неравенство имеет вид

$$40t<105$$

или

$$40\cdot\frac{0{,}5v}{2(40-v)}<105. \qquad (****)$$

Решение системы неравенств (***), (****) представляет собой интервал $30<v\leqslant 33{,}6$.

Ответ. Скорость автобуса должна находиться в интервале значений $30<v\leqslant 33{,}6$.

1.53. Лодка спускается по течению реки на расстояние 10 км, а затем поднимается против течения на 6 км. Скорость течения равна 1 км/ч. В каких пределах должна лежать собственная скорость лодки, чтобы вся поездка заняла от 3 до 4 ч?

1.54. Лодка плывет по реке против течения, скорость которого v км/ч. Через 1 км пути она попадает в озеро со стоячей водой. С какой собственной скоростью должна двигаться лодка, чтобы общее расстояние S км она прошла не более чем за t ч?

1.55. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 120 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста и встречаются позже чем через 5 ч. На следующий день они выезжают одновременно в одну сторону из пунктов C и D, расстояние между которыми 36 км, причем велосипедист, едущий впереди, движется со скоростью, на 6 км/ч большей, чем накануне, а велосипедист, едущий сзади, движется с той же скоростью, что и накануне. Хватит ли второму велосипедисту 2 ч, чтобы догнать первого?

1.56. От пристани A к пристани B, находящейся от A на расстоянии 12 км, вниз по течению реки отходит моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 6 км/ч. Одновременно с ней из B в A выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/ч. После встречи они разворачиваются и возвращаются к своим пристаням. Определить все возможные значения скорости течения реки v, при которых лодка приходит в A не раньше чем через час после возвращения катера в B.

1.57. От пристани A вниз по реке, скорость течения которой равна v км/ч, отходит плот. Через час вслед за ним выходит катер, скорость которого в стоячей воде равна 10 км/ч. Догнав плот, катер возвращается обратно. Определить все те значения v, при которых к моменту возвращения катера в A плот проходит более 15 км.

1.58. Деревня расположена на берегу реки, а школа — на шоссе, пересекающем реку под прямым углом. Зимой школьник ходит из деревни в школу напрямик на лыжах и тратит на дорогу 40 мин. Весной, в распутицу, он идет берегом реки до шоссе, а дальше — по шоссе до школы и тратит на дорогу 1 ч 10 мин. Наконец, осенью он проходит вдоль реки половину расстояния, отделяющего деревню от шоссе, а дальше идет напрямик. При этом он доходит до школы быстрее чем за 57 мин. Установить, что дальше: деревня от шоссе или школа от реки, если известно, что пешком школьник ходит всегда с одной и той же скоростью, а на лыжах — со скоростью, на 25 % большей (реку и шоссе считать прямыми линиями).

Движение по окружности. Если два тела движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями v_1 и v_2 в разных направлениях, то время между их встречами вычисляется по формуле $2\pi R/(v_1 + v_2)$.

Если два тела движутся по окружности радиуса R с постоянными скоростями v_1 и v_2 $(v_1 > v_2)$ в одном направлении, то время между их встречами вычисляется по формуле $2\pi R/(v_1 - v_2)$.

Пример 1.5. Два тела, движущихся в разные стороны по окружности длиной 1 м с постоянными скоростями, встречаются каждые 6 с. При движении в одну сторону первое тело догоняет второе каждые 48 с. Найти линейные скорости этих тел.

Решение. Обозначим скорости первого и второго тел через v_1 м/с и v_2 м/с соответственно. Тогда в согласии с условием задачи получаем следующие системы уравнений:

$$\begin{aligned} 1/(v_1 + v_2) &= 6, \\ 1/(v_1 - v_2) &= 48, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} v_1 + v_2 &= 1/6, \\ v_1 - v_2 &= 1/48. \end{aligned}$$

Решая последнюю систему, получаем $v_1 = 3/32$, $v_2 = 7/96$.

Ответ. Скорость первого тела равна 3/32 м/с, скорость второго равна 7/96 м/с.

1.59. Два тела движутся по окружности равномерно в одну сторону. Первое тело проходит окружность на 2 с быстрее второго и догоняет второе тело каждые 12 с. За какое время каждое тело проходит окружность?

1.60. Два спортсмена бегут по одной замкнутой дорожке на стадионе. Скорость каждого постоянна, но на пробег всей дорожки первый тратит на 10 с меньше, чем второй. Если они начнут бег с общего старта в одном направлении, то еще раз встретятся через 720 с. Какую часть длины всей дорожки пробегает в секунду каждый?

1.61. По двум концентрическим окружностям равномерно вращаются две точки. Одна из них совершает полный оборот на 5 с быстрее, чем другая, и поэтому успевает сделать в 1 мин на два оборота больше. Сколько оборотов в минуту совершает каждая точка?

1.62. По окружности радиуса R равномерно в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный круг на t с быстрее второй, а время между последовательными встречами равно T. Определить скорости точек.

1.63. На беговой дорожке состязались два конькобежца на дистанции S км. Когда победитель подошел к финишу, другому оставалось бежать еще целый круг. Определить длину беговой дорожки, если победитель, проходя каждый круг на a с быстрее побежденного, закончил дистанцию за t мин.

1.64*. Часовая и минутная стрелки совмещаются в полночь. В какое время нового дня впервые вновь совпадут часовая и минутная стрелки, если допустить, что стрелки часов движутся без скачков?

1.65. Часы показывают в некоторый момент на 2 мин меньше, чем следует, хотя они спешат. Если бы они показывали на 3 мин меньше, но уходили бы вперед в сутки на 1/2 мин больше, чем уходят сейчас, то верное время они показали бы на сутки раньше, чем покажут. На сколько минут в сутки спешат эти часы?

1.66. По сигналу дрессировщика два пони одновременно побежали равномерно вдоль внешней окружности арены цирка в противоположных направлениях. Первый пони бежал быстрее второго и к моменту встречи пробежал на 5 м больше, чем второй. Продолжая бег, первый пони подбежал к дрессировщику через 9 с после встречи со вторым пони, а второй — через 16 с после встречи. Каков диаметр арены?

1.67. На дороге, представляющей собой окружность длиной в 36 км, пункты A и B являются диаметрально противоположными точками этой окружности. Велосипедист выехал из пункта A и сделал два круга. Первый круг он прошел с некоторой постоянной скоростью, после чего уменьшил скорость на 3 км/ч. Известно, что время между двумя его прохождениями через пункт B равно 5 ч. Определить скорость, с которой велосипедист прошел первый круг.

1.68. Три гонщика — сначала A, потом B и затем C — стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении с постоянными скоростями. Каждый гонщик затрачивает на круг более 2 мин. Сделав три круга, гонщик A в первый раз догоняет B у точки старта, а еще через 3 мин он вторично обгоняет C. Гонщик B впервые догнал C также у точки старта, закончив 4 круга. За сколько минут проходит круг гонщик A?

1.69. Три гонщика A, B и C, стартовав одновременно, движутся с постоянными скоростями в одном направлении по кольцевому шоссе. В момент старта гонщик B находился перед гонщиком A на расстоянии 1/3 длины шоссе, а гонщик C — перед гонщиком B на таком же расстоянии. Гонщик A впервые догнал B в тот момент, когда B закончил свой круг, а еще через 10 мин впервые догнал гонщика C. Гонщик B тратит на круг на 2,5 мин меньше, чем C. За сколько минут проходит круг гонщик A?

1.70. Из пункта A кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл, каждый с постоянной скоростью. Автомобиль без остановок дважды проехал по шоссе в одном направлении. В момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил скорость на 16 км/ч и через 22,5 мин после разворота одновременно с автомобилем прибыл в пункт A. Найти длину всего пути мотоцикла, если этот путь на 5,25 км короче длины шоссе.

Задачи на равноускоренное движение. При решении этих задач используются две следующие формулы, связывающие время t, пройденное расстояние S, начальную скорость v_0, ускорение a и скорость v:

$$S = v_0 t + at^2/2,$$
$$a = (v - v_0)/t,$$

где $a > 0$, если движение равноускоренное, и $a < 0$, если движение равнозамедленное.

Пример 1.7. Автомобиль едет от пункта A до пункта B с постоянной скоростью 42 км/ч. В пункте B он переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки. Затем он сразу же начинает двигаться равноускоренно с ускорением a км/ч². Каково должно быть значение a, чтобы через 3 ч после возобновления движения автомобиль находился ближе всего к пункту B?

Решение. Обозначим расстояние от пункта B до места остановки автомобиля через S_1 км, а время движения автомобиля от момента выезда из пункта B до момента остановки — через t_1 ч. Через S_2 км обозначим расстояние, которое проехал автомобиль за 3 ч после возобновления движения. Условия задачи с помощью введенных неизвестных можно записать в виде системы уравнений, полученных из таблицы:

Условие задачи	Уравнение
В пункте B автомобиль, движущийся со скоростью 42 км/ч, переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на a км/ч, и едет так до полной остановки	$\frac{42}{t_1} = a$ $S_1 = 42t_1 - \frac{at_1^2}{2}$
Автомобиль движется равноускоренно с ускорением a км/ч² в течение 3 ч	$S_2 = \frac{a\cdot 3^2}{2}$

Таким образом, получена система трех уравнений

$$a = 42/t_1,$$
$$S_1 = 42t_1 - at_1^2/2,$$
$$S_2 = 9a/2$$

для нахождения четырех неизвестных a, t_1, S_1 и S_2. Однозначно найти искомое ускорение a из данной системы нельзя. Однако в условии задачи содержится еще одно условие, позволяющее найти величину a, а именно требуется найти такое значение a, чтобы расстояние $S_1 + S_2$ было минимальным. Запишем расстояние $S_1 + S_2$ в виде функции ускорения a. Из первого уравнения системы получаем $t_1 = 42/a$. Подставляя вместо t_1 во второе уравнение системы величину $42/a$ и складывая полученное уравнение с третьим уравнением системы, получаем

$$S_1 + S_2 = \frac{42^2}{2a} + \frac{9a}{2}.$$

Функция $f(a) = S_1 + S_2$ на промежутке $(0; \infty)$ достигает наименьшего значения при $a = 14$.

Ответ. $a = 14$ км/ч².

1.71. Известно, что свободно падающее тело проходит в первую секунду 4,9 м, а в каждую следующую — на 9,8 м больше, чем в предыдущую. Пусть два тела начали падать с одной высоты одно за другим с интервалом 5 с. Через какое время они будут друг от друга на расстоянии 220,5 м?

1.72. Два тела начали двигаться одновременно в одном и том же направлении из двух точек, расстояние между которыми 20 м. Одно из них, находящееся позади, движется равноускоренно и проходит в первую секунду 25 м, а в каждую следующую — на 1/3 м больше, чем в предыдущую; другое тело, двигаясь равнозамедленно, проходит в первую секунду 30 м, а в каждую следующую — на 1/2 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько секунд они встретятся?

1.73. Две материальные частицы, находящиеся на расстоянии 295 м одна от другой, одновременно начали двигаться навстречу друг другу. Первая частица движется равномерно со скоростью 15 м/с, а вторая в первую секунду продвинулась на 1 м, а в каждую следующую секунду продвигается на 3 м больше, чем в предыдущую. На какой угол переместится секундная стрелка часов за время, прошедшее от начала движения частиц до их встречи?

1.74. Два тела движутся навстречу друг другу из двух точек, расстояние между которыми 390 м. Первое тело прошло в первую секунду 6 м, а в каждую следующую проходило на 6 м больше, чем в предыдущую. Второе тело двигалось равномерно со скоростью 12 м/с и начало движение спустя 5 с после первого. Через сколько секунд после того, как начало двигаться первое тело, они встретятся?

1.75. Два парохода движутся навстречу друг другу в тумане с одинаковыми скоростями V_0. На расстоянии 4 км между ними капитаны включают на некоторое время обратный ход с ускорением 0,1 м/с². Какова наибольшая скорость пароходов V_0, при которой они не столкнутся?

1.76. Мяч катится по футбольному полю перпендикулярно его боковой линии. Предположим, что, двигаясь равнозамедленно, мяч катился в первую секунду 4 м, а в каждую следующую секунду — на 0,75 м меньше, чем в предыдущую. Футболист, находящийся первоначально в 10 м от мяча, побежал в направлении движения мяча, чтобы догнать его. Двигаясь равноускоренно, футболист пробежал в первую секунду 3,5 м, а в каждую следующую секунду пробегал на 0,5 м больше, чем в предыдущую. За какое время футболист догонит мяч и успеет ли он догнать мяч до выхода того за боковую линию, если до линии поля футболисту надо пробежать 23 м?

1.77. Автомобиль ехал в гору. В первую секунду после достижения пункта A он проехал 30 м, а в каждую следующую

секунду он проезжал на 2 м меньше, чем в предыдущую. Через 9 с после того, как автомобиль достиг пункта A, навстречу ему выехал автобус из пункта B, находящегося на расстоянии 258 м от пункта A. В первую секунду автобус проехал 2 м, а в каждую следующую секунду он проезжал на 1 м больше, чем в предыдущую. Какое расстояние проехал автобус до встречи с автомобилем?

1.78. Мотоциклист выезжает из пункта A и движется с постоянным ускорением 12 км/ч² (начальная скорость равна нулю). Достигнув скорости v км/ч, он едет с этой скоростью 25 км, а затем переходит на равнозамедленное движение, причем за каждый час его скорость уменьшается на 24 км/ч, и движется так до полной остановки. Затем он сразу же поворачивает обратно и едет до пункта A с постоянной скоростью v км/ч. При какой скорости v мотоциклист быстрее всего проделает обратный путь от остановки до пункта A?

1.79. Два автомобиля едут по шоссе друг за другом на расстоянии 20 м со скоростью 24 м/с. Шоферы, заметив впереди препятствие, начинают тормозить. В результате автомобили переходят на равнозамедленное движение с ускорениями a_1 и a_2 ($a_1 < 0$ и $a_2 < 0$) и движутся так до полной остановки. Шофер переднего автомобиля начал торможение на 2 с раньше шофера заднего автомобиля. Ускорение переднего автомобиля есть $a_1 = -4$ м/с². Наименьшее расстояние, на которое сближались автомобили, равнялось 4 м. Определить, какой автомобиль остановился раньше, и найти ускорение a_2 заднего автомобиля.

1.80. Грузовой лифт опускается в башне высотой 320 м. Сначала он движется со скоростью 20 м/с, а потом его скорость мгновенно переключается и становится равной 50 м/с. Спустя некоторое время после начала движения лифта с вершины башни сбрасывают камень, который совершает свободное падение и достигает земли одновременно с лифтом. Известно, что во время падения камень был все время выше лифта, причем максимальная разность высот между ними составляла 60 м. В момент переключения скорости лифта скорость камня превышала 25 м/с, но была меньше 45 м/с. Определить, спустя какое время после начала движения лифта сбросили камень. При решении задачи ускорение свободного падения камня считать равным 10 м/с².

1.81*. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю, ускорения различны), а затем, достигнув некоторой скорости, равномерно. Отношение скоростей при равномерном движении поездов равно

4/3. В момент встречи поезда имели равные скорости, а в пункты B и A прибыли одновременно. Найти отношение ускорений поездов.

1.82*. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно вышли два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно, а затем, достигнув некоторой скорости, равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно 5/4. В некоторый момент времени скорости поездов оказались равными; один из них прошел к этому моменту расстояние, в $1\frac{1}{4}$ раза большее, чем другой. В пункты B и A поезда прибыли одновременно. Какую часть пути прошел каждый из поездов к тому времени, когда их скорости оказались равными?

1.83. С поезда сошли два пассажира и направились в один и тот же пункт. Первый шел половину времени со скоростью a км/ч, а вторую половину — со скоростью b км/ч, а второй первую половину пути — со скоростью b км/ч, а вторую половину — со скоростью a км/ч. Который из них пришел быстрее к месту назначения?

§ 2. Задачи на работу и производительность труда

Система уравнений, которую можно составить на основании условий, в задачах на работу обычно содержит следующие величины: время t, в течение которого производится работа, производительность N — работу, произведенную в единицу времени, и собственно работу A, произведенную за время t.

Уравнение, связывающее эти три величины, имеет вид $A = N \cdot t$.

К задачам на работу можно с очевидными изменениями отнести часто встречающиеся задачи на перекачивание жидкости насосами. В качестве произведенной работы в этом случае удобно рассматривать объем перекачанной воды.

Пример 2.1. В бассейн проведены две трубы — подающая и отводящая, причем через первую трубу бассейн наполняется на 2 ч дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на одну треть бассейне были открыты обе трубы, и бассейн оказался пустым спустя 8 ч. За сколько часов одна первая труба может наполнить бассейн и за сколько часов одна вторая труба может опорожнить полный бассейн?

Решение. Пусть V м^3 — объем бассейна, производительность падающей трубы — x м^3/ч, отводящей — y м^3/ч. Время, необходимое подающей трубе для заполнения бассейна, — V/x ч, время, необходимое отводящей трубе на опорожнение бассейна, — V/y ч. По условию задачи

$$V/x - V/y = 2.$$

Так как производительность отводящей трубы больше производительности наполняющей $(x < y)$, то при обеих включенных трубах будет происходить опорожнение бассейна и одна треть бассейна опорожнится за время $\frac{V/3}{y-x}$, которое по условию задачи равно 8 ч.

Итак, условие задачи может быть записано в виде системы двух уравнений для трех неизвестных

$$V/x - V/y = 2,$$
$$V/(y-x) = 24.$$

Разделим числитель и знаменатель дроби, стоящей во втором уравнении системы, на V. Тогда относительно непрерывных $u = \frac{V}{x}$ и $v = \frac{V}{y}$ получим следующую систему уравнений:

$$u - v = 2,$$
$$\frac{uv}{u-v} = 24,$$

которая эквивалентна системе

$$u - v = 2,$$
$$u \cdot v = 48,$$

т. е. $u = 8$, $v = 6$.

Ответ. 8 ч и 6 ч.

Пример 2.2. Для прокладки траншеи выделены два экскаватора разных типов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, на 3 ч меньше времени, необходимо второму экскаватору. Сумма этих времен в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов. Определить, сколько времени необходимо каждому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи.

Решение. В качестве неизвестных введем следующие величины: A м^3 — объем вынутого грунта, N_1 м^3/ч и N_2 м^3/ч — производительности первого и второго экскаваторов. Время, необходимое первому экскаватору для самостоятельной прокладки траншеи, — A/N_1, а второму — A/N_2. По условию задачи эти две величины связаны равенством

$$A/N_1 + 3 = A/N_2,$$

а их сумма $A/N_1 + A/N_2$ в $4\frac{4}{35}$ раза больше времени, необходимого для прокладки траншеи при совместной работе двух экскаваторов, т. е.

$$4\frac{4}{35}\,\frac{A}{N_1+N_2}=\frac{A}{N_1}+\frac{A}{N_2} \Leftrightarrow 4\frac{4}{35}\,\frac{1}{\dfrac{N_1}{A}+\dfrac{N_2}{A}}=\frac{A}{N_1}+\frac{A}{N_2}.$$

Введем неизвестные $x=\frac{A}{N_1}$ и $y=\frac{A}{N_2}$. Тогда исходная система может быть записана в виде

$$4\frac{4}{35}\,\frac{xy}{x+y}=x+y$$
$$x+3=y.$$

Подставляя y из второго уравнения в первое, получаем относительно x следующее уравнение:

$$4x^2+12x-315=0.$$

Положительный корень этого уравнения $x=7{,}5$ представляет собой время самостоятельной прокладки траншеи первым экскаватором. Из второго уравнения системы получаем, что $y=10{,}5$.

Ответ. 7,5 ч и 10,5 ч.

2.1. Бригада лесорубов должна была по плану за несколько дней заготовить 216 $м^3$ дров. Первые три дня она работала по плану, а затем каждый день заготовляла на 8 $м^3$ дров больше, чем предусмотрено планом; поэтому уже за день до назначенного срока было заготовлено 232 $м^3$ дров. Сколько кубометров дров должна была заготавливать бригада в день по плану?

2.2. Бригада слесарей может выполнить некоторое задание по обработке деталей на 15 ч быстрее, чем бригада учеников. Если бригада учеников отработает 18 ч, выполняя это задание, а потом бригада слесарей продолжит выполнение задания в течение 6 ч, то и тогда будет выполнено только 3/5 всего задания. Сколько времени требуется бригаде учеников для самостоятельного выполнения данного задания?

2.3. Бак наполняется двумя кранами A и B. Наполнение бака только через кран A длится на 22 мин дольше, чем наполнение через кран B. Если же открыть оба крана, то бак наполнится за 1 ч. За какое время каждый кран в отдельности может наполнить бак?

2.4. В кинозале имеются две (разные) двери. Через обе двери зрители после сеанса могут покинуть зал в течение $3\frac{3}{4}$ мин.

Если их выпускать через одну бóльшую дверь, то выход из зала займет времени на 4 мин меньше, чем в том случае, если их выпускать через меньшую дверь. Сколько времени требуется, чтобы выпустить зрителей из зала кино через каждую дверь в отдельности?

2.5. Три вычислительные машины разных систем выполняют некоторую работу. Одна вторая машина затрачивает на выполнение всей работы на 2 мин больше, чем одна первая. Одна третья машина может выполнить всю работу вдвое медленнее, чем одна первая. Так как части работы однотипны, то всю работу можно поделить между тремя машинами. Тогда, работая вместе, они закончат работу через 2 мин 40 с. За какое время может выполнить эту работу каждая машина, работая самостоятельно?

2.6. A выполняет некоторую работу на t дней дольше, чем B, и на T дней дольше, чем C; A и B, работая вместе, выполняют эту работу за столько же дней, что и C. Определить время, за которое каждый выполняет эту работу самостоятельно. При каком соотношении между t и T задача имеет решение?

2.7. Каждому из трех рабочих для выполнения некоторой работы требуется определенное время, причем третий рабочий выполняет ее на час быстрее первого. Работая все вместе, они выполнят работу за 1 ч. Если же первый рабочий проработает 1 ч, а затем второй рабочий проработает 4 ч, то вместе они выполнят всю работу. За сколько времени может выполнить всю работу каждый рабочий?

2.8. Двое рабочих получили одинаковые задания изготовить определенное число деталей за определенный срок. Первый выполнил задание в срок, а второй выполнил в срок только 90 % задания, не додав столько деталей, сколько первый делал за 40 мин. Если бы второй рабочий делал в час на три детали больше, он выполнил бы задание на 95 %. Сколько деталей должен был изготовить каждый рабочий?

2.9. Два рабочих выполнили всю работу за 10 дней, причем последние 2 дня первый из них не работал. За сколько дней первый рабочий выполнил бы всю работу, если известно, что за первые 7 дней они вместе выполнили 80 % всей работы?

2.10. Две бригады штукатуров, работая совместно, оштукатурили жилой дом за 6 дней. В другой раз они штукатурили клуб и выполнили втрое больший объем работы, чем на штукатурке жилого дома. В клубе они работали по очереди: сначала работала первая бригада, а затем ее сменила и довела до конца штукатурку клуба вторая бригада, причем первая бригада выполнила вдвое больший объем работы, чем вторая. Клуб был оштукатурен за 35 дней. За сколько дней первая бригада смогла бы оштукатурить жилой дом, если известно, что вторая бригада потратила бы на это более 14 дней?

2.11. Бригада из трех тракторов (два трактора марки A и один трактор марки B) вспахивает поле площадью 400 га за 10 суток при одновременной работе всех трех тракторов. Трактор марки B вспахивает все это поле на $8\frac{1}{3}$ суток быстрее, чем то же поле вспахивает один трактор марки A. Сколько гектаров в сутки вспахивают трактор марки A и трактор марки B каждый в отдельности?

2.12*. Каждому из двух рабочих поручили обработать одинаковое число деталей. Первый начал работу сразу и выполнил ее за 8 ч. Второй же потратил сначала больше 2 ч на наладку приспособления, а затем с его помощью закончил работу на 3 ч раньше первого. Известно, что второй рабочий через час после начала своей работы обработал столько же деталей, сколько к этому моменту обработал первый. Во сколько раз приспособление увеличивает производительность станка (т. е. количество обрабатываемых деталей за час работы)?

2.13. Два трактора вспахивают поле, разделенное на две равные части. Оба трактора начали работу одновременно, и каждый вспахивает свою половину. Через 5 ч после того момента, когда они совместно вспахали половину всего поля, выяснилось, что первому трактору осталось вспахать 1/10 часть своего участка, а второму — 4/10 своего участка. Сколько времени понадобится второму трактору, чтобы одному вспахать все поле?

2.14. Бригада рабочих должна была изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

2.15. Двум машинисткам было поручено выполнить некоторую работу. Вторая приступила к работе на 1 ч позднее первой. Через 3 ч после того, как первая начала работу, им осталось выполнить 9/20 всей работы. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всей работы. За сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить всю работу?

2.16. Три бригады работают с постоянной производительностью, прокладывая рельсовые пути. Первая и третья бригады, работая совместно, прокладывают 15 км путей в месяц. Три бригады вместе укладывают в месяц в два раза больше путей, чем первая и вторая бригады при их совместной работе. Найти, сколько километров путей укладывает в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада.

2.17. Для разгрузки парохода выделены две бригады грузчиков. Сумма времени, необходимого первой бригаде для самостоятельной разгрузки парохода, и времени, необходимого второй бригаде для самостоятельной разгрузки парохода, равна 12 ч. Найти эти времена, если их разность составляет 45 % от времени, необходимого бригадам для совместной разгрузки парохода.

2.18. К резервуару объемом 24 м^3 подведены две трубы. Через первую трубу вода может только выливаться со скоростью 2 м^3/ч, а вторая труба может только наполнять резервуар. Вначале, когда резервуар был пуст, одновременно открыли две трубы. После того как резервуар оказался заполненным наполовину, первую трубу закрыли, а вторая продолжала наполнять резервуар. В результате резервуар был наполнен за 28 ч 48 мин. Какое количество воды за 1 ч подает вторая труба?

2.19. Два насоса перекачали 64 м^3 воды. Они начали работать одновременно и с одинаковой производительностью. После того как первый из них перекачал 9 м^3 воды, его остановили на 1 ч 20 мин. После перерыва производительность первого насоса увеличили на 1 м^3/ч. Определить начальную производительность насосов, если первый насос перекачал 33 м^3 воды и оба насоса окончили работу одновременно.

2.20. На угольной шахте сначала работали два участка, а через некоторое время вступил в строй третий участок, в результате чего производительность шахты увеличилась в полтора раза. Сколько процентов составляет производительность второго участка от производительности первого, если известно, что за четыре месяца первый и третий участки выдают угля столько же, сколько второй за весь год?

2.21. Два рабочих, из которых второй начал работать на 1,5 дня позже первого, работая независимо один от другого, оклеили обоями несколько комнат за 7 дней, считая с момента выхода на работу первого рабочего. Если бы эта работа была поручена каждому отдельно, то первому для ее выполнения понадобилось бы на 3 дня больше, чем второму. За сколько дней каждый из них отдельно выполнил бы эту же работу?

2.22. Если две трубы открыть одновременно, то бассейн наполнится за 2 ч 24 мин. В действительности же сначала была открыта только первая труба на 1/4 времени, необходимого второй трубе для наполнения бассейна. Затем первую трубу закрыли и открыли вторую трубу на 1/4 времени, необходимого первой, чтобы одной наполнить бассейн. После этого оказалось, что остается наполнить еще 11/24 часть объема бассейна. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

2.23. Два студента одновременно начали готовиться к экзамену, назначенному для обоих на один и тот же день. Первый студент должен прочитать 240 страниц, а второй — 420. Каждый читает ежедневно одно и то же целое число страниц, причем первый прочитывает на 12 страниц меньше второго. После того как каждый прочел свой материал по одному разу, у них осталось время на повторение: у первого — 7 дней, у второго — 5 дней. Определить, какое целое число страниц в день надо было бы читать каждому студенту, чтобы на повторение им осталось по 3 дня.

2.24. В одном из отсеков судна возникла течь, и отсек оказался целиком заполнен водой. Для откачки воды включены два насоса разной производительности. Через 18 ч после этого течь была устранена, второй насос выключен, и еще через 12 ч воды в отсеке не осталось. Если бы течь устранить не удалось, то два насоса осушили бы отсек наполовину через 10 ч совместной работы. За какое время второй насос осушил бы отсек наполовину, если бы не удалось устранить течь?

2.25. Три экскаватора участвовали в рытье котлована объемом 340 м³. За час первый экскаватор вынимает 40 м³ грунта, второй — на c м³ меньше первого, а третий — на $2c$ м³ больше первого. Сначала работали одновременно первый и второй экскаваторы и выкопали 140 м³ грунта. Затем оставшуюся часть котлована выкопали, работая одновременно, первый и третий экскаваторы. Определить значение c $(0 < c < 15)$, при котором котлован был выкопан за 4 ч, если работа велась без перерыва.

2.26. Три экскаватора получили задание вырыть по котловану: первый и второй — емкостью по 800 м³, а третий — емкостью 400 м³. Первый и второй экскаваторы вместе вынимают за час грунта в 3 раза больше, чем третий; первый и третий экскаваторы начали работу одновременно, а второй — в тот момент, когда первый вынул уже 300 м³ грунта. Когда третий экскаватор выполнил 2/3 своей работы, второй вынул 100 м³ грунта. Первым выполнил свое задание третий экскаватор. Сколько кубометров грунта вынул первый экскаватор к моменту, когда третий закончил рыть свой котлован?

2.27*. Имеется три насоса. Второй насос перекачивает за час вдвое больше воды, чем первый, а третий насос перекачивает за час на 8 м³ больше, чем второй. Два бассейна вместимостью 600 м³ и 1680 м³ начали заполнять одновременно. Бассейн вме-

стимостью 600 м³ заполнял первый насос. В другой бассейн сначала вторым насосом накачали 240 м³, а затем его без потери времени заменили третьим насосом, который и заполнил полностью этот бассейн. Больший бассейн был заполнен на 6 ч позднее, чем меньший бассейн. Если бы в больший бассейн с самого начала качал воду только третий насос, то он был бы заполнен на 5 ч позднее, чем первый бассейн. Сколько кубометров воды перекачивает за час первый насос?

В некоторых задачах искомая величина является комбинацией неизвестных, относительно которых удается составить уравнения, используя условия задачи.

Пример 2.3. Бассейн был наполнен водой несколькими насосами одинаковой производительности, которые включались в работу один за другим через равные промежутки времени. Первый насос перекачал на $V_л$ больше последнего. Если промежутки времени между включениями насосов уменьшить втрое, то время наполнения уменьшится на 10 %. Какой объем воды перекачает каждый насос при наполнении бассейна, если одновременно включить все насосы?

Решение. Введем неизвестные, неявно фигурирующие в условии задачи: n — число насосов, x — производительность, t_1 — время работы одного насоса в первом случае, d — интервал между включениями насосов, t_2 — время работы одного насоса при одновременном включении.

Так как времена работы насосов образуют арифметическую прогрессию и последний при этом перекачивает воды на $V_л$ меньше первого, можно составить уравнение

$$xt_1 - x[t_1 - (n-1)d] = V_л. \qquad (*)$$

В первом случае объем перекачанной воды V можно выразить через введенные неизвестные, используя формулу суммы арифметической прогрессии:

$$V = \frac{2xt_1 - x(n-1)d}{2} \cdot n.$$

Во втором случае промежутки между включениями сократились в три раза и время наполнения — на 10 %, т. е. тот же объем будет равен

$$V = \frac{2x\,0{,}9t_1 - x(n-1)\dfrac{d}{3}}{2} \cdot n.$$

Приравнивая эти выражения, получаем второе уравнение

$$t_1x = \frac{10}{3}x(n-1)d. \qquad (**)$$

Если сразу будут включены все насосы, то к моменту наполнения бассейна каждый из них проработает время t_2, а перекачает $x \cdot t_2$ литров. Так как насосов всего n, а вместе они перекачают весь объем, то можно составить следующее уравнение:

$$\frac{2xt_1 - x(n-1)d}{2} \cdot n = xt_2 \cdot n,$$

или

$$xt_2 = \frac{2xt_1 - x(n-1)d}{2}. \qquad (***)$$

Из уравнения (*) $x(n-1)d = V_л$, а из (**) $xt_1 = \frac{10}{3} V_л$. Подставляя эти значения в (***), получаем

$$xt_2 = \frac{17}{6} V_л.$$

Ответ. $\frac{17}{6} V_л$.

2.28. Для уборки урожая было выделено несколько одинаковых комбайнов, которые могли бы убрать поле за 24 ч, если бы приступили к работе одновременно. Но случилось так, что они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания уборки. За какое время была проведена уборка урожая, если первый комбайн работал в 5 раз дольше, чем последний?

2.29*. Бассейн заполняется с помощью нескольких насосов одинаковой производительности, которые включились один за другим через равные промежутки времени. Последний насос перекачал V л воды. Сколько воды перекачал первый насос, если известно, что при уменьшении производительности каждого насоса на 10 % (при таких же промежутках между включениями) время наполнения бассейна увеличится на 10 %?

2.30. Три насоса одновременно начали выкачивать воду, каждый из своего резервуара. Когда третий насос опорожнил α-ю часть объема своего резервуара ($\alpha < 1/2$), второму оставалось качать столько, сколько выкачал первый; когда третьему оставалось опорожнить $(1-\alpha)$-ю часть объема, первому оставалось выкачать столько, сколько выкачал второй. Первый насос опорожняет второй резервуар за то же время, за какое второй насос опорожняет первый резервуар. Какой из насосов работал дольше других и во сколько раз? (Производительность каждого насоса постоянна.) Исследовать зависимость решения от величины α.

2.31*. Бассейн был заполнен с помощью нескольких насосов, которые включались один за другим через некоторые промежутки времени. Большую часть времени насосы работали вместе и вторую половину бассейна наполнили за t ч быстрее первой. Насколько быстрее будет заполнен бассейн, если промежутки между включениями насосов уменьшить в n раз при той же последовательности включения? (Производительность каждого насоса постоянна.)

2.32. Бассейн наполнялся несколькими насосами одинаковой производительности, которые включались один за другим через равные промежутки времени. К моменту включения последнего насоса была заполнена 1/6 часть бассейна. В другой раз при наполнении этого бассейна производительность каждого насоса была уменьшена на 10 %, а промежутки между включениями остались прежними. Какую часть бассейна наполнят насосы в этот раз за первую половину всего времени работы?

§ 3. Задачи на процентный прирост и вычисление «сложных процентов»

Решение задач на процентный прирост и вычисление «сложных процентов» основано на использовании следующих понятий и формул. Пусть некоторая переменная величина A, зависящая от времени t, в начальный момент $t = 0$ имеет значение A_0, а в некоторый момент времени t_1 имеет значение A_1. *Абсолютным приростом* величины A за время t_1 называется *разность* $A_1 - A_0$, *относительным приростом* величины A за время t_1 — отношение $\frac{A_1 - A_0}{A_0}$ и *процентным приростом* величины A за время t_1 — величина

$$\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\,\%.$$

Обозначая процентный прирост величины A через p %, получаем следующую формулу, связывающую значения A_0, A_1 и процентный прирост p:

$$\frac{A_1 - A_0}{A_0} \cdot 100\,\% = p\,\%.$$

Запись последней формулы в виде

$$A_1 = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0 + A_0 \frac{p}{100}$$

позволяет по известному значению A_0 и заданному значению p вычислить значение A_1, т. е. значение A в момент времени t_1.

Пусть теперь известно, что и далее при $t > t_1$ величина A имеет процентный прирост p %. Тогда в момент времени $t_2 = 2t_1$ значение величины $A_2 = A(t_2)$ будет равно

$$A_2 = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2.$$

В момент времени $t_3 = 3t_1$ значение величины $A_3 = A(t_2)$ есть

$$A_3 = A_2\left(1 + \frac{p}{100}\right) = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3$$

в момент времени nt_1:

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Если за время t_1 (на «первом этапе») величина A изменилась на p_1 %, на «втором этапе» (т. е. за время $t_2 - t_1 = t_1$) — на p_2 %, на «третьем этапе» (т. е. за время $t_3 - t_2 = t_1$) — на p_3 % и т. д., то значение величины A в момент $t_n = nt_1$ вычисляется по формуле

$$A_n = A_0\left(1 + \frac{p_1}{100}\right)\left(1 + \frac{p_2}{100}\right)\ \ldots\ \left(1 + \frac{p_n}{100}\right).$$

Пример 3.1. Предприятие работало три года. Выработка продукции за второй год работы предприятия возросла на p %, а на следующий год она возросла на 10 % больше, чем в предыдущий. Определить, на сколько процентов увеличилась выработка за второй год, если известно, что за два года она увеличилась в общей сложности на 48,59 %.

Решение. Обозначим количество продукции, произведенной за первый, второй и третий годы работы предприятия, через A_1, A_2 и A_3 соответственно. По условию задачи за второй год процентный прирост составил p %, а за третий год — $(p + 10)$ %. В соответствии с определением процентного прироста эти условия дают два уравнения

$$\frac{A_2 - A_1}{A_1}\cdot 100\ \% = p\ \%, \qquad \frac{A_3 - A_2}{A_2}\cdot 100\ \% = (p + 10)\ \%.$$

По условию задачи также известно, что за два года производство выросло на 48,59 %, т. е. в третий год предприятие произвело на 48,59 % продукции больше, чем в первый год. Это условие можно записать в виде уравнения

$$\frac{A_3 - A_1}{A_1}\cdot 100\ \% = 48{,}59\ \%.$$

Запишем полученные уравнения в виде следующей системы:

$$A_2 = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right),$$
$$A_3 = A_2\left(1 + \frac{p+10}{100}\right),$$
$$A_3 = A_1\left(1 + \frac{48{,}59}{100}\right).$$

Умножая первое уравнение на второе, получаем

$$A_3 = A_1\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p+10}{100}\right).$$

Из полученного уравнения и третьего уравнения системы получаем уравнение для отыскания неизвестной величины p:

$$\left(1 + \frac{p}{100}\right)\left(1 + \frac{p+10}{100}\right) = 1 + \frac{48{,}59}{100} \Rightarrow p^2 + 210p - 3859 = 0.$$

Корни последнего квадратного уравнения: $p_1 = 17$, $p_2 = 227$. По смыслу задачи подходит первый корень $p_1 = 17$.

Ответ. 17 %.

3.1. Сберкасса начисляет ежегодно 3 % от суммы вклада. Через сколько лет внесенная сумма удвоится?

3.2. Население города ежегодно увеличивается на 1/50 наличного числа жителей. Через сколько лет население утроится?

3.3. За килограмм одного продукта и десять килограммов другого заплачено 2 р. Если при сезонном изменении цен первый продукт подорожает на 15 %, а второй подешевеет на 25 %, то за такое же количество этих продуктов будет заплачено 1 р. 82 к. Сколько стоит килограмм каждого продукта?

3.4. В начале года в сберкассу на книжку было внесено 1640 р., а в конце года было взято обратно 882 р. Еще через год на книжке снова оказалось 882 р. Сколько процентов начисляет сберкасса в год?

3.5. В букинистическом магазине антикварное собрание сочинений стоимостью 350 р. уценивали дважды на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что после двойного снижения цен собрание сочинений стоит 283 р. 50 к.

3.6. В течение года завод дважды увеличивал выпуск продукции на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что в начале года завод выпускал ежемесячно 600 изделий, а в конце года стал выпускать ежемесячно 726 изделий.

3.5. Вкладчику на его сберкнижку за год сберкасса начислила 6 р. процентных денег. Добавив 44 р., вкладчик оставил деньги еще на год. По истечении года вновь было произведено начисление процентов, и теперь вклад вместе с процентами составил 257 р. 50 к. Какая сумма первоначально была положена на сберкнижку и был ли этот вклад обыкновенным (2 %-ным) или срочным (3%-ным)?

3.8. Магазин радиотоваров продал в первый рабочий день месяца 105 телевизоров. В каждый следующий рабочий день дневная продажа возросла на 10 телевизоров, и месячный план — 4000 телевизоров — был выполнен досрочно, причем в целое число рабочих дней. После этого ежедневно продавалось на 13 телевизоров меньше, чем в последний день выполнения плана. На сколько процентов был перевыполнен месячный план продажи телевизоров, если в месяце 26 рабочих дней?

3.9. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной 670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть — в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала ба равной 710 денежным единицам. В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

3.10. Производительность завода A составляет 40,96 % производительности завода B. Годовой процент прироста продукции на заводе A на 30 % больше годового прироста продукции на заводе B. Каков годовой процент прироста продукции на заводе A, если на четвертый год работы завод A даст то же количество продукции, что и завод B?

3.11. Вклад в N рублей положен в сберегательную кассу с p %-ным годовым приростом. В конце каждого года вкладчик берет M рублей. Через сколько лет после взятия соответствующей суммы остаток будет втрое больше первоначального вклада?

3.12. В колбе в начальный момент имеется N бактерий. К концу каждого часа количество бактерий увеличивается на p % по сравнению с их количеством в начале этого часа; кроме того, в конце каждого часа из колбы берется порция, содержащая n ($n < N$) бактерий. Через сколько часов количество бактерий в колбе будет превышать (после изъятия соответствующей порции) начальное их количество в два раза?

§ 4. Задачи с целочисленными неизвестными

Целочисленность искомого неизвестного обычно является дополнительным условием, позволяющим выбрать его однозначно из некоторого множества значений, удовлетворяющих остальным условиям задачи.

Пример 4.1. Группа студентов, состоящая из 30 человек, получила на экзамене оценки 2, 3, 4, 5. Сумма полученных оценок равна 93, причем «троек» было больше, чем «пятерок», и меньше, чем «четверок». Кроме того, число «четверок» делилось на 10, а число «пятерок» было четным. Определить, сколько каких оценок получила группа.

Решение. Обозначим количество «двоек» — x, «троек» — y, «четверок» — z, «пятерок» — u. Тогда условия задачи можно записать в виде следующей системы уравнений и неравенств:

$$\begin{aligned} x + y + z + u &= 30,\\ 2x + 3y + 4z + 5u &= 93,\\ y &> u,\\ y &< z,\\ z &= k\cdot 10,\\ u &= 2l, \quad l,\ k \text{ — целые числа.}\end{aligned}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$x + 2y + 3z + 4u = 63. \qquad (*)$$

Так как z кратно 10, то единственное возможное значение для k — это $k = 1$. Действительно, при $k > 1$ уравнение (*) не имеет решения в целых положительных числах. Используя то, что $z = 10$, перейдем от уравнения (*) к уравнению

$$x + 2y + 4u = 33. \qquad (**)$$

Возможные значения для u (оно должно быть положительным, четным и меньшим $y < 10$) $u = 2, 4, 6, 8$. Однако при $u = 6$ и $u = 8$ получаем, что $8\ u > y$ при любом x. Следовательно, проверке подлежат лишь значения 4 и 2.

При $u = 4$ неизвестные x и y можно найти из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} x + 2y &= 17,\\ 2x + 3y &= 33,\end{aligned}$$

решением которой является пара $y = 1$, $x = 15$, не удовлетворяющая условию $y > u$. При $u = 2$ система уравнений для x, y имеет вид

$$\begin{aligned} x + 2y &= 25,\\ 2x + 3y &= 43.\end{aligned}$$

Решение этой системы $x = 11$, $y = 7$ удовлетворяет условиям задачи.

Ответ. «Пятерок» — 2, «четверок» — 10, «троек» — 7, «двоек» — 11.

4.1. Школьник переклеивает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листке которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

4.2. В классе писали контрольную работу. Среди выставленных за нее оценок встречаются только оценки 2, 3, 4, 5. Оценки 2, 3, 5 получило одинаковое число учеников, а оценок 4 поставлено больше, чем всех остальных вместе взятых. Оценки выше 3 получили менее 10 учеников. Сколько троек и сколько четверок было поставлено, если писали контрольную не менее 12 учеников?

4.3. Квартал застроен пятиэтажными и девятиэтажными домами, причем девятиэтажных домов меньше, чем пятиэтажных. Если число девятиэтажных домов увеличить вдвое, то общее число домов станет больше 24, а если увеличить вдвое число пятиэтажных домов, то общее число домов станет менее 27. Сколько построено пятиэтажных домов и сколько девятиэтажных?

4.4. На стоянке находятся машины марок «Москвич» и «Волга». Общее число их менее 30. Если увеличить вдвое число «Волг», а число «Москвичей» увеличить на 27, то «Волг» станет больше; а если увеличить вдвое число «Москвичей», не изменяя числа «Волг», то «Москвичей» станет больше. Сколько «Москвичей» и сколько «Волг» находится на стоянке?

4.5. В школьной газете сообщается, что процент учеников некоторого класса, повысивших во втором полугодии успеваемость, заключен в пределах от 2,9 до 3,1 %. Определить минимально возможное число учеников в таком классе.

4.6*. Завод должен переслать заказчику 1100 деталей. Детали для пересылки упаковываются в ящики. Имеются ящики трех типов. Ящик первого типа вмещает 70 деталей, ящик второго типа — 40 деталей, ящик третьего типа — 25 деталей. Стоимость пересылки ящика первого типа составляет 20 р., стоимость пересылки ящика второго типа — 10 р., стоимость пересылки ящика третьего типа — 7 р. Какие ящики должен использовать завод, чтобы стоимость пересылки была наименьшей? (Недогрузка ящиков не допускается.)

4.7*. Колхоз арендовал два экскаватора. Аренда первого экскаватора стоит 60 р. в день, производительность его в мягком грунте — 250 м³ в день, в твердом грунте — 150 м³ в день. Аренда второго экскаватора стоит 50 руб. в день, его производительность в мягком грунте — 180 м³ в день, а в твердом — 100 м³ в день. Первый экскаватор проработал несколько полных дней и вынул 720 м³. Второй за несколько полных дней вынул 330 м³. Сколько дней работал каждый экскаватор, если колхоз заплатил за аренду не более 300 р.?

4.8. В вазе лежат конфеты двух сортов, причем число конфет первого сорта более чем на 20 штук превышает число конфет второго сорта. Одна конфета первого сорта весит 2 г, а конфета второго сорта — 3 г. Из вазы взяли 15 конфет одного сорта, вес которых составил пятую часть от веса всех конфет, лежавших в вазе. Затем было взято еще 20 конфет другого сорта; их вес оказался равным весу оставшихся в вазе конфет. Сколько конфет каждого сорта лежало первоначально в вазе?

При решении некоторых задач с целочисленными неизвестными область изменения искомого неизвестного удается получить лишь вследствие определения области изменения вспомогательного неизвестного, некоторой функцией от которого является искомое неизвестное. Условие целочисленности при этом используется лишь для получения однозначного ответа.

Пример 4.2. Из пункта A в пункт B сплавляют по реке плоты, отправляя их через равные промежутки времени. Скорости всех плотов относительно берега реки постоянны и равны между собой. Пешеход, идущий из A в B по берегу реки, прошел треть пути от A до B к моменту отплытия первого плота. Дойдя до B, пешеход сразу отправился в A и встретил первый плот, пройдя более 3/13 пути от B до A, а последний плот он встретил, пройдя более 9/10 пути от B до A. Пешеход в пункт A и седьмой плот в пункт B прибыли одновременно. Из пункта A пешеход сразу вышел в B и прибыл туда одновременно с последним плотом. Скорость пешехода постоянна, участок реки от A до B прямолинейный. Сколько плотов отправлено из A в B?

Решение. Составим систему уравнений и неравенств исходя из условий задачи. Для этого обозначим: расстояние от A до B через S, скорости пешехода и реки через $v_п$ и $v_р$ соответственно, число плотов через n, расстояние от пункта B до встречи пешехода с первым плотом через x, расстояние от пункта A до встречи пешехода с последним плотом через y, Δ — интервал времени между пусками отдельных плотов.

Все уравнения составляются из условия равенства интервалов времени, прошедших для каждого из движущихся объектов от момента начала движения до встречи:

Условие задачи	Уравнение
Время, прошедшее до встречи пешехода и первого плота	$\dfrac{\frac{2}{3}S+x}{v_п}=\dfrac{S-x}{v_р}$
Время, прошедшее до встречи пешехода и последнего плота	$\dfrac{y}{v_р}+(n-1)\Delta=\dfrac{\frac{5}{3}S-y}{v_п}$
Пешеход пришел в пункт A, когда седьмой плот пришел в пункт B	$\dfrac{\frac{5}{3}S}{v_п}=\dfrac{S}{v_р}+6\Delta$
Пешеход пришел в пункт B одновременно с последним плотом	$\dfrac{\frac{8}{3}S}{v_п}=\dfrac{S}{v_р}+(n-1)\Delta$

К этой системе уравнений исходя из условий задачи следует добавить еще два неравенства:

$$x>\frac{3}{13}S,\quad y<\frac{1}{10}S. \qquad (*)$$

Выразим x и y из первого и второго уравнений системы, заменив $(n-1)\Delta$ на разность

$$\frac{\frac{8}{3}S}{v_п}-\frac{S}{v_р},$$

и подставим эти выражения в неравенства $(*)$. Имеем систему неравенств

$$\frac{\dfrac{S}{v_р}-\dfrac{2}{3}\dfrac{S}{v_п}}{\dfrac{1}{v_п}+\dfrac{1}{v_р}}>\frac{3}{13}S,\qquad \frac{\dfrac{S}{v_р}-\dfrac{S}{v_п}}{\dfrac{1}{v_п}+\dfrac{1}{v_р}}<\frac{1}{10}S. \qquad (**)$$

В этой системе удобно ввести неизвестное $z=\dfrac{v_р}{v_п}$, тогда относительно этого неизвестного система $(**)$ приобретает вид

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{3-2z}{3(1+z)}>\dfrac{3}{13},\\ \dfrac{1-z}{1+z}<\dfrac{1}{10}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}39-26z>9+9z,\\ 10-10z<1+z,\end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{9}{11}<z<\frac{6}{7}.$$

Из двух оставшихся уравнений выразим искомое неизвестное n через неизвестное z. Так как

$$n-1=\frac{\dfrac{\frac{8}{3}S}{v_п}-\dfrac{S}{v_р}}{\Delta},\qquad \Delta=\frac{1}{6}\left(\frac{\frac{5}{3}S}{v_п}-\frac{S}{v_р}\right),$$

$$n-1=\frac{\left(\dfrac{8}{3}\dfrac{S}{v_п}-\dfrac{S}{v_р}\right)6}{\dfrac{5}{3}\dfrac{S}{v_п}-\dfrac{S}{v_р}}\text{ или}$$

$$n-1=\frac{48z-18}{5z-3}.$$

Функция $f(z)=\dfrac{48z-18}{5z-3}$ убывает на всей области определения, таким образом, наибольшее значение этой функции на отрезке $z\in\left(\dfrac{9}{11},\dfrac{6}{7}\right)$ достигается в точке $\dfrac{9}{11}$ и равно $\dfrac{234}{12}$, а наименьшее — в точке $\dfrac{6}{7}$ и равно $\dfrac{162}{9}$, т. е. справедливо неравенство

$$\frac{162}{9}<n-1<\frac{234}{12}.$$

Единственным целым числом, удовлетворяющим указанному неравенству, является число 19.

Ответ. $n=20$.

4.9. Несколько самосвалов загружаются поочередно в пункте A (время загрузки одно и то же для всех машин) и отвозят груз в пункт B; там они мгновенно разгружаются и возвращаются в A. Скорости машин одинаковы, скорость груженой машины составляет 6/7 скорости порожней. Первым выехал из A водитель Петров. На обратном пути он встретил водителя Иванова, выехавшего из A последним, и прибыл в A через 6 мин после встречи. Здесь Петров сразу же приступил к загрузке, а по окончании ее выехал в B и встретил Иванова во второй раз через 40 мин после первой встречи. От места второй встречи до A Иванов ехал не менее 16 мин, но не более 19 мин. Определить время загрузки.

4.10. Из пункта A в пункт B сплавляют по реке плоты, отправляя их через равные промежутки времени. Скорости плотов постоянны и равны между собой. Пешеход, идущий из A в B, прошел четверть пути от A до B к моменту отплытия первого плота. Этот плот поравнялся с пешеходом, проплыв более 6/11 пути от A до B. Пешеход, прибыв в B одновременно с четвертым плотом, сразу отправился в A. Пройдя более 9/14 пути от B до A, он встретил последний плот и прибыл в A одновременно с прибытием этого плота в B. Сколько отправлено плотов?

Еще одним типом задач на составление уравнений с целочисленными неизвестными являются задачи на запись чисел в десятичной позиционной системе счисления.

Пример 4.3. Искомое трехзначное число оканчивается цифрой 1. Если эту цифру перенести с последнего места на первое, сохранив порядок остальных двух цифр, то вновь полученное число будет меньше искомого на 90. Найти это число.

Решение. Обозначим число сотен искомого трехзначного числа через m, а число десятков — через n. Искомое трехзначное число $mn1$ (знак умножения между m, n и 1 отсутствует, m, n — цифры десятичной системы счисления, и $m \neq 0$) есть сокращенная запись числа $m \cdot 10^2 + n \cdot 10 + 1$. Трехзначное число, образованное в результате переноса 1 с последнего места на первое, будет $1 \cdot 10^2 + m \cdot 90 + n$. По условию задачи последнее число на 90 меньше искомого:

$$m \cdot 10^2 + n \cdot 10 + 1 = 1 \cdot 10^2 + m \cdot 10 + n + 90.$$

Таким образом, получено одно уравнение с двумя неизвестными m и n, причем мы знаем, что m и n — цифры десятичной позиционной системы счисления и $m \neq 0$. Число единиц в числе, стоящем слева, должно совпадать с числом единиц в числе, стоящем справа, и поэтому $n = 1$. Теперь уравнение приобретает вид

$$m \cdot 10^2 + 10 = 1 \cdot 10^2 + m \cdot 10 + 90,$$

откуда находим, что $m = 2$.

Ответ. Искомое число — 211.

Пример 4.4. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4, а в остатке 3. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3, а в остатке 5. Найти это число.

Решение. Прежде чем перейти к решению задачи, напомним, что если число N делится на число p и в частном получается число k, а в остатке число r $(r < p)$, то число N представимо в виде

$$N = kp + r.$$

На использовании этого равенства и основано решение задачи.

Запишем двузначное число в виде $10 \cdot m + n$. Условие задачи приводит к системе двух уравнений:

$$\begin{cases} 10m + n = 4(m+n) + 3, \\ 10m + n = 3mn + 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6m = 3n + 3, \\ 10m + n = 3mn + 5, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 2m - 1, \\ 10m + n = 3mn + 5. \end{cases}$$

Подставляя $n = 2m - 1$ во второе уравнение системы, получаем уравнение

$$2m^2 - 5m + 1 = 0,$$

решения которого $m_1 = 2$, $m_1 = 1/2$. Условию задачи (m и n — цифры) удовлетворяет только корень $m = 2$. Из первого уравнения системы находим $n = 3$.

Ответ. Искомое число — 23.

4.11. Какое двузначное число меньше суммы квадратов его цифр на 11 и больше их удвоенного произведения на 5?

4.12. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к искомому числу прибавить 36, то получим число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найти это число.

4.13. Сумма квадратов цифр двузначного числа равна 13. Если от этого числа отнять 9, то получим число, записанное теми же цифрами в обратном порядке. Найти это число.

4.14*. Задумано целое положительное число меньше 10. К его записи присоединили справа цифру 5 и из получившегося нового числа вычли квадрат задуманного числа. Разность разделили на задуманное число, а затем вычли задуманное число. Осталась единица. Какое число задумано?

4.15. Ученику надо было умножить 72 на двузначное число, в котором десятков втрое больше единиц; по ошибке он переставил цифры во втором сомножителе, отчего получил произведение на 2592 меньше истинного. Чему равно истинное произведение?

4.16*. Запись шестизначного числа начинается цифрой 2. Если цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

4.17. Определить целое положительное число по следующим данным: если к его цифровой записи присоединить справа цифру 4, то получим число, делящееся без остатка на число, большее искомого на 4, а в частном получится число, меньшее делителя на 27.

4.18*. Сумму всех четных двузначных чисел разделили на одно из них без остатка. Получившееся частное только порядком цифр отличается от делителя, а сумма его цифр равна 9. Какое двузначное число являлось делителем?

4.19. К цифровой записи некоторого задуманного положительного числа приписали справа еще какое-то положительное однозначное число. Из получившегося таким образом нового числа вычли квадрат задуманного числа. Эта разность оказалась больше задуманного числа во столько раз, сколько составляет дополнение приписанного числа до 11. Требуется доказать, что это возможно тогда и только тогда, когда приписанное число равно задуманному.

4.20. Найти два двузначных числа, обладающих следующим свойством: если к большему искомому числу приписать справа 0 и затем меньшее число, а к меньшему приписать справа большее число и затем 0, то из образовавшихся таким образом двух пятизначных чисел первое, будучи разделенным на второе, дает в частном 2 и в остатке 590. Кроме того, известно, что сумма удвоенного большего искомого числа и утроенного меньшего равна 72.

4.21. При перемножении чисел, из которых одно на 10 больше другого, была допущена ошибка: цифру десятков в произведении уменьшили на 4. При делении (для проверки ответа) полученного произведения на меньший множитель получили в частном 39, а в остатке 22. Найти сомножители.

4.22*. Найти два двузначных числа A и B по следующему условию: если цифровую запись числа A записать впереди B и полученное число разделить на B, то в частном получится 121. Если же цифровую запись числа B записать впереди числа A и полученное число разделить на A, то в частном будет 84, а в остатке 14. Найти A и B.

4.23*. Квадрат целого положительного простого числа N делится (с остатком) на 3, полученное неполное частное делится (без остатка) на 3, частное вновь (с остатком) делится на 3, и, наконец, полученное неполное частное опять с остатком делится на 3 и дает в результате 16. Найти N.

4.24*. Знаменатель дроби больше квадрата ее числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить 2, то дробь будет больше 1/4; а если отнять от числителя и знаменателя 3, то дробь будет меньше 1/10. Найти дробь.

4.25*. Два брата продали стадо овец, выручив за каждую овцу столько рублей, сколько было овец в стаде. Желая разделить выручку поровну, они поступили следующим образом: каждый брат, начиная со старшего, брал из общей суммы по десять рублей. После того как в очередной раз старший брат взял десять рублей, остаток от выручки оказался меньше десяти рублей. Желая его компенсировать, старший брат отдал младшему свой нож. Во сколько рублей был оценен этот нож?

§ 5. Задачи на концентрацию и процентное содержание

Решение задач на концентрацию и процентное содержание основано на использовании следующих понятий и формул.

Пусть даны три различных вещества A, B и C с массами M_A, M_B и M_C. Масса смеси, составленной из этих веществ, равна $M_A+M_B+M_C$.

Массовой концентрацией вещества A в смеси называется величина c_A, вычисляемая по формуле

$$c_A=\frac{M_A}{M_A+M_B+M_C}.$$

Соответственно массовые концентрации веществ B и C в этой смеси вычисляются по формулам

$$c_B=\frac{M_B}{M_A+M_B+M_C},\quad c_C=\frac{M_C}{M_A+M_B+M_C}.$$

Массовые концентрации c_A, c_B и c_C связаны равенством

$$c_A+c_B+c_C=1.$$

Процентными содержаниями вещества A, B, C в данной смеси называются величины p_A %, p_B % и p_C % соответственно, вычисляемые по формулам

$$p_A\,\% = c_A\cdot 100\,\%,\quad p_B\,\% = c_B\cdot 100\,\%,\quad p_C\,\% = c_C\cdot 100\,\%.$$

По аналогичным формулам вычисляются концентрации веществ в смеси и для случая, когда число различных смешиваемых веществ (компонент) равно двум, четырем, пяти и т. д.

Объемные концентрации веществ в смеси определяются такими же формулами, как и массовые концентрации, только вместо масс компонент M_A, M_B и M_C в этих формулах будут стоять объемы компонент V_A, V_B и V_C. В тех случаях, когда речь идет об объемных концентрациях, обычно предполагается, что при смешивании веществ объем смеси будет равен сумме объемов компонент. Это предположение не является физическим законом, а представляет собой соглашение, принимаемое при решении задач на объемную концентрацию.

Пример 5.1. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70 %-ного раствора серной кислоты. Во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90 %-ного раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился r %-ный раствор серной кислоты? Найти все значения r, при которых задача имеет решение.

Решение. Обозначим через x л объем 90 %-ного раствора серной кислоты, который переливается из второго сосуда в первый. В этом объеме содержится $\frac{9x}{10}$ л чистой (100 %-ной) серной кислоты. Первоначально в первом сосуде объем чистой серной кислоты был равен $\frac{7}{10}\cdot 4$ (л). После того как в первый сосуд долили x л 90 %-ного раствора серной кислоты, в нем будет содержаться $\frac{7}{10}\cdot 4+\frac{9}{10}x$ л чистой серной кислоты. Используя определение объемного процентного содержания, в соответствии с условием задачи получаем уравнение

$$\frac{\frac{7}{10}\cdot 4+\frac{9}{10}x}{x+4}\cdot 100\,\% = r\,\%.$$

Решая это уравнение, находим величину перелитого объема:

$$x=\frac{4(r-70)}{90-r}.$$

Остается выяснить, при каких значениях r задача имеет решение. Из условия задачи очевидно, что количество доливаемого раствора не может превысить 2 л, так как объем первого сосуда равен 6 л, т. е. $0\leqslant x\leqslant 2$. Используя найденное значение для x, получим ограничения на r:

$$0\leqslant\frac{4(r-70)}{90-r}\leqslant 2.$$

Решая данное неравенство (с учетом того, что $70\leqslant r\leqslant 90$), получим $70\leqslant r\leqslant 76\frac{2}{3}$.

Ответ. $\frac{4(r-70)}{90-r}$ (л); задача имеет решение при $70\leqslant r\leqslant 76\frac{2}{3}$.

5.1. Имеется кусок сплава меди с оловом общей массой 12 кг, содержащий 45 % меди. Сколько чистого олова надо добавить к этому куску сплава, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

5.2. Имеются два слитка сплавов меди и олова. Первый весит 3 кг и содержит 40 % меди, второй весит 7 кг и содержит 30 % меди. Какого веса нужно взять куски этих слитков, чтобы после их совместной переплавки получить 8 кг сплава, содержащего r % меди? Найти все значения r, при которых задача имеет решение.

5.3. Свежие фрукты содержат 72 % воды, а сухие — 20 %. Сколько сухих фруктов получается из 20 кг свежих?

5.4. Морская вода содержит (по весу) 5 % соли. Сколько килограммов пресной воды нужно прибавить к 40 кг морской воды, чтобы содержание соли в растворе составило 2 %?

5.5. В двух сосудах находился раствор вещества различной концентрации, причем в первом сосуде на m литров меньше, чем во втором. Из каждого сосуда взяли одновременно по n литров и взятое из первого сосуда перелили во второй, а взятое из второго — в первый. После этого концентрации растворов в обоих сосудах стали одинаковыми. Найти, сколько литров раствора было в каждом сосуде.

5.6*. Из двух кусков с различным процентным содержанием меди, весящих m кг и n кг, отрезано по одинаковому куску. Каждый из отрезанных кусков сплавлен с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих сплавах стало одинаковым. Сколько весил каждый из отрезанных кусков?

5.7. Сплавили два сорта чугуна с разным процентным содержанием хрома. Если одного сорта взять в 5 раз больше другого, то процентное содержание хрома в сплаве вдвое превысит процентное содержание хрома в меньшей из сплавляемых частей. Если же взять одинаковое количество обоих сортов, то сплав будет содержать 8 % хрома. Определить процентное содержание хрома в каждом сорте чугуна.

5.8*. Даны три различных соединения железа. В каждом кубическом сантиметре первого соединения содержится на 3/20 г железа меньше, чем в каждом кубическом сантиметре второго соединения, а в каждом кубическом сантиметре третьего соединения — в 10/9 раза больше, чем в каждом кубическом сантиметре первого соединения. Кусок третьего соединения, содержащий 1 г железа, имеет объем на 4/3 см^3 больший, чем кусок второго соединения, также содержащий 1 г железа. В каком объеме третьего соединения содержится 1 г железа?

Указание. Воспользоваться формулой $m=\rho V$, связывающей массу, плотность и объем вещества.

5.9. Величины процентного содержания спирта в трех растворах образуют геометрическую прогрессию. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 2 : 3 : 4, то получится раствор, содержащий 32 % спирта. Если же смешать их в отношении 3 : 2 : 1, то получится раствор, содержащий 22 % спирта. Сколько процентов спирта содержит каждый раствор?

5.10*. В лаборатории имеются растворы поваренной соли четырех различных концентраций. Если смешать первый, второй и третий растворы в весовом отношении 3 : 2 : 1, то получится 15 %-ный раствор. Второй, третий и четвертый растворы, взятые в равной пропорции, дают при смешивании 24 %-ный раствор, и, наконец, раствор, составленный из равных весовых частей первого и третьего растворов, имеет концентрацию 10 %. Какая концентрация получится при смешении второго и четвертого растворов в пропорции 2 : 1?

5.11. Три одинаковые пробирки наполнены до половины растворами спирта. После того как содержимое третьей пробирки разлили поровну в первые две, объемная концентрация спирта в первой уменьшилась на 20 % своей величины, а во второй — увеличилась на 10 % своей величины. Во сколько раз первоначальное количество спирта в первой пробирке превышало первоначальное количество спирта во второй пробирке? (Изменением объема при смешивании растворов пренебречь.)

5.12. Имеются два раствора соли в воде. Для получения смеси, содержащей 10 г соли и 90 г воды, берут первого раствора вдвое больше по массе, чем второго. Через неделю из каждого килограмма первого и второго растворов испарилось по 200 г воды и для получения той же смеси, что и раньше, требуется первого раствора уже вчетверо больше по массе, чем второго. Сколько граммов соли содержалось первоначально в 100 г каждого раствора?

5.13. Имеются два водных раствора вещества A и B, различающихся весовыми соотношениями веществ A, B и воды. В первом растворе вещества A столько же, сколько воды, а вещества B в полтора раза больше, чем вещества A. Во втором растворе вещества B в два раза меньше, чем вещества A, и в два раза больше, чем воды. Сколько нужно взять каждого раствора и сколько добавить воды, чтобы получить 37 кг нового раствора, в котором вещества A столько же, сколько вещества B, а воды в два раза больше, чем вещества A?

5.14. В пустой резервуар по двум трубам одновременно начинают поступать чистая вода и раствор кислоты постоянной концентрации. После наполнения резервуара в нем получился 5 %-ный раствор кислоты. Если бы в тот момент, когда резервуар был наполнен наполовину, подачу воды прекратили, то после наполнения резервуара получили бы 10 %-ный раствор кислоты. Определить, какая труба подает жидкость быстрее и во сколько раз.

5.15. Две трубы, работая вместе, подают в бак 100 л жидкости в минуту. Имеются два раствора кислоты — сильный и слабый. Если смешать по 10 л каждого раствора и 20 л воды, то получится 40 л 20 %-ного раствора. Известно также, что если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе слабый раствор, а по второй — сильный, то получится 30 %-ный раствор кислоты. Какой концентрации (в процентах) получится раствор кислоты, если в течение часа подавать в первоначально пустой бак по первой трубе сильный раствор, а по второй — слабый? (Считается, что при смешивании воды и кислоты объем не меняется.)

5.16. Имеются 3 слитка различных сплавов золота с серебром. Известно, что количество золота в 2 г сплава из третьего слитка то же, что во взятых вместе 1 г из первого и 1 г из второго слитков. Вес третьего слитка равен суммарному весу части первого слитка, содержащей 10 г золота, и части второго слитка, содержащей 80 г золота. Третий слиток в 4 раза тяжелее первого и содержит 75 г золота. Сколько граммов золота содержится в первом слитке?

5.17. Имеются два сплава, состоящих из цинка, меди и олова. Известно, что первый сплав содержит 40 % олова, а второй — 26 % меди. Процентное содержание цинка в первом и втором сплавах одинаково. Сплавив 150 г первого сплава и 250 г второго, получим новый сплав, в котором будет 30 % цинка. Определить, сколько килограммов олова содержится в новом сплаве.

5.18. Имеются три сплава. Первый сплав содержит 30 % никеля и 70 % меди, второй — 10 % меди и 90 % марганца, третий — 15 % никеля, 25 % меди и 60 % марганца. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 40 % марганца. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание меди может быть в этом новом сплаве?

5.19. Из бутыли, наполненной 12 %-ным (по массе) раствором соли, отлили 1 л и налили 1 л воды, затем отлили еще 1 л и опять долили водой. В бутыле оказался 3 %-ный (по массе) раствор соли. Какова вместимость бутыли?

5.20. Имеются два бака: первый бак наполнен чистым глицерином, второй — водой. Взяли два трехлитровых ковша, зачерпнули первым полный ковш глицерина из первого бака, а вторым — полный ковш воды из второго бака, после чего первый ковш влили во второй бак, а второй ковш влили в первый бак. Затем, после перемешивания, снова зачерпнули первым полный ковш смеси из первого бака, вторым — полный ковш смеси из второго бака и влили первый ковш во второй бак, а второй ковш — в первый бак. В результате половину объема первого бака занял чистый глицерин. Найти объемы баков, если известно, что их суммарный объем в 10 раз больше объема первого бака.

5.21. Из сосуда, наполненного 96 %-ным раствором кислоты, отлили 2,5 л и долили 2,5 л 80 %-ного раствора той же кислоты, затем еще раз отлили 2,5 л и снова долили 2,5 л 80 %-ного раствора кислоты. После этого в сосуде получился 89 %-ный раствор кислоты. Определить вместимость сосуда.

5.22. В каждом из двух сосудов находится по V л чистой кислоты. Из первого сосуда отлили a л кислоты и долили a л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Из второго сосуда отлили $2a$ л кислоты и долили $2a$ л воды. Потом эту процедуру повторили еще раз. Известно, что в результате концентрация кислоты в первом сосуде оказалась в 25/16 раза больше, чем концентрация кислоты во втором сосуде. Какую часть объема сосуда составляют a л?

5.23. Непромытый золотой песок содержит k % чистого золота. После каждой промывки вымывается p % содержащихся в нем примесей и теряется q % имеющегося в песке золота. Сколько следует произвести промывок, чтобы процент содержания чистого золота в золотом песке был не меньше r?

§ 6. Разные задачи

В задачах этого параграфа требуется определить значение некоторой комбинации неизвестных, представив ее в виде функции от других комбинаций неизвестных, числовые значения которых определены условиями задачи.

Пример 6.1. Три экскаватора разной производительности рыли котлован. Если бы производительность первого была в 2 раза, а третьего — в 3 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за 5 дней. Если бы производительность первого была в 3 раза, второго — в 2 раза, а третьего — в 4 раза больше, чем в действительности, то котлован был бы вырыт за $3\frac{3}{4}$ дня. За сколько дней котлован был вырыт в действительности?

Решения. Обозначая объем котлована v, а действительные производительности первого, второго и третьего экскаваторов x, y, z соответственно, составим следующие два уравнения:

$$5(2x+y+3z)=v,$$
$$3\frac{3}{4}(3x+2y+4z)=v.$$

Если искомую величину — число дней, за которое в действительности был вырыт котлован, — обозначить t, то можно составить третье уравнение

$$t(x+y+z)=v.$$

Полученную систему из 3-х уравнений обозначим (*). Комбинацию неизвестных $t=\dfrac{v}{x+y+z}$ требуется представить в виде некоторой функции от комбинаций неизвестных $\dfrac{v}{2x+y+3z}$ и $\dfrac{v}{3x+2y+4z}$, числовые значения которых 5 и $3\frac{3}{4}$ соответственно определены условиями задачи.

Перепишем систему уравнений (*) в следующем виде:

$$2x+y+3z=\frac{v}{5},$$
$$3x+2y+4z=\frac{4v}{15},$$
$$x+y+z=\frac{v}{t}.$$

Очевидно, что если найдутся такие действительные числа α и β, при которых выполняется соотношение

$$\alpha(2x+y+3z)+\beta(3x+2y+4z)=x+y+z, \qquad (**)$$

то справедливым будет и уравнение

$$\alpha\left(\frac{v}{5}\right)+\beta\left(\frac{4v}{15}\right)=\frac{v}{t}. \qquad (***)$$

Из уравнения (***) t можно выразить в виде

$$t=\frac{15\cdot 5}{15\alpha+20\beta}=\frac{15}{3\alpha+4\beta}.$$

Числа α и β находятся из сравнения коэффициентов при неизвестных в левой и правой части уравнения (**):

$$2\alpha+3\beta=1,$$
$$\alpha+2\beta=1,$$
$$3\alpha+4\beta=1.$$

Из первых двух уравнений получаем $\beta=1$, $\alpha=-1$. Третье уравнение является следствием первых двух. Подставляя найденные α и β в (***), получаем

$$t=15.$$

Ответ. 15 дней.

6.1. Гвоздь, 3 винта и 2 шурупа весят 24 г, а 2 гвоздя, 5 винтов и 4 шурупа весят 44 г. Сколько весят вместе гвоздь, 4 винта и 2 шурупа.

6.2. Трое рабочих должны сделать некоторое количество деталей за определенное время. Если бы первый работал половину отведенного времени, второй — $\frac{1}{3}$ этого времени, а третий — $\frac{1}{4}$ часть, то они сделали бы 30 деталей. Если бы первый работал $\frac{1}{6}$ часть отведенного времени, второй — $\frac{1}{10}$, а третий — $\frac{1}{15}$, то они сделали бы 10 деталей. Какое количество деталей сделали бы трое рабочих вместе, если бы работали все отведенное время?

6.3. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка — в 2 раза дешевле, а книга — в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 руб. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка — в 4 раза дешевле, а книга — в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы 12 руб. Сколько стоит покупка и за что уплачено больше: за портфель или за авторучку?

6.4. Имеется три типа станков разной производительности. При этом 3 станка первого типа, 4 второго и 2 третьего справляются со всей работой за 2 ч, 2 станка первого типа, 5 второго и 4 третьего — за 3 ч. Объем работы увеличили в 3,5 раза, но взяли 21 станок первого типа, 42 второго и 24 третьего. Спрашивается, за какое время они выполнят этот объем работы?

Иногда искомая комбинация неизвестных представляется в виде функции от другой комбинации, числовое значение которой в условии задачи не дано, но сравнительно легко подлежит определению.

Пример 6.2. С двух участков поля собрано 330 т пшеницы. Если бы с каждого гектара первого участка поля было собрано столько пшеницы, сколько ее собирали с каждого гектара второго участка, то с обоих участков было бы собрано 405 т, а если бы с каждого гектара второго участка было собрано столько пшеницы, сколько было собрано с каждого гектара первого участка, то было бы собрано с обоих участков 270 т. Сколько зерна было собрано с каждого участка в отдельности?

Решение. Обозначая размеры участков m и n, а количество зерна, собираемого с одного гектара каждого участка, x и y соответственно, можно составить, следуя условиям задачи, систему трех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{aligned} mx + ny &= 330,\\ my + ny &= 405,\\ mx + nx &= 270. \end{aligned} \qquad (*)$$

Определению подлежат величины mx и ny. Если рассмотреть в качестве неизвестных mx, my, nx, ny, то числа́ уравнений все равно не хватает для их определения.

Однако из двух последних уравнений определяется следующая комбинация: $\frac{x}{y}$. Действительно, разделив третье уравнение на второе, имеем $\frac{x}{y} = \frac{270}{405} = \frac{2}{3}$, т. е. $x = \frac{2}{3}y$. Подставив выраженное таким образом x в первое уравнение, получаем для определения неизвестных my, ny систему

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}my + ny &= 330,\\ my + ny &= 405, \end{aligned}$$

откуда $\frac{1}{3}my = 75$, или $my = 225$. Следовательно, $ny = 180$, а $mx = 150$.

Ответ. С участков было собрано 180 т и 150 т соответственно.

6.5. На складе имеется некоторое число бочек двух образцов общей емкостью 7000 л. Если бы все бочки были первого образца, то емкость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если бы все бочки были второго образца, то емкость уменьшилась бы на 4000 л. Вычислить емкость всех бочек каждого образца в отдельности.

6.6. В двух кусках сплавов золота с серебром содержится 2 кг золота. Если бы в первом куске концентрация золота совпадала с концентрацией во втором, то в обоих кусках было бы 2,5 кг золота. Если бы концентрация золота во втором куске совпадала с концентрацией золота в первом, то в обоих кусках было бы 1,5 кг золота. Определить, сколько золота было в каждом куске.

ГЛАВА 12

ПЛАНИМЕТРИЯ

§ 1. Треугольники

Признаки равенства треугольников. Два треугольника равны, если выполняется одно из следующих условий:

1) две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника;

2) два угла и прилежащая к ним сторона одного треугольника равны двум углам и прилежащей к ним стороне другого треугольника;

3) три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого треугольника.

Каждое из условий 1)—3) задает треугольник, т. е. по любому из условий 1)—3) с помощью теорем синусов и косинусов можно вычислить все остальные параметры треугольника.

Формулы вычисления площади треугольника:

$$S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c;$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \textit{формула Герона};$$

$$S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma;$$

$$S=\frac{abc}{4R};$$

$$S=pr.$$

Стороны и углы треугольника связаны формулами:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R \quad \textit{теорема синусов};$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta \quad \textit{теорема косинусов};$$

$$c^2=b^2+a^2-2ab\cos\gamma$$

где a, b, c — стороны треугольника; h_a, h_b, h_c — высоты треугольника, опущенные на стороны a, b, c соответственно; α, β, γ — внутренние углы треугольника, лежащие против сторон a, b, c, соответственно, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$ — полупериметр; R — радиус окружности, описанной около треугольника; r — радиус окружности, вписанной в треугольник.

Линии в треугольнике. *Медианой* треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Основные свойства медиан.

1. Медиана треугольника есть геометрическое место точек, являющихся серединами отрезков прямых, заключенный внутри треугольника и параллельных той его стороне, к которой проведена медиана.

2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

3. Медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника.

4. Пусть AM, BN, CL — медианы треугольника ABC (рис. 12.1), O — точка пересечения медиан. Площади треугольников ABO, BCO и ACO равны между собой и равны одной трети площади треугольника ABC.

Высотой треугольника называется отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины треугольника на противоположную сторону или ее продолжение.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы внутреннего угла треугольника, заключенный между вершиной треугольника и точкой пересечения биссектрисы внутреннего угла с противоположной стороной.

Основные свойства биссектрисы.

1. Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника и являющейся центром окружности, вписанной в треугольник.

2. Биссектриса треугольника есть геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла.

3. Биссектриса угла треугольника делит сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим к ней сторонам.

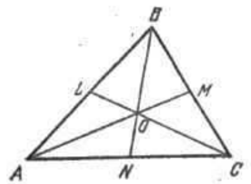


Рис. 12.1

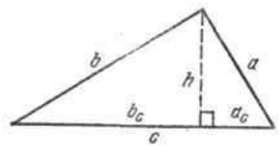


Рис. 12.2

Некоторые свойства медиан, биссектрис и высот в треугольниках специального вида.

1. Высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, является также биссектрисой и медианой.

2. В равностороннем треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, совпадают; центр окружности, вписанной в равносторонний треугольник, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника, и эта точка называется *центром треугольника*.

3. В прямоугольном треугольнике катеты a, b и гипотенуза c связаны равенством

$$a^2+b^2=c^2 \quad \textit{теорема Пифагора}.$$

4. Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу (рис. 12.2):

$$b_c:b=b:c, \quad a_c:a=a:c.$$

5. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу:

$$b_c:h=h:a_c.$$

6. Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, лежит на середине гипотенузы; радиус описанной окружности равен половине гипотенузы (а также равен медиане, проведенной из вершины прямого угла).

При решении некоторых задач достаточно использовать лишь приведенные выше основные метрические соотношения между отдельными элементами треугольника.

Пример 1.1. В треугольнике ABC приведены медианы AD и CE. Известно, что $AD=5$, $\widehat{DAC}=\pi/8$, $\widehat{ACE}=\pi/4$. Определить площадь треугольника ABC.

Решение. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 12.3). Для решения этой задачи используем следующие свойства медиан:

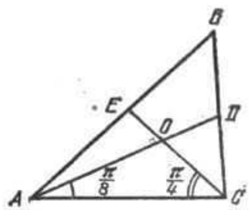


Рис. 12.3

1) медианы точкой их пересечения делятся в отношении $2:1$ (считая от вершины);

2) площадь треугольника, сторонами которого являются сторона данного треугольника и отрезки медиан (т. е. $\triangle AOC$), равна 1/3 площади данного треугольника (т. е. $\triangle ABC$).

Таким образом, для того чтобы найти площадь треугольника ABC, достаточно найти площадь треугольника AOC. По условию задачи в треугольнике AOC известны два угла, а в силу свойства 1) — и длина стороны AO, равная 10/3. По теореме синусов для треугольника AOC имеем

$$\frac{CO}{\sin\widehat{DAC}}=\frac{AO}{\sin\widehat{ACE}}\Rightarrow\frac{CO}{\sin(\pi/8)}=\frac{10/3}{\sin(\pi/4)}\Rightarrow CO=\frac{10}{3}\cdot\frac{\sin(\pi/8)}{\sin(\pi/4)}.$$

Так как сумма углов треугольника равна π, то $\widehat{AOC}=5\pi/8$. Используя формулу вычисления площади треугольника $S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, получаем

$$S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot CO\cdot\sin\widehat{AOC}=\frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{10}{3}\,\frac{\sin(\pi/8)}{\sin(\pi/4)}\sin\frac{5\pi}{8}=\frac{50}{9}\,\frac{\sin(\pi/8)}{\sin(\pi/4)}\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=$$
$$=\frac{50}{9}\,\frac{\sin(\pi/8)\cos(\pi/8)}{\sin(\pi/4)}=\frac{25}{9}\,\frac{2\sin(\pi/8)\cos(\pi/8)}{\sin(\pi/4)}=\frac{25}{9}.$$

Согласно свойству 2) медиан

$$S_{\triangle ABC}=3S_{\triangle AOC}=\frac{25}{3}.$$

Ответ. 25/3.

1.1. В треугольнике основание равно 12 см, один из углов при основании равен 120°, сторона, лежащая против этого угла, равна 28 см. Определить третью сторону.

1.2. Найти биссектрису угла BAC треугольника ABC, если $AB=c$, $AC=b$, $\widehat{BAC}=\alpha$.

1.3. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) высота $AE=12$, основание $AC=15$. Найти площадь треугольника.

1.4. В остроугольном треугольнике ABC дано: $AB=c$; проведенная из вершины B медиана $BD=m$. Угол BDA острый и равен β. Вычислить площадь треугольника ABC.

1.5. Есть ли в треугольнике со сторонами 4, 5, 6 см угол, меньший 22,5°?

1.6. В прямоугольном треугольнике ABC имеем: $\hat{A}=\alpha$, $AB=a$. Из вершины прямого угла B опущена высота BE. В треугольнике BEA проведена медиана ED. Найти площадь треугольника AED.

1.7. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, $\hat{A}=\alpha$, $AB=c$. На продолжении гипотенузы AC (в сторону точки C) взята точка D так, что $AD=r$. Найти площадь треугольника BCD.

1.8. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B опущена высота BE. Из точки C восставлен перпендикуляр к AC, на котором отложен отрезок CD, равный r. Найти площадь треугольника CED, если $\hat{A}=\alpha$, $AB=c$.

1.9. Угол α при основании равнобедренного треугольника больше, чем 45°, а площадь равна S. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат основания высот данного треугольника.

1.10. Основание треугольника равно 20 см, медианы боковых сторон равны 24 и 18 см. Найти площадь треугольника.

1.11. Заданы два равносторонних треугольника со сторонами $\frac{2}{\sqrt[4]{3}}$, причем второй получается из первого поворотом на угол 30° вокруг его центра. Вычислить площадь общей части этих треугольников.

1.12. В треугольнике ABC $\hat{A}=\hat{B}=\alpha$, $AB=a$, AH — высота, BE — биссектриса (точка H лежит на стороне BC, точка E — на AC). Найти площадь треугольника CHE.

1.13. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD угла BAC и CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC, а точка F — на стороне AB). Найти отношение площадей треугольников ABC и AFD, если известно, что $AB=21$, $AC=28$ и $CB=20$.

1.14. Основание равнобедренного треугольника равно b, угол при основании равен α. Прямая пересекает продолжение основания в точке M под углом β и делит пополам ближайшую к M

боковую сторону треугольника. Найти площадь четырехугольника, отсекаемого прямой от данного треугольника.

1.15. В треугольнике ABC из вершины B проведены высота треугольника BD и биссектриса треугольника BE. Известно, что длина стороны $AC = 1$, а величины углов BEC, ABD, ABE, BAC образуют арифметическую прогрессию. Найти длину стороны BC.

1.16. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 2α. Прямая, пересекающая высоту на расстоянии c от вершины, образует с продолжением основания угол β. Найти площадь треугольника, отсекаемого этой прямой от данного треугольника.

1.17*. Найти площадь треугольника, если длины двух его сторон соответственно равны 1 и $\sqrt{15}$ см, а длина медианы третьей стороны — 2 см.

1.18. В треугольнике ABC биссектриса угла при вершине A пересекает сторону BC в точке M, а биссектриса угла при вершине B пересекает сторону AC в точке P, причем $AM = BP$. Биссектрисы пересекаются в точке O. Известно, что треугольник BOM подобен треугольнику AOP, $BO = (1+\sqrt{3})\,OP$, $BC = 1$. Найти площадь треугольника ABC.

В условиях задач 1.19—1.21 отсутствуют данные, имеющие размерность длины. В этих задачах удобно ввести вспомогательную величину a, имеющую размерность длины (например, сторону треугольника), и решить задачу с доопределенным условием. В выражениях для искомых величин a сократится и полученное выражение будет зависеть только от величин, данных в условии задачи.

1.19. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. В каком отношении разделяет площадь этого треугольника прямая, делящая его основание в отношении $2:1$ и составляющая острый угол β с меньшей частью основания?

1.20. В треугольнике ABC дано: $\widehat{ACB} = 60°$, $\widehat{ABC} = 45°$. На продолжении AC за верншну C берется точка K, так что $AC = CK$. На продолжении BC за вершину C берется точка M так, что треугольник с вершинами C, M и K подобен исходному. Найти $BC : MK$, если известно, что $CM : MK < 1$.

1.21. В треугольнике ABC угол B равен $\pi/4$, угол C равен $\pi/3$. На медианах BM и CN как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках P и Q. Хорда PQ пересекает среднюю линию MN в точке F. Найти отношение длины отрезка NF к длине отрезка FM.

Некоторые задачи решаются методом введения вспомогательного неизвестного, для которого по условию задачи необходимо составить и решить уравнение. В качестве вспомогательного неизвестного можно брать линейный размер или угол. Это вспомогательное неизвестное следует выбирать таким образом, чтобы величины, данные в условии задачи, и вспомогательное неизвестное однозначно определяли треугольник.

Для составления уравнения обычно следует один и тот же элемент выразить двумя способами. Так, для получения уравнения в треугольнике надо использовать четыре элемента (линейных или угловых).

Пример 1.2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Определить величину угла ADB.

Решение. Обозначим неизвестный угол ADB буквой φ. Составим уравнение, где в качестве неизвестного будет фигурировать некоторая тригонометрическая функция φ. Для этого выразим какой-нибудь элемент треугольника ABC двумя способами. Удобнее всего для этой цели использовать медиану AD треугольника ABC. Для составления уравнения нам понадобятся следующие элементы: длина боковой стороны AB и угол при основании треугольника ABC. Обозначим неизвестную длину стороны AB буквой a. Неизвестный угол BCA удается выразить через уже введенный угол φ. Действительно, так как CE и AD перпендикулярны, то угол DOC прямой (O — точка пересечения AD и CE). Угол φ — внешний угол $\triangle DOC$. Следовательно, справедливо равенство

$$\angle DCO + \frac{\pi}{2} = \varphi,$$

т. е. $\angle DCO = \varphi - \frac{\pi}{2}$, а так как CE — биссектриса, то угол BCA равен $2\angle DCO$, т. е. $2\varphi - \pi$. Аналогичные соображения, примененные к $\triangle ADC$, приводят к равенству $\angle DAC = \pi - \varphi$. Из теоремы косинусов, примененной к $\triangle ADB$, имеем

$$a^2 = \frac{1}{4}a^2 + AD^2 - a\cdot AD\cdot\cos\varphi,$$

т. е.

$$AD = \frac{a\cos\varphi \pm \sqrt{a^2\cos^2\varphi + 3a^2}}{2}. \qquad (*)$$

Из теоремы синусов для $\triangle ADC$ имеем

$$\frac{AD}{\sin(2\varphi - \pi)} = \frac{a}{2\sin(\pi - \varphi)}$$

или, используя формулы приведения,

$$-\frac{AD}{\sin 2\varphi}=\frac{a}{2\sin\varphi},$$

откуда,

$$AD=-a\cos\varphi. \qquad (**)$$

Приравнивая левые части уравнений (*) и (**), получаем требуемое уравнение:

$$-2a\cos\varphi=a\cos\varphi\pm\sqrt{a^2\cos^2\varphi+3a^2}. \qquad (***)$$

Приводя подобные члены и возводя в квадрат обе части уравнения, имеем для $\cos\varphi$ два возможных значения

$$\cos\varphi=\pm\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Однако положительное значение $\cos\varphi$ не удовлетворяет условию задачи, так как в прямоугольном треугольнике DOC угол $\angle ODC$, дополняющий φ до π, должен быть острым.

Таким образом,

$$\varphi=\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right).$$

Ответ. $\varphi=\arccos\left(-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)$.

В задачах 1.22—1.27 удобно в качестве вспомогательного неизвестного брать линейный размер, в задачах 1.28—1.32 — угол, а в задачах 1.33—1.35 — вводить две вспомогательные неизвестные величины.

1.22. В треугольнике ABC высоты — $CD=7$ и $AE=6$. Точка E делит сторону BC так, что $BE:EC=3:4$. Найти длину стороны AB.

1.23. Найти площадь равнобедренного треугольника, если высота, опущенная на основание, равна 10, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 12.

1.24. В равнобедренном прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны l. Найти площадь треугольника.

1.25. В правильном треугольнике ABC со стороной a точки E и D являются серединами сторон BC и AC соответственно. Точка F лежит на отрезке DC, отрезки BF и DE пересекаются в точке M. Найти длину отрезка MF, если известно, что площадь четырехугольника $ABMD$ составляет 5/8 площади треугольника ABC.

1.26. В треугольнике с углом 120° длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найти длины всех сторон треугольника, если наибольшая из них равна 7 см.

1.27. Длины двух сторон равнобедренного треугольника и длина высоты, опущенной на основание, образуют геометрическую прогрессию. Найти тангенс угла при основании треугольника, если известно, что он больше двух.

1.28. В прямоугольном треугольнике отношение произведения длин биссектрис внутренних острых углов к квадрату длины гипотенузы равно 1/2. Найти острые углы треугольника.

1.29. В треугольнике ABC длина стороны AC равна b, длина стороны BA равна c, а биссектриса внутреннего угла A пересекается со стороной BC в такой точке D, что $DA=DB$. Найти длину стороны BC.

1.30. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную 120°. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD=2$, $BD=1$, $DC=\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника ABC.

1.31. Дан треугольник ABC. Из вершины A проведена медиана AM, а из вершины B — медиана BP. Известно, что угол APB равен углу BMA, косинус угла ACB равен 0,8 и $BP=1$ см. Найти площадь треугольника ABC.

1.32. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C и $\widehat{BCD}<\pi/3$. Точка K — середина стороны AC, точка L — середина отрезка CE, точка M — середина отрезка BD. Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найти длину отрезка BD.

1.33. В прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с углом $\widehat{B}=90°$ вписан прямоугольный треугольник MNC так, что: $\widehat{MNC}=90°$, точка N лежит на гипотенузе AC, а точка M — на стороне AB. В каком отношении точка N должна делить гипотенузу AC, чтобы площадь треугольника MNC составляла 3/8 от площади треугольника ABC?

1.34. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B вписан прямоугольник $MNKB$ так, что две его стороны MB и KB лежат на катетах, а вершина N — на гипотенузе AC. В каком отношении точка N должна делить гипотенузу, чтобы площадь прямоугольника составляла 18 % площади треугольника?

1.35. Углы при вершинах A и C треугольника ABC соответственно равны $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{\pi}{6}$. Найти угол между высотой BD и медианой BE этого треугольника.

При решении приведенных ниже задач используются различные формулы для вычисления площади треугольника. При этом иногда полезным оказывается следующее свойство площадей: если отрезки AB и CD лежат на одной прямой, не проходящей через точку M, и S_1 и S_2 — площади треугольников MAB и MCD соответственно, то

$$\frac{S_1}{S_2}=\frac{AB}{CD}.$$

Пример 1.3. На стороне AB треугольника ABC между точками A и B взята точка D так, что $AD:AB=\alpha$ $(\alpha<1)$; на стороне BC между точками B и C взята точка E так, что $BE:BC=\beta$ $(\beta<1)$. Через точку E проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей треугольников BDE и BEF.

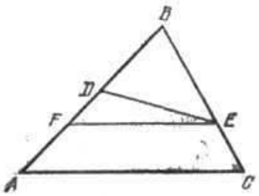


Рис. 12.4

Решение. Пусть площадь треугольника ABC равна S. Треугольник BEF подобен треугольнику ABC, так как $FE \parallel AC$ (рис. 12.4). Так как площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон, то

$$\frac{S_{\triangle BEF}}{S}=\frac{BE^2}{BC^2}=\beta^2 \Rightarrow S_{\triangle BEF}=S\beta^2.$$

Площади треугольников BDE и ABC выражаются через стороны и углы этих треугольников по формулам

$$S_{\triangle BDE}=\frac{1}{2}BD\cdot BE\cdot\sin\widehat{B},$$
$$S=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\widehat{B},$$

из которых следует

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S}=\frac{BD}{AB}\cdot\frac{BE}{BC}=\frac{BD}{AB}\beta.$$

По условию задачи $AD=AB\alpha$, и так как

$$BD=AB-AD=AB-AB\alpha=AB(1-\alpha),$$

то

$$BD/AB=1-\alpha.$$

Таким образом,

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S}=(1-\alpha)\beta \Rightarrow S_{\triangle BDE}=S(1-\alpha)\beta.$$

В задаче требуется найти отношение $S_{\triangle BDE}:S_{\triangle BEF}$. Подставляя в это отношение $S_{\triangle BEF}=S\beta^2$ и $S_{\triangle BDE}=S(1-\alpha)\beta$, получаем

$$\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BEF}}=\frac{1-\alpha}{\beta}.$$

Ответ. $\dfrac{1-\alpha}{\beta}$.

1.36. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD:BC=\alpha$ $(\alpha<1/2)$. На стороне BC между точками B и D взята точка E, и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найти отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC, если известно, что $CD=DE$.

1.37. Точки E, F, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, AC треугольника ABC. Отрезок AE составляет 1/3 стороны AB, отрезок BF составляет 1/6 стороны BC, отрезок AM составляет 2/5 стороны AC. Найти отношение площади треугольника EFM к площади треугольника ABC.

1.38. На продолжениях медиан AK, BL и CM треугольника ABC взяты точки P, Q и R так, что $KP=\frac{1}{2}AK$, $LQ=\frac{1}{2}BL$ и $MR=\frac{1}{2}CM$. Найти площадь треугольника PQR, если площадь треугольника ABC равна единице.

1.39. Дан треугольник ABC, площадь которого равна единице. На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R так, что

$$\frac{AP}{PK}=1,\quad \frac{BQ}{QL}=\frac{1}{2},\quad \frac{CR}{RN}=\frac{5}{4}.$$

Найти площадь треугольника PQR.

1.40. Треугольник ABC не имеет тупых углов. На стороне AC этого треугольника взята точка D так, что $AD=\frac{3}{4}AC$. Найти угол BAC, если известно, что прямая BD разбивает треугольник ABC на два подобных треугольника.

1.41. Точки P и Q делят стороны BC и CA треугольника ABC в отношении

$$\frac{BP}{PC}=\alpha,\quad \frac{CQ}{QA}=\beta.$$

Пусть O — точка пересечения прямых AP и BQ. Найти отношение площади четырехугольника $OPCQ$ к площади данного треугольника.

1.42. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки BM и AN пересекаются в точке O. Найти площадь треугольника CMN, если площади треугольников AOM, AOB и BON равны соответственно S_1, S_2, S_3.

1.43. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:CD=1:2$. В каком отношении медиана CE делит отрезок AD?

1.44. В треугольнике ABC через основание D высоты BD параллельно стороне AB проведена прямая, пересекающая BC в точке K. Найти $BK:KC$, если $S_{\triangle DBK}:S_{\triangle ABC}=3:16$.

1.45. Все стороны треугольника меньше 1 см. Доказать, что площадь треугольника меньше $\sqrt{3}/4$ см^2.

1.46. На стороне AC треугольника ABC взята точка N, а на стороне BC — точка M так, что $CN:NA=5$. Площади многоугольников NMC и $ANBM$ относятся как $5:6$. Найти $CM:MB$.

1.47. В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AE и высота AD. Площадь треугольника AEM равна 1/4 площади треугольника ABC, а площадь треугольника ADM равна 7/50 площади треугольника ABC. Найти углы треугольника ABC.

§ 2. Четырехугольники

Параллелограмм. Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, называется *параллелограммом*. Параллелограмм обладает следующими основными свойствами:

1) противоположные стороны параллелограмма равны;
2) противоположные углы параллелограмма равны;
3) диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам;
4) сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.

Площадь параллелограмма вычисляется по формулам

$$S=ah_a,\quad S=ab\sin\alpha,$$

где a, b — стороны параллелограмма, h_a — высота параллелограмма, опущенная на сторону a, α — угол параллелограмма.

Ромб. Параллелограмм, все стороны которого равны, называется *ромбом*. Ромб, как параллелограмм специального вида, имеет все свойства параллелограмма. Кроме того, ромб обладает следующими специальными свойствами:

1) диагонали ромба взаимно перпендикулярны;
2) диагонали ромба являются биссектрисами его внутренних углов.

Площадь ромба вычисляется по тем же формулам, что и площадь параллелограмма. Кроме того, площадь ромба может быть вычислена по формуле

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2,$$

где d_1 и d_2 — диагонали ромба.

Прямоугольник и квадрат. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называется *прямоугольником*. Площадь прямоугольника вычисляется по формуле

$$S=ab,$$

где a и b — смежные стороны прямоугольника.

Прямоугольник, у которого все стороны равны, называется *квадратом*. Квадрат обладает всеми свойствами параллелограмма, ромба и прямоугольника. Площадь квадрата вычисляется по формуле

$$S=a^2,$$

где a — сторона квадрата.

Трапеция. Четырехугольник, две стороны которого параллельны, а две другие непараллельны, называется *трапецией*. Площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h вычисляется по формуле

$$S=\frac{a+b}{2}h.$$

Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией* трапеции. Средняя линия трапеции обладает следующими свойствами:

1) средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме;
2) средняя линия делит высоту трапеции на два равных отрезка.

Пример 2.1. Дана трапеция $PQRN$ с основаниями PN и QR, причем $PN=8$, $QR=4$, $PQ=\sqrt{28}$, $\widehat{RNP}=60^\circ$. Через точку R проходит прямая, делящая трапецию на две равновеликие фигуры. Найти длину отрезка этой прямой, находящегося внутри трапеции.

Решение. Для решения задачи нам потребуется найти величину площади трапеции $PQRN$. Так как длины сторон PN и QR известны, то для определения этой величины необходимо найти длину высоты трапеции h. Сделаем следующее дополнительное построение: проведем через точку R прямую, параллельную боковой стороне трапеции QP, и рассмотрим треугольник RP_1N. Так как $PP_1=QR=4$, то $P_1N=4$, $RP_1=PQ=\sqrt{28}$. Обозначим длину стороны RN через x и, используя теорему косинусов для треугольника RP_1N, составим следующее уравнение:

$$28=16+x^2-4x. \qquad (*)$$

Единственным положительным корнем уравнения $(*)$ будет $x=6$. Высота h находится из треугольника RP_1N по формуле

$$h=6\cdot\sin 60^\circ=6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}.$$

Площадь трапеции $PQRN$ вычисляется тогда следующим образом:

$$S_{PQRN}=\frac{1}{2}(4+8)\cdot 3\sqrt{3}=18\sqrt{3}.$$

Предположим теперь, что прямая RM пересекает основание трапеции. (Справедливость этого предположения будет установлена ниже.) Тогда площадь треугольника RNM равна по условию $\frac{1}{2}S_{PQRN}$, т. е. $9\sqrt{3}$. Высота треугольника RNM совпадает с высотой трапеции $PQRN$, и, следовательно, длина основания MN вычисляется по формуле

$$MN = \frac{2S_{RNM}}{h} = \frac{9\sqrt{3}\cdot 2}{3\sqrt{3}} = 6.$$

Так как $PN = 8$, $MN = 6$, то справедливость утверждения о том, что RN пересекает основание трапеции, установлена. Если бы MN оказалось больше PN, то это означало бы, что прямая, проходящая через точку R, пересекает PQ — боковую сторону трапеции. Вычислим теперь искомую длину отрезка MR, а так как $\triangle MRN$ равнобедренный, $MN = RN$ и угол $RNM = 60°$, то $\triangle MRN$ равносторонний, т. е. $RM = 6$.

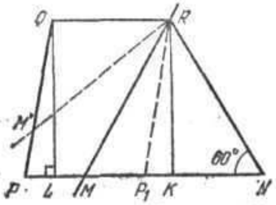


Рис. 12.5

Заметим, что если бы прямая пересекала боковую сторону трапеции PQ в точке M' (рис. 12.5), то длину отрезка $M'R$ можно было бы найти из треугольника $M'QR$. Для вычисления этого отрезка необходимо было бы предварительно вычислить угол трапеции PQR (который является также и углом рассматриваемого треугольника $M'QR$), а затем по известному углу PQR, площади треугольника $S_{\triangle M'QR} = \frac{1}{2} S_{PQRN}$ и основанию QR последовательно найти длину $M'Q$ и по теореме косинусов — длину $M'R$.

Ответ. Длина отрезка равна 6.

2.1. Найти диагональ и площадь равнобочной трапеции, если основания равны 3 и 5 см, а боковая сторона равна 7 см.

2.2. Найти площадь равнобочной трапеции, у которой основания равны 12 и 20 см, а диагонали взаимно перпендикулярны.

2.3. В трапеции $ABCD$ длина основания AD равна 2 м, а длина основания BC равна 1 м. Длины боковых сторон AB и CD равны 1 м. Найти длину диагонали трапеции.

2.4. Один из углов трапеции равен 30°, а боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найти меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия равна 10 см, а меньшее основание — 8 см.

2.5. В трапеции $ABCD$ длина меньшего основания равна 3 м, длины боковых сторон AB и CD равны по 3 м. Диагонали трапеции образуют между собой угол в 60°. Найти длину основания AD.

2.6. В трапеции большее основание равно 5 см, одна из боковых сторон равна 3 см. Известно, что одна из диагоналей перпендикулярна заданной боковой стороне, а другая делит угол между заданными боковой стороной и основанием пополам. Найти площадь трапеции.

2.7. В равнобочной трапеции $ABCD$ заданы $AC = a$, $\widehat{CAD} = \alpha$. Найти площадь трапеции.

2.8. В квадрат вписан другой квадрат, вершины которого лежат на сторонах первого, а углы между сторонами квадратов равны 60°. Какую часть площади данного квадрата составляет площадь вписанного квадрата?

2.9. Дана равнобочная трапеция $ABCD$. Известно, что $AD = 10$, $BC = 2$, $AB = CD = 5$. Биссектриса угла BAD пересекает продолжение основания BC в точке K. Найти длину биссектрисы угла B в треугольнике ABK.

2.10. В равнобедренной трапеции основания равны a и b, а угол диагонали с основанием равен α. Найти длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

2.11. В трапеции $ABCD$, где AD — основание трапеции, проведены диагонали AC и BD, которые пересекаются в точке O. Известно, что длина диагонали AC равна l, а величины углов AOB, ACB, ACD, BDC, ADB образуют арифметическую прогрессию (в том порядке, в котором они написаны). Найти длину основания AD.

2.12. В равнобочной трапеции $ABCD$ дано: $AB = CD = 3$, $AD = 7$, $\widehat{BAD} = 60°$. На диагонали BD расположена точка M так, что $BM : MD = 3 : 5$. Какую из сторон трапеции — BC или CD — пересечет продолжение отрезка AM?

2.13. Вычислить площадь общей части двух ромбов, из которых у первого диагонали равны 2 и 3, а второй получен поворотом первого на 90° около его центра.

2.14. В квадрате $ABCD$ площадью 1 сторона AD продолжена за точку D, и на продолжении взята точка O на расстоянии 3 от точки D. Из точки O проведены два луча. Первый луч пересекает отрезок CD в точке M и отрезок AB в точке N, причем длина отрезка ON равна a. Второй луч пересекает отрезок CD в точке L и отрезок BC в точке K, причем $\widehat{BKL} = \alpha$. Найти площадь многоугольника $BKLMN$.

2.15. В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найти площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

2.16. Длина боковой стороны AB в параллелограмме $ABCD$ равна a; длина перпендикуляра, опущенного из точки пересечения диагоналей на основание, равна h; угол между большей диагональю BD и основанием AD равен α. Найти площадь параллелограмма.

2.17. В трапеции $ABCD$ даны основания: $AD = 16$ и $BC = 9$. На продолжении BC выбрана такая точка M, что $CM = 3{,}2$. В каком отношении прямая AM делит площадь трапеции $ABCD$?

Задачи 2.18—2.29 решаются методом введения вспомогательного неизвестного (или нескольких неизвестных), для которого по условию задачи составляется уравнение (соответственно система уравнений). В качестве неизвестных можно брать угол или неизвестный линейный размер.

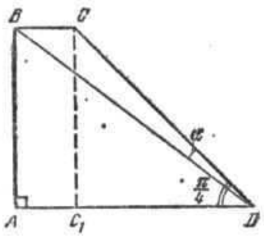


Рис. 12.6

Пример 2.2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и B прямые, величина угла при вершине D равна $\pi/4$, $BC = 1$, длина диагонали BD равна 5. Найти площадь этого четырехугольника.

Решение. Обозначим угол BDC через α (рис. 12.6). Так как сумма внутренних углов любого четырехугольника равна 2π, а три угла четырехугольника $ABCD$ известны по условию задачи, то $C = 3\pi/4$. Рассмотрим треугольник BDC. Введем обозначение $CD = x$, тогда, используя теорему косинусов для треугольника BDC, получим уравнение

$$25 = 1 + x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x \cdot \cos 135^\circ.$$

Это уравнение преобразуется к виду

$$x^2 + \sqrt{2}\, x - 24 = 0. \qquad (*)$$

Единственным положительным корнем уравнения (*) является $x = 3\sqrt{2}$.

Сделаем теперь следующее дополнительное построение. Опустим из вершины C перпендикуляр CC_1 на AD. Из прямоугольного треугольника CC_1D находим, что $CC_1 = C_1D$. Так как длина гипотенузы треугольника CC_1D равна $3\sqrt{2}$, то из теоремы Пифагора следует, что $CC_1 = C_1D = 3$. Из прямоугольного треугольника BAD и очевидного равенства $BA = CC_1$ следует, что

$$AD^2 = BD^2 - BA^2$$

и

$$AD = 4.$$

Так как по условию задачи углы A и B прямые, то $AD \parallel BC$ и четырехугольник $ABCD$ — трапеция (AD и BC — основания, AB — высота), откуда

$$S_{\text{тр}} = \frac{BC + AD}{2} AB = \frac{15}{2}.$$

Ответ. 15/2.

2.18. Даны квадрат с вершинами A, B, C, D и точка O, лежащая вне квадрата. Известно, что $OA = OB = 5$ и $DO = \sqrt{13}$. Найти площадь квадрата.

2.19. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$. Найти стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5 + \sqrt{3}$, $\widehat{BAD} = 90^\circ$ и $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

2.20. В трапеции $ABCD$ углы A и D при основании AD соответственно равны 60° и 90°. Точка N лежит на основании BC, причем $BN : NC = 3 : 2$. Точка M лежит на основании AD, прямая MN параллельна боковой стороне AB и делит площадь трапеции пополам. Найти отношение $AB : BC$.

2.21. Длина средней линии трапеции равна 5 см, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 3 см. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найти площадь трапеции.

2.22. Сумма острых углов трапеции равна 90°, высота равна 2 см, а основания —12 и 16 см. Найти боковые стороны трапеции.

2.23. В ромбе $ABCD$ со стороной a угол при вершине A равен $\pi/3$. Точки E и F являются серединами сторон AB и CD соответственно. Точка K лежит на стороне BC, отрезки AK и EF пересекаются в точке M. Найти длину отрезка MK, если известно, что площадь четырехугольника $MKCF$ составляет 3/8 площади ромба $ABCD$.

2.24. В прямоугольной трапеции $ABCD$ углы A и D прямые, сторона AB параллельна стороне CD, $AB = 1$, $CD = 4$, $AD = 5$. На стороне AD взята точка M так, что угол CMD вдвое больше угла BMA. В каком отношении точка M делит сторону AD?

2.25. Длина диагонали BD трапеции $ABCD$ равна m, а длина боковой стороны AD равна n. Найти длину основания CD, если известно, что длины основания, диагонали и боковой стороны трапеции, выходящих из вершины C, равны между собой.

2.26. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и DB взаимно перпендикулярны, $\widehat{BAC} = \widehat{CDB}$. Продолжения боковых сторон AB и DC пересекаются в точке K, образуя угол AKD, равный $30°$. Найти площадь треугольника AKD, если площадь трапеции равна S.

2.27. В равнобочной трапеции с основаниями a и b $(a > b)$ диагонали являются биссектрисами углов при большем основании. Найти площадь трапеции.

2.28. В трапеции $ABCD$ диагональ AC перпендикулярна боковой стороне CD, а диагональ DB перпендикулярна боковой стороне AB. На продолжениях боковых сторон AB и CD за меньшее основание BC отложены отрезки BM и CN так, что получается новая трапеция $BMNC$, подобная трапеции $ABCD$. Найти площадь трапеции $ABCD$, если площадь трапеции $AMND$ равна S и сумма углов CAD и BDA равна $60°$.

2.29. Дан параллелограмм $ABCD$ со сторонами

$$AB = 2 \text{ и } BC = 3.$$

Найти площадь этого параллелограмма, если известно, что диагональ AC перпендикулярна отрезку BE, соединяющему вершину B с серединой E стороны AD.

При решении задач 2.30—2.36 используются специальные свойства многоугольников и треугольников, вытекающие из условий задач.

Пример 2.3. В трапеции с основаниями a и b через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основанию. Найти длину отрезка этой прямой, заключенной между боковыми сторонами трапеции.

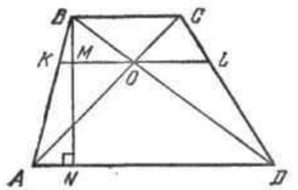


Рис. 12.7

Решение. Пусть в трапеции $ABCD$ основание BC равно a, а основание AD равно b (рис. 12.7), AC и BD — диагонали, O — точка их пересечения, BN — высота трапеции, M — точка пересечения высоты BN и искомого отрезка KL. По условию задачи $KL \parallel BC$, и, следовательно, треугольник ABD подобен треугольнику KBO, а треугольник ABC подобен треугольнику AKO. Так как в подобных треугольниках высоты пропорциональны сторонам, на которые они опущены, то

$$\frac{KO}{AD} = \frac{BM}{BN}, \qquad \frac{KO}{BC} = \frac{MN}{BN}.$$

Как следствие этих равенств и условия задачи получаем

$$\frac{KO}{AD} + \frac{KO}{BC} = \frac{BM}{BN} + \frac{MN}{BN} \Rightarrow KO\left(\frac{BC + AD}{AD\,BC}\right) = $$

$$= \frac{BM + MN}{BN} \Rightarrow KO\,\frac{a+b}{ab} = 1 \Rightarrow KO = \frac{ab}{a+b}.$$

Аналогично, из подобия*) двух пар треугольников $\triangle DOL \backsim \triangle DBC$, $\triangle OCL \backsim \triangle ACD$, находим $OL = \dfrac{ab}{a+b}$, и, следовательно, $KL = KO + OL = \dfrac{2ab}{a+b}$.

Ответ. $\dfrac{2ab}{a+b}$.

2.30. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найти площадь четырехугольника $OMCD$.

2.31. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна 1, взяты точки: K — на AB, L — на BC, M — на CD, N — на AD. При этом

$$\frac{AK}{KB} = 2, \quad \frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}, \quad \frac{CM}{MD} = 1, \quad \frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}.$$

Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.

2.32. A, B, C, D — последовательные вершины параллелограмма. Точки E, F, P, H лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD. Отрезок AE равен 1/3 стороны AB, отрезок BF — 1/3 стороны BC, а точки P и H делят пополам стороны, на которых они лежат. Найти отношение площади четырехугольника $EFPH$ к площади параллелограмма $ABCD$.

2.33. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD, равна 1. Прямые BC и AD перпендикулярны. Найти длину отрезка, соединяющего середины диагоналей AC и BD.

2.34. Длины диагоналей ромба и длина его стороны образуют геометрическую прогрессию. Найти синус угла между стороной ромба и его большей диагональю, если известно, что он больше 1/2.

2.35. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ точки E, F, G, H являются соответственно серединами сторон KL, LM, MN, NK. Площадь четырехугольника $EFGH$ равна Q, $\widehat{HEF} = \pi/6$, $\widehat{EFH} = \pi/2$. Найти длины диагоналей четырехугольника $KLMN$.

*) Знак $\backsim$ означает подобие.

§ 3. Окружность и круг

Окружностью называется множество всех точек плоскости, находящихся на данном положительном расстоянии от некоторой данной точки плоскости, называемой *центром окружности*. *Круг* *) состоит из окружности и внутренних точек.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорды обладают следующими свойствами:

1) диаметр, делящий хорду пополам, перпендикулярен этой хорде;

2) равные хорды окружности равноудалены от ее центра; равноудаленные от центра окружности хорды равны;

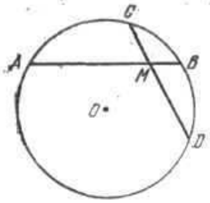


Рис. 12.8

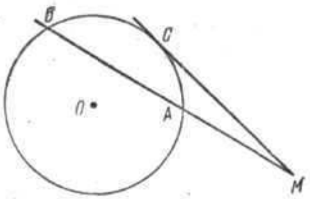


Рис. 12.9

3) если через точку M, лежащую внутри окружности, проведены две хорды AB и CD (рис. 12.8), то произведения отрезков хорд равны:

$$AM \cdot MB = CM \cdot MD.$$

Теорема о касательной и секущей. Если из точки M (рис. 12.9), лежащей вне окружности, проведены касательная MC и секущая MA, то произведение секущей на ее внешнюю часть равно квадрату касательной:

$$MC^2 = MA \cdot MB.$$

Длины и площади.

Длина окружности радиуса R: $L = 2\pi R$.

Площадь круга радиуса R: $S = \pi R^2$.

Длина дуги окружности радиуса R с центральным углом α (измеренным в радианах): $l = R\alpha$.

Площадь сектора окружности радиуса R с центральным углом α (измеренным в радианах): $s = \frac{1}{2} R^2\alpha$.

Измерения углов в окружностях.

Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.

Угол, образованный двумя пересекающимися хордами, измеряется полусуммой дуг, на которые он опирается.

Угол, вершина которого находится на окружности, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Угол между касательной и хордой измеряется половиной дуги, которую стягивает хорда.

Угол, образованный двумя пересекающимися секущими, измеряется полуразностью дуг, на которые он опирается.

Свойства линий в касающихся и пересекающихся окружностях.

1. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку касания.

2. Общая внутренняя касательная двух внешним образом касающихся окружностей перпендикулярна их линии центров.

3. Общая касательная двух внутренним образом касающихся окружностей перпендикулярна их линии центров.

4. Общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их линии центров и делится точкой их пересечения пополам.

---

*) Иногда (если не возникает путаницы) будет употребляться как синоним окружности.

Задачи 3.1—3.9 решаются непосредственными вычислениями, основанными на свойствах линий в окружностях.

Пример 3.1. Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$.

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, AB — общая хорда, K — точка пересечения линии центров O_1O_2 и общей хорды AB (рис. 12.10); угол AO_1B равен 60°, а угол AO_2B равен 90°. Рассмотрим треугольник AO_1B. Этот треугольник равнобедренный ($AO_1 = BO_1$ и $O_1K \perp AB$, т. е. O_1K — высота, медиана и биссектриса треугольника AO_1B. По условию задачи угол AO_1B равен 60°, и, следовательно,

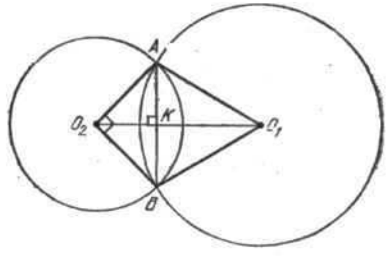


Рис. 12.10

угол AO_1K равен 30°. Аналогично для треугольника AO_2B получаем, что угол AO_2K равен 45°. Рассмотрим треугольник O_1AO_2. В этом треугольнике известны два угла (AO_1K и AO_2K), равные 30° и 45° соответственно, и отрезок O_1O_2, равный $\sqrt{3}+1$. Стороны треугольника O_1A и AO_2 являются искомыми радиусами.

Так как сумма углов треугольника равна 180°, то угол O_1AO_2 равен 105°, и по теореме синусов для треугольника O_1AO_2 имеем

$$\frac{O_1A}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^\circ}, \quad \frac{O_2A}{\sin 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^\circ}. \qquad (*)$$

Но $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ$. По формуле $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$, полагая $\alpha = 30^\circ$, можно вычислить $\cos 15^\circ$:

$$2\cos^2 15^\circ = 1 + \cos 30^\circ \Rightarrow 2\cos^2 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2};$$

из равенств (*) находим

$$O_1A = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{(\sqrt{3}+1)\cdot 2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2/2}} = 2,$$

$$O_2A = \frac{(\sqrt{3}+1)\cdot 2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2/2}} = \sqrt{2}.$$

Ответ. 2 и $\sqrt{2}$.

3.1. Три окружности расположены на плоскости так, что каждая из них касается двух других внешним образом. Две из них имеют радиус 3, а третья — радиус 1. Найти площадь треугольника ABC, где A, B и C — точки касания окружностей.

3.2. Даны две внешним образом касающиеся окружности радиусов R и r. Найти длину отрезка внешней касательной, заключенного между точками касания.

3.3. Две окружности, радиусы которых равны 4 и 8, пересекаются под прямым углом. Определить длину их общей касательной.

3.4. Центры четырех кругов расположены в вершинах квадрата со стороной a. Радиусы всех кругов также равны a. Вычислить площадь части плоскости, общей для всех кругов.

3.5. Вне прямого угла с вершиной C на продолжении его биссектрисы взята точка O так, что $OC=\sqrt{2}$. Построена окружность радиуса 2 с центром в точке O. Найти площадь фигуры, ограниченной сторонами угла и дугой окружности, заключенной между ними.

3.6. На прямой, проходящей через центр O окружности радиуса 12 см, взяты точки A и B так, что $OA=15$ см и $AB=5$ см. Из точек A и B проведены касательные к окружности, точки касания которых лежат по одну сторону от прямой OAB. Найти площадь треугольника ABC, если C — точка пересечения этих касательных.

3.7. Даны две непересекающиеся окружности радиусов R и $2R$. К ним проведены общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Расстояние между центрами окружностей равно $2R\sqrt{3}$. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных, заключенными между точками касания и бо́льшими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

3.8. Из точки A, лежащей на продолжении диаметра KL окружности в сторону точки L, проведена к этой окружности касательная AB (B — точка касания), образующая с диаметром KL угол α. Найти площадь фигуры, образованной сторонами угла и дугой LB, если радиус окружности равен R.

3.9. Две окружности радиусов 5 и 3 см касаются внутренним образом. Хорда большей окружности касается меньшей окружности и делится точкой касания в отношении $3:1$. Найти длину этой хорды.

Задачи 3.10—3.24 решаются методом введения вспомогательного неизвестного, для которого по условию задачи составляется уравнение.

Пример 3.2. Две окружности радиусов R и r касаются внешним образом. Определить радиус окружности, касающейся этих окружностей и их общей внешней касательной.

Решение. Рассмотрим сначала случай, когда искомая окружность заключена между данными окружностями и касательной. Тогда обозначим O_1, O_2 и O_3 соответственно центры окружностей радиусов R, r и искомой окружности; M_1M_2 — общая внешняя касательная данных окружностей (рис. 12.11). Обозначим через L точку касания искомой окружности и прямой M_1M_2. Через центр O_3 искомой окружности проведем прямую, параллельную прямой M_1M_2 (P и K — точки пересечения этой прямой и отрезков O_1M_1 и O_2M_2). Прямая PK будет перпендикулярна прямым O_1M_1, O_2M_2 и O_3L. Обозначим радиус искомой окружности через x. В прямоугольном треугольнике O_1PO_3 длина гипотенузы $O_1O_3=R+x$; длина катета $O_1P=R-x$. По теореме Пифагора $PO_3=2\sqrt{Rx}$. Аналогично из прямоугольного треугольника O_3KO_2 находим $O_3K=2\sqrt{rx}$.

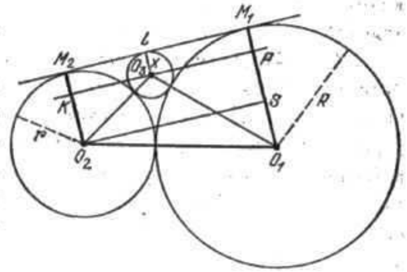


Рис. 12.11

Через центр меньшей из двух окружностей радиусов R и r проведем прямую, параллельную общей внешней касательной (на рис. 11.11 окружность с центром O_2 имеет меньший радиус, чем окружность с центром O_1, и O_2S — проведенная прямая). Из прямоугольного треугольника O_1SO_2, у которого $O_1O_2=R+r$, $O_1S=R-r$, находим $O_2S=2\sqrt{Rr}$. Отрезки SO_2, PK, M_1M_2 между собой параллельны, так как каждый перпендикулярен параллельным прямым O_1M_1 и O_2M_2 в $SO_2=PK=M_1M_2$.

Равенство $SO_2=PK=PO_3+O_3K$ дает уравнение для нахождения неизвестного x:

$$2\sqrt{Rx}+2\sqrt{rx}=2\sqrt{Rr}\Rightarrow Rx+2x\sqrt{Rr}+rx=Rr\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(R+2\sqrt{Rr}+r\right)=Rr\Rightarrow x=\frac{Rr}{R+2\sqrt{Rr}+r}=\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}.$$

Случай, когда искомая окружность находится со стороны меньшей окружности, рассматривается аналогично предыдущему. При этом может быть использован тот же чертеж, только данными следует считать окружности с центрами, например, O_2 и

O_3 и искомой — с центром O_1 или O_1, O_3, а искомой — с центром O_2.

Тогда если радиус большей из данных окружностей равен R, а меньшей r, то, проводя аналогичные рассуждения, получим, что радиус искомой окружности будет равен $\frac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$.

Ответ. $\frac{Rr}{(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$; $\frac{Rr}{(\sqrt{R}-\sqrt{r})^2}$.

Пример 3.3. AOB — сектор круга радиуса r. Величина угла AOB равна $\alpha (\alpha < \pi)$. Найти радиус окружности, лежащей внутри этого сектора и касающийся хорды AB, дуги AB и биссектрисы угла AOB.

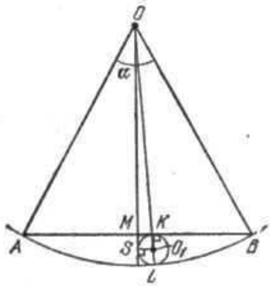


Рис. 12.12

Решение. Пусть OM — биссектриса угла AOB, O_1 — центр искомой окружности, S — точка касания искомой окружности и биссектрисы OM, K — точка касания искомой окружности и хорды AB (рис. 12.12). Отрезок OM является биссектрисой угла AOB, и так как $\triangle AOB$ равнобедренный, то OM является также и высотой этого треугольника. Четырехугольник $SMKO_1$ — квадрат, так как $SO_1 = KO_1$, а углы O_1SM, SMK и MKO_1 прямые. По теореме о прямой, проходящей через центры двух касающихся окружностей, центры окружностей O, O_1 и точка касания L этих окружностей лежат на одной прямой OL.

Обозначим радиус искомой окружности $O_1K = x$. Диагональ MO_1 квадрата MSO_1K равна $\sqrt{2}x$. Из треугольника OMB находим в согласии с условием задачи $OM = r\cos\frac{\alpha}{2}$. В треугольнике OMO_1 имеем $MO_1 = \sqrt{2}x$, $OM = r\cos\frac{\alpha}{2}$, $|OO_1| = r - x$, $\widehat{OMO_1} = 135°$. Теорема косинусов для треугольника OMO_1 дает уравнение для неизвестного x:

$$(r-x)^2 = 2x^2 + r^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2x\sqrt{2}\,r\cos\frac{\alpha}{2}\cos 135°,$$

$$(r-x)^2 = 2x^2 + r^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2rx\cos\frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 2r\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)x + r^2\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}-1\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = -2r\cos^2\frac{\alpha}{4} \pm 2r\cos\frac{\alpha}{4} \Rightarrow x_{1,2} = 2r\cos\frac{\alpha}{4}\left(-\cos\frac{\alpha}{4}\pm 1\right).$$

Так как величина x должна быть положительной, а из двух найденных корней положителен только первый,

$$x_1 = 2r\cos\frac{\alpha}{4}\left(1-\cos\frac{\alpha}{4}\right) = 4r\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8},$$

то он и дает величину радиуса искомой окружности.

Ответ. $4r\cos\frac{\alpha}{4}\sin^2\frac{\alpha}{8}$.

3.10. Две окружности радиуса 32 с центрами O_1 и O_2, пересекаясь, делят отрезок O_1O_2 на три равные части. Найти радиус окружности, которая касается изнутри обеих данных окружностей и отрезка O_1O_2.

3.11. Даны два пересекающихся круга одного и того же радиуса R. Расстояние между центрами этих кругов $O_1O_2 = l$. Найти площадь круга, касающегося внутренним образом обеих окружностей и прямой O_1O_2.

3.12. Две окружности, радиусы которых равны R_1 и R_2, пересекаются. Расстояние между их центрами равно d. Найти радиус окружности, касающейся данных окружностей и их общей касательной.

3.13. Круг радиуса 6 см лежит внутри полукруга радиуса 24 см и касается середины диаметра полукруга. Найти радиус меньшей окружности, касающейся заданных круга, полукруга и диаметра полукруга.

3.14. Дана окружность радиуса r с центром в точке O. Из точки A отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена секущая к окружности, пересекающая окружность в точках K и P; при этом точка K лежит между точками A и P. Величина угла MAK равна $\pi/3$. Длина отрезка OA равна a. Найти радиус окружности, касающейся отрезков AM, AK и дуги MK.

3.15. К окружности радиуса 3 см с центром в точке O из точки M проведены секущая OM и касательная MC, касающаяся окружности в точке C. Найти радиус окружности, касающейся заданной окружности, прямых MC и OM и лежащей внутри треугольника OMC, если $OM = 5$ см.

3.16. В сегмент с дугой в 120° и высотой h вписан прямоугольник, у которого основание в 4 раза больше высоты. Определить стороны прямоугольника.

3.17. В круговом секторе OAB, величина центрального угла которого равна $\pi/4$, расположен прямоугольник $KMPT$. Сторона KM прямоугольника лежит на радиусе OA, вершина P — на дуге AB, вершина T — на радиусе OB. Длина стороны KT на 3 см больше длины стороны KM. Площадь прямоугольника $KMPT$ равна 18 см². Найти длину радиуса.

3.18. Из точки A, находящейся на расстоянии 5 см от центра окружности радиуса 3 см, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен 30° (K, C, L и B — точки пересечения секущих с окружностью). Найти площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10 см².

3.19. Даны две одинаковые пересекающиеся окружности. Отношение расстояния между их центрами к радиусу равно $2m$. Третья окужность касается внешним образом обеих окружностей и их общей касательной. Определить отношение площади общей части первых двух кругов к площади третьего круга.

3.20. В круговой сектор, ограниченный радиусами OA и OB, с центральным углом α $(\alpha < \pi/2)$ вписан квадрат так, что две его соседние вершины лежат на радиусе OA, третья вершина — на радиусе OB, а четвертая вершина — на дуге AB. Найти отношение площадей квадрата и сектора.

3.21. В круге проведены две взаимно перпендикулярные пересекающиеся хорды AB и CD. Известно, что

$$AB = BC = CD.$$

Установить, что больше: площадь круга или площадь квадрата со стороной AB.

3.22. Две окружности радиусов $\sqrt{5}$ и $\sqrt{2}$ см пересекаются. Расстояние между центрами окружностей равно 3 см. Через точку A (одну из точек пересечения) проведена прямая, пересекающая окружности в точках B и C $(B \neq C)$ так, что $AB = AC$. Найти длину отрезка AB.

§ 4. Треугольники и окружности

Треугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется *вписанным в окружность*, а окружность называется *описанной около треугольника*. Центр окружности, описанной около треугольника, лежит на пересечении перпендикуляров к серединам сторон треугольника.

Радиус окружности, описанной около треугольника, вычисляется по формуле

$$R = \frac{1}{2}\,\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{1}{2}\,\frac{b}{\sin\beta} = \frac{1}{2}\,\frac{c}{\sin\gamma}$$

или по формуле

$$R = abc/(4S),$$

где a, b, c — стороны треугольника; α, β, γ — углы треугольника, лежащие против сторон a, b, c соответственно, S — площадь треугольника.

Окружность, касающаяся всех сторон треугольника, называется *вписанной в треугольник*. Центр окружности, вписанной в треугольник, лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника.

Радиус окружности, вписанной в треугольник, вычисляется по формуле

$$r = S/p,$$

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ — полупериметр треугольника.

Задачи 4.1—4.36 решаются непосредственными вычислениями с использованием свойств треугольников, вписанных в окружность, и окружностей, вписанных в треугольник.

Пример 4.1. На стороне AC остроугольного треугольника ABC взята точка D так, что $AD = 1$, $DC = 2$ и BD является высотой треугольника ABC. Окружность радиуса 2, проходящая через точки A и D, касается в точке D окружности, описанной около треугольника BDC. Найти площадь треугольника ABC.

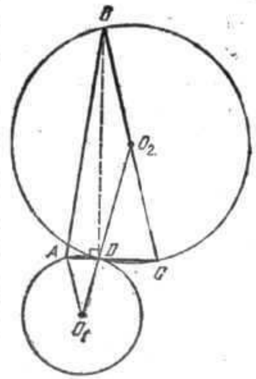


Рис. 12.13.

Решение. Пусть O_1 — центр окружности радиуса 2, проходящей через точки A и D, а O_2 — центр окружности, описанной около треугольника BDC (рис. 12.13). Так как BD — высота треугольника ABC, то треугольник BDC прямоугольный, и, следовательно, центр описанной около треугольника BDC окружности лежит на середине его гипотенузы BC.

Рассмотрим треугольник AO_1D. Этот треугольник равнобедренный, и по условию задачи $AD = 1$, $AO_1 = O_1D = 2$. По теореме косинусов найдем угол ADO_1 этого треугольника:

$$\widehat{ADO}_1 = \arccos\frac{1}{4}.$$

Так как по условию задачи окружности с центрами O_1 и O_2 касаются в точке D, то линия центров O_1O_2 проходит через точку касания и $O_1O_2 = O_1D + DO_2$. Углы $\widehat{ADO}_1$, $\widehat{CDO}_2$ вертикальные и, следовательно, равные, т. е. $\widehat{CDO}_2 = \arccos\frac{1}{4}$. Треугольник DO_2C равнобедренный, так как DO_2 и O_2C — радиусы окружности, и, следовательно, $\widehat{O_2CD} = \arccos\frac{1}{4}$.

В прямоугольном треугольнике BCD известны катет $DC = 2$ и $\widehat{O_2CD} = \arccos\frac{1}{4}$. По этим данным находим гипотенузу BC:

$$\frac{DC}{BC} = \cos\left(\arccos\frac{1}{4}\right) \Rightarrow \frac{DC}{BC} = \frac{1}{4} \Rightarrow BC = 8.$$

Таким образом, в треугольнике ABC найдены три параметра, позволяющие вычислить площадь этого треугольника:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC \cdot \sin \widehat{DCB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 8 \sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right) =$$

$$= 12 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} = 3\sqrt{15}.$$

Ответ. $3\sqrt{15}$.

Пример 4.2. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом $30°$ проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если меньший катет треугольника ABC равен 1.

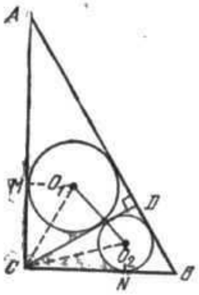


Рис. 12.14

Решение. Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники ACD и BCD соответственно; угол $\widehat{CAB}$ равен $30°$, $BC = 1$ (рис. 12.14). Из прямоугольного треугольника ABC находим

$$\frac{BC}{AC} = \operatorname{tg} 30° \Rightarrow AC = \sqrt{3}, \quad \widehat{ABC} = 60°.$$

Из прямоугольного треугольника ACD по известным данным $AC = \sqrt{3}$ и $\widehat{A} = 30°$ находим

$$CD = \sqrt{3}/2, \quad AD = 3/2.$$

Из прямоугольного треугольника CDB по известным данным $BC = 1$ и $\hat{B} = 60°$ находим

$$BD = 1/2, \quad DC = 3/2.$$

Вычислим площади и полупериметры треугольников ACD и CDB:

$$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot DC = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad p_{\triangle ACD} = \frac{3(1+\sqrt{3})}{4},$$

$$S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} CD \cdot BD = \frac{\sqrt{3}}{8}, \quad p_{\triangle BCD} = \frac{3+\sqrt{3}}{4}.$$

Далее по формуле $S = pr$ вычисляем радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и CDB:

$$r_1 = \frac{S_{\triangle ACD}}{p_{\triangle ACD}} = \frac{\sqrt{3}}{2(1+\sqrt{3})},$$

$$r_2 = \frac{S_{\triangle CDB}}{p_{\triangle CDB}} = \frac{1}{2(1+\sqrt{3})}.$$

Так как центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис внутренних углов треугольника, то углы CDO_1 и CDO_2 равны между собой и составляют по $45°$. Отсюда можно сделать два вывода. Во-первых,

$$O_1D = r_1\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}, \quad O_2D = r_2\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}.$$

Во-вторых, угол O_1DO_2 треугольника O_1DO_2 прямой. Тогда по теореме Пифагора находим O_1O_2:

$$(O_1O_2)^2 = \left[\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}\right]^2 + \left[\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}\right]^2 = \frac{2}{(1+\sqrt{3})^2}.$$

Таким образом, искомое расстояние между центрами окружностей

$$O_1O_2 = \frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$.

4.1. Найти длину окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c.

4.2. В равнобедренном треугольнике даны длина боковой стороны b и угол α при основании. Найти расстояние от центра описанной окружности до центра вписанной окружности.

4.3. Дан круговой сектор радиуса R с центральным углом α. Найти радиус вписанного в сектор круга.

4.4. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной a и b. Найти радиус окружности, если расстояние между серединами данных хорд равно $c/2$.

4.5. На основании равностороннего треугольника как на диаметре построена полуокружность, рассекающая треугольник на две части. Длина стороны треугольника равна a. Найти площадь той части треугольника, которая лежит вне полукруга.

4.6. На одной из сторон угла, равного α, даны две точки, расстояния от которых до другой стороны равны b и c. Найти радиус окружности, проходящей через эти две точки и касающейся другой стороны угла.

4.7. Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найти длины хорд BD и CD.

4.8. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы

AB. Найти расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.

4.9. Окружность радиуса R проходит через вершины A и B треугольника ABC и касается прямой AC в точке A. Найти площадь треугольника ABC, зная, что $\widehat{ABC}=\beta$, $\widehat{ACB}=\alpha$.

4.10. В прямоугольном треугольнике ABC угол A прямой, величина угла B равна 30°, а радиус вписанной окружности равен $\sqrt{3}$. Найти расстояние от вершины C до точки касания вписанной окружности и катета AB.

4.11. Окружность касается стороны BC и продолжений двух других сторон треугольника ABC. Найти радиус окружности, если $AB=c$, $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{ABC}=\beta$.

4.12. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, стороны AB — в точке E и стороны BC — в точке F. Длина отрезка AD равна R, а длина отрезка DC равна a. Найти площадь треугольника BEF.

4.13. В правильный треугольник, сторона которого равна a, вписан круг. Из вершины радиусом, равным половине его стороны, проведена другая окружность. Найти площадь общей части этих кругов.

4.14. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом при основании α вписана окружность. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся основания, одной из боковых сторон треугольника и вписанной в него первой окружности. Определить радиус второй окружности.

4.15. В треугольнике ABC со сторонами $BC=a$, $AC=2a$ и углом $C=120°$ вписана окружность. Через точки касания этой окружности со сторонами AC и BC через вершину B проведена вторая окружность. Найти ее радиус.

4.16. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 4, угол CAB равен $\pi/6$, а радиус описанной окружности равен 3. Доказать, что длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, меньше 3.

4.17. В треугольнике ABC боковые стороны AB и BC равны a, а $\widehat{ABC}=120°$. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D. Вторая окружность имеет центром точку B и проходит через точку D. Найти площадь той части вписанного круга, которая находится внутри второго круга.

4.18. В остроугольный треугольник ABC вписан полукруг так, что его диаметр лежит на стороне AB, а дуга касается сторон AC и BC. Найти радиус окружности, касающейся дуги этого полукруга и сторон AC и BC треугольника, если $AC=b$, $BC=a$, $\widehat{ACB}=\alpha$.

4.19. Окружность радиуса $1+\sqrt{2}$ описана около равнобедренного прямоугольного треугольника. Найти радиус окружности, которая касается катетов этого треугольника и внутренним образом касается описанной вокруг него окружности.

4.20. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB=3$ и $BC=4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся стороны BC. Найти длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

4.21. В треугольнике ABC даны длины сторон $AB=21$, $BC=15$ и проведена биссектриса BD угла ABC. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник ABD зная, что $\cos(\widehat{BAC})=5/7$.

4.22. В окружность радиуса R вписан равносторонний треугольник ABC. Сторона BC разделена на три равные части и через точку деления, ближайшую к C, проведена прямая, проходящая через вершину A и пересекающая окружность в точке D. Найти периметр треугольника ABD.

4.23. В треугольнике ABC $AB=\sqrt{14}$, $BC=2$. Окружность проходит через точку B, через середину D отрезка BC, через точку E на отрезке AB и касается стороны AC. Найти отношение, в котором эта окружность делит отрезок AB, если DE — диаметр окружности.

4.24. Вокруг треугольника ABC с длинами сторон $AB=10\sqrt{2}$, $AC=20$ и $\widehat{B}=45°$ описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, пересекающая продолжение стороны AB в точке D. Найти площадь треугольника BCD.

4.25. В треугольнике ABC известны длины сторон $AB=6$, $BC=4$, $AC=8$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке D. Через точки A, D, C проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Найти площадь треугольника ADE.

4.26. В треугольнике ABC $\widehat{BAC}=\alpha$, $\widehat{BCA}=\beta$, $AC=b$. На стороне BC взята точка D так, что $BD=3DC$. Через точки B и D проведена окружность, касающаяся стороны AC или ее продолжения за точку A. Найти радиус этой окружности.

4.27. В треугольнике ABC $\widehat{A}=120°$, $AC=1$, $BC=\sqrt{7}$. На продолжении стороны CA взята точка M так, что BM является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и M и касающейся в точке M окружности, проходящей через точки M, B и C.

4.28. Вокруг треугольника ABC со сторонами $AB = 5(1 + \sqrt{3})$, $BC = 5\sqrt{6}$, $AC = 10$ описана окружность. Через точку C проведена касательная к окружности, а через точку B — прямая, параллельная стороне AC. Касательная и прямая пересекаются в точке D. Определить площадь четырехугольника $ABDC$.

4.29. В треугольник ABC со сторонами $AB = 10$, $BC = 20$ и углом C, равным 30°, вписана окружность. Через точку M стороны AC, отстоящую на расстоянии 10 от вершины A, проведена касательная к окружности. Пусть K — точка пересечения касательной с прямой, проходящей через вершину B параллельно стороне AC. Найти площадь четырехугольника $ABKM$.

4.30. В треугольнике BCD известно $BC = 4$, $CD = 8$, $\cos(\widehat{BCD}) = 3/4$. Точка A выбрана на стороне CD так, что $CA = 2$. Найти отношение площади круга, описанного около треугольника BCD, к площади круга, вписанного в треугольник ABD.

4.31. В треугольнике, один из углов которого равен разности двух других, длина меньшей стороны равна 1, а сумма площадей квадратов, построенных на двух других сторонах, в два раза больше площади описанного около треугольника круга. Найти длину большей стороны треугольника.

4.32. В треугольнике ABC длина стороны BC равна 2 см, длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB, равна $\sqrt{2}$ см, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $\sqrt{5}$ см. Найти длины сторон AB и AC треугольника, если известно, что угол ABC острый.

4.33. Треугольник ABC, угол B которого равен $2\alpha < \pi/3$, вписан в окружность радиуса R. Диаметр окружности делит угол B пополам; касательная к окружности в точке A пересекает продолжение стороны BC в точке M. Найти площадь треугольника ABM.

4.34. Дан правильный треугольник ABC со стороной a. Окружность проходит через центр треугольника и касается стороны AB в ее середине M. Прямая, проведенная из вершины A, касается окружности в точке E. Найти площадь треугольника AEM.

4.35. Около треугольника ABC $(\hat{A} > \pi/2)$ описана окружность с центром O. Точка F является серединой большей из дуг, стягиваемых хордой BC. Обозначим точку пересечения стороны BC с продолжением радиуса AO через E, а с хордой AF — через P. Пусть AH — высота треугольника ABC. Найти отношение площади четырехугольника $OEPF$ к площади треугольника APH, если известно, что радиус описанной окружности $R = 2\sqrt{3}$, $AE = \sqrt{3}$ и $EH = 3/2$.

4.36. Дан равнобедренный треугольник MNP, в котором $MN = NP = l$, $\widehat{MNP} = \beta$. Окружность с центром на стороне MP касается сторон MN и NP. Касательная к этой окружности пересекает сторону MN в точке Q, а сторону NP — в точке R. Известно, что $MQ = n$. Найти площадь треугольника QNR.

В условиях задач 4.37—4.44 отсутствуют данные, имеющие размерность длины. Для решения этих задач необходимо ввести вспомогательную величину a, имеющую размерность длины (например, сторону треугольника), и решить задачу с доопределенным условием. Выражения для искомых величин не будут содержать a.

Пример 4.3. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны. Найти отношение площадей вписанного и описанного кругов.

Решение. Обозначим катет AC треугольника ABC через a. Так как по условию задачи катеты равны, то $BC = AC = a$ и $\hat{A} = \hat{B} = 45°$. По теореме Пифагора находим гипотенузу:

$$AB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}.$$

Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы:

$$R = a\sqrt{2}/2.$$

Радиус окружности, вписанной в треугольник, вычислим по формуле

$$r = \frac{S}{p}, \quad \text{где} \quad S = \frac{1}{2}a^2, \quad p = \frac{a + a + a\sqrt{2}}{2} = \frac{a(2+\sqrt{2})}{2},$$

и, следовательно, $r = \dfrac{a}{2+\sqrt{2}}$.

Вычислим отношение площадей вписанного и описанного кругов:

$$\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}.$$

Ответ. $1/(1+\sqrt{2})^2$.

4.37. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Другая окружность того же радиуса касается катетов этого треугольника так, что одной из точек касания является вершина треугольника. Найти отношение площади треугольника к площади общей части двух данных кругов.

4.38. В треугольнике ABC даны углы B, C. Через середину O стороны AB и вершину A проведена окружность, касающаяся стороны BC. Найти отношение радиуса этой окружности к длине стороны BC.

4.39. Найти отношение радиусов вписанного и описанного кругов для равнобедренного треугольника с углом α при основании.

4.40. Дан прямоугольный треугольник с острым углом α. Найти отношение радиусов описанной и вписанной окружностей и определить, при каком значении α это отношение наименьшее.

4.41. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$ и $\widehat{BAC} = \alpha$. Из вершины C проведена прямая, составляющая с AC угол, равный $\alpha/4$, и проходящая внутри треугольника, которая пересекает окружность в точке E. Эта прямая пересекается с биссектрисой угла BAC в точке F. Вершина A треугольника соединена отрезком прямой с точкой E. Найти отношение площадей треугольников AFC и AEC.

4.42. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Угол CAB равен α. Биссектриса угла ABC пересекает катет AC в точке K. На стороне BC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке M. Найти угол AMK.

4.43. В треугольнике ABC даны углы B и C. Биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке D, а окружность, описанную около треугольника ABC, — в точке E. Найти отношение $AE : DE$.

4.44. Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найти отношение площадей треугольников PQM и PQN, если $\widehat{A} = \pi/4$, $\widehat{B} = \pi/3$.

Задачи 4.45—4.66 решаются методом введения вспомогательного неизвестного (или нескольких вспомогательных неизвестных), для которого по условию задачи составляется уравнение (или соответственно система уравнений). Часто в качестве вспомогательных неизвестных удобно выбирать величины, которые вместе с данными из условия задачи дают набор элементов, однозначно задающих треугольники.

П р и м е р 4.4. Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, в 4 раза меньше радиуса окружности, описанной около этого треугольника. Найти углы треугольника.

Р е ш е н и е. Пусть a — длина основания AC треугольника ABC, α — острый угол при основании (рис. 12.15). Используя введенные параметры, вычислим радиусы вписанной и описанной окружностей. Так как треугольник ABC равнобедренный, то биссектриса угла ABC ($AB = BC$) является одновременно медианой и высотой треугольника ABC и угол ODA прямой, $AD = a/2$, $\widehat{OAD} = \alpha/2$ (O — центр вписанной окружности, а OD — ее радиус). Из треугольника AOD находим

$$r = OD = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

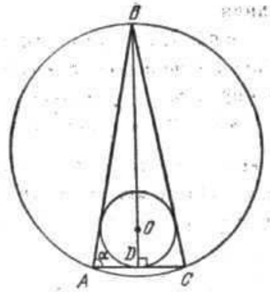


Рис. 12.15

Радиус описанной окружности найдем по теореме синусов

$$\frac{AC}{\sin \widehat{ABC}} = 2R,$$

где $\widehat{ABC} = 180° - 2\alpha$, $AC = a$, и, следовательно,

$$R = \frac{a}{2 \sin 2\alpha}.$$

По условию задачи радиус описанной окружности в 4 раза больше радиуса вписанной окружности:

$$\frac{R}{r} = \frac{\dfrac{a}{2\sin 2\alpha}}{\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}} = 4.$$

Последнее равенство представляет собой тригонометрическое уравнение для нахождения угла α:

$$\frac{1}{\sin 2\alpha} = 4\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}\, 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\cos\dfrac{\alpha}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos\alpha\, 2\sin^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} \Rightarrow \cos\alpha\,(1-\cos\alpha) = \frac{1}{8} \Rightarrow 8\cos^2\alpha - 8\cos\alpha + 1 = 0.$$

Обозначая $\cos\alpha = y$, получаем квадратное уравнение для неизвестного y:

$$8y^2-8y+1=0,$$
$$y_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4},$$
$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Таким образом, составленное тригонометрическое уравнение имеет два решения:

$$\alpha_1=\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\quad \alpha_2=\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Каждому значению α соответствует свой угол при вершине равнобедренного треугольника:

$$\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right),\quad \pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$$

Ответ. $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\pi-2\arccos\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$.

Пример 4.5. В равнобедренном треугольнике ABC угол B прямой, $AB=BC=2$. Окружность касается обоих катетов в их серединах и высекает на гипотенузе хорду DE. Найти площадь треугольника BDE.

Решение. Пусть точки M и N — точки касания окружности с катетами треугольника ABC. По условию $AN=NB$ и $BM=MC$. Восставим перпендикуляры из точек M и N. Так как эти точки — середины катетов треугольника, то точка K — пересечение перпендикуляров — представляет собой центр описанной вокруг треугольника окружности и, следовательно, находится на середине гипотенузы AC. С другой стороны, K — центр исходной окружности по построению. Таким образом, KN и KM — радиусы этой окружности. Заметим теперь, что четырехугольник $BNKM$ — квадрат (прямоугольник с равными смежными сторонами). Так как $NB=KN$, то $KN=1$. Рассмотрим треугольник EBD. Его основание ED — диаметр исходной окружности (хорда, проходящая через центр K). Следовательно, $ED=2$. Высота треугольника EBD (BK) — радиус описанной вокруг $\triangle ABC$ окружности, следовательно, $BK=\sqrt{2}$. Таким образом, искомая площадь $\triangle EBD$ равна

$$S=\frac{BK\cdot ED}{2}=\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{2}$.

4.45. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, площадь — 24 см^2. Найти площадь описанного круга.

4.46. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция второго на гипотенузу — 16 см. Найти радиус окружности, вписанной в этот треугольник.

4.47. Определить углы прямоугольного треугольника, зная, что радиус описанной около него окружности относится к радиусу вписанной окружности, как 5 : 2.

4.48. Длина основания равнобедренного треугольника равна 4 см. Длина боковой стороны делится точкой касания вписанной в этот треугольник окружности в отношении 3 : 2, считая от вершины. Определить периметр треугольника.

4.49. Площадь прямоугольного треугольника равна 6 см^2, а радиус вневписанной окружности, касающейся одного из катетов, равен 3 см. Найти стороны треугольника.

4.50. Каждая из двух окружностей с центрами на медианах равнобедренного треугольника, проведенных к боковым сторонам, касается боковой стороны и основания. Вычислить расстояние между центрами окружностей, если длина основания треугольника равна 2 дм, а длины этих медиан равны $\sqrt{6}$ дм.

4.51. Площадь треугольника ABC равна $15\sqrt{3}$ см^2. Величина угла BAC равна 120°. Величина угла ABC больше величины угла ACB. Расстояние от вершины A до центра окружности, вписанной в треугольник ABC, равно 2 см. Найти длину медианы треугольника ABC, проведенной из вершины B.

4.52*. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу в точке D так, что $AD:DB=1:4$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C прямого угла на гипотенузу, если известно, что длина катета BC равна 10.

4.53. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с окружностью делит один из катетов треугольника на отрезки длиной 6 и 10 см, считая от вершины прямого угла. Найти площадь треугольника.

4.54. В треугольнике ABC биссектриса AP угла A делится центром O вписанной окружности в отношении $AO:OP=\sqrt{3}:2\sin\frac{5\pi}{18}$. Найти углы B и C, если известно, что угол A равен $5\pi/9$.

4.55. В треугольнике ABC биссектриса AE относится к радиусу вписанной окружности, как $\sqrt{2}:(\sqrt{2}-1)$. Найти углы B и C, если известно, что угол A равен $\pi/3$.

4.56. Из вершины B равнобедренного треугольника ABC на его основание AC опущена высота BD. Длина каждой из боковых сторон AB и BC треугольника ABC равна 8 см. В треугольнике BCD проведена медиана DE. В треугольник BDE вписана окружность, касающаяся стороны BE в точке K и стороны DE в точке M. Длина отрезка KM равна 2 см. Найти величину угла BAC.

4.57. Точка пересечения медиан прямоугольного треугольника лежит на окружности, вписанной в этот треугольник. Найти острые углы треугольника.

4.58. Найти косинус угла при основании равнобедренного треугольника, если известно, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.

4.59. В треугольнике ABC биссектриса AK перпендикулярна медиане BM, а $\widehat{ABC} = 120°$. Найти отношение площади треугольника ABC к площади описанного около этого треугольника круга.

4.60. Вокруг равнобедренного треугольника ABC описана окружность. Через вершину A проведена хорда длиной m, пересекающая основание BC в точке D. Даны отношение $BD : DC = k$ и угол A $(A < \pi/2)$. Найти радиус окружности.

4.61. В равнобедренный треугольник ABC с основанием AC вписана окружность, которая касается боковой стороны AB в точке M. Через точку M проведен перпендикуляр ML к стороне AC треугольника ABC (точка L — основание перпендикуляра). Найти величину угла BCA, если известно, что площадь треугольника ABC равна 1, а площадь четырехугольника $LMBC$ равна S.

4.62. Внутри острого угла α взята точка M, отстоящая от сторон угла на расстояния a и $2a$. Найти радиус окружности, проходящей через точку M и касающейся сторон угла.

4.63. На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром, расположенным внутри этого угла, касается одной стороны угла, пересекает другую в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D. Длина хорды CD равна $\sqrt{7}$, длина хорды AB равна $\sqrt{6}$. Найти радиус окружности.

4.64*. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются. Известно, что $AD = 2$, $CD = 4$, $BD = 5$. Найти радиусы окружностей.

4.65. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $2/\sqrt{3}$, вписанная в треугольник ABD, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Известно, что $BM = 6$, $BN = 5$. Найти длины сторон треугольника ABC.

4.66. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность l_1, вписанная в треугольник ABD, касается отрезка BD в точке M; окружность l_2, вписанная в треугольник BCD, — в точке N. Отношение радиусов окружностей l_1 и l_2 равно 7/4. Известно, что $BM = 3$, $MN = ND = 1$. Найти длины сторон треугольника ABC.

§ 5. Многоугольники и окружности

Многоугольник, все вершины которого лежат на окружности, называется *вписанным в окружность*, а окружность — *описанной около многоугольника*. Окружность, касающаяся всех сторон многоугольника, называется *вписанной в многоугольник*.

Площадь правильного многоугольника с n углами (n-угольника) S_n, сторона n-угольника a_n, периметр n-угольника P_n и радиусы описанной и вписанной окружностей R и r связаны формулами

$$S_n = \frac{1}{2} P_n r,$$

$$a_n = 2R \sin \frac{180°}{n},$$

$$S_n = \frac{1}{2} R^2 n \sin \frac{360°}{n}.$$

Теоремы о четырехугольниках и окружностях.

1. Для того чтобы в выпуклый четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон четырехугольника были равны.

2. Для того чтобы около выпуклого четырехугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы сумма противолежащих внутренних углов четырехугольника была равна 180°.

Искомые величины в задачах 5.1—5.13 находятся непосредственными вычислениями с использованием свойств многоугольника и окружностей, вписанных в этот многоугольник или описанных около него.

Пример 5.1. Дана трапеция $ABCD$, боковая сторона AB которой перпендикулярна основаниям. В трапецию вписана окружность с центром в точке O. Через точки A, B, C проведена окружность с центром в точке O_1. Найти диагональ AC, если $OO_1 = 1$ см, а меньшее основание трапеции BC равно 10 см.

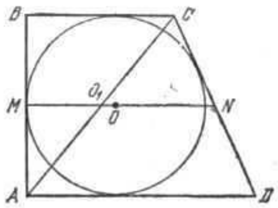


Рис. 12.16

Решение. Пусть MN — средняя линия данной трапеции (рис. 12.16). Окружность, проходящая через точки A, B, C, — это окружность, описанная около прямоугольного треугольника ABC (угол B прямой), и ее центр O_1 лежит на середине гипотенузы AC. С другой стороны, средняя линия трапеции MN пересекает диагональ трапеции AC в ее середине. Следовательно, точка O_1 — это точка пересечения диагонали трапеции AC и средней линии трапеции MN.

Выясним, где находится точка O — центр окружности, вписанной в трапецию $ABCD$. Так как рассматриваемая окружность касается двух параллельных прямых BC и AD, то ее центр — точка, равноудаленная от этих двух прямых. Множество точек, равноудаленных от двух оснований трапеции, — ее средняя линия, и, следовательно, центр окружности, вписанной в трапецию, также лежит на средней линии MN. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC, так как AB равна диаметру вписанной окружности, а сторона BC меньше диаметра. Так как в треугольнике против большей стороны лежит бо́льший угол ($\widehat{BCA} > \widehat{CAB}$), а сумма углов BCA и CAB равна 90°, то угол CAB меньше 45°. Окружность с центром в точке O касается сторон прямого угла BAD, точка O лежит на биссектрисе этого угла, и, следовательно, $\widehat{BCO} = 45°$.

Таким образом, два угла ($\widehat{BAC}$ и $\widehat{BAO}$) имеют общую сторону и $\widehat{BAC} < \widehat{BAO}$. Отсюда можно сделать вывод, что луч AO_1 лежит между сторонами угла BAO, т. е. точка O_1 лежит между точками M и O.

Теперь можно найти радиус окружности, вписанной в трапецию $ABCD$. Отрезок MO_1 — средняя линия треугольника ABC, и, следовательно,

$$MO_1 = \frac{1}{2} BC = 5 \text{ см}.$$

Длина отрезка MO (радиуса вписанной в трапецию окружности):

$$MO = MO_1 + O_1O = 6 \text{ см}.$$

Так как длина боковой стороны трапеции AB равна диаметру окружности ($AB = 2$, $MO = 12$), то из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора получаем

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 10^2} = \sqrt{244} = 2\sqrt{61}.$$

Ответ. $2\sqrt{61}$ см.

5.1. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

5.2. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$, сторона AB которого равна a. Из конца K диаметра KP, параллельного стороне AB, сторона BC видна под углом β. Найти радиус окружности.

5.3. Около окружности радиуса r описана равнобочная трапеция $ABCD$, E и K — точки касания этой окружности с боковыми сторонами трапеции. Угол между основанием AB и боковой стороной AD трапеции равен 60°. Доказать, что EK параллельна AB, и найти площадь трапеции $ABEK$.

5.4. В параллелограмме $ABCD$ с углом A, равным 60°, проведена биссектриса угла B, пересекающая сторону CD в точке E. В треугольник ECB вписана окружность радиуса r. Другая окружность вписана в трапецию $ABED$. Найти расстояние между центрами этих окружностей.

5.5. В параллелограмме лежат две окружности. Одна из них, радиуса 3, вписана в параллелограмм, а вторая касается двух сторон параллелограмма и первой окружности. Расстояние между точками касания, лежащими на одной стороне параллелограмма, равно 3. Найти площадь параллелограмма.

5.6. В ромбе $ABCD$ со стороной $1 + \sqrt{5}$ и острым углом 60° расположена окружность, вписанная в треугольник ABD. Из точки C к окружности проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке E. Найти длину отрезка AE.

5.7. Каждая из двух окружностей с центрами на диагоналях равнобочной трапеции касается боковой стороны и большего основания. Вычислить расстояние между центрами окружностей, если длины боковых сторон трапеции равны 4 см, а длины оснований равны 6 и 3 см.

5.8. В трапеции $ABCD$ известны основания $AD = 39$ см и $BC = 26$ см и боковые стороны $AB = 5$ см и $CD = 12$ см. Найти радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.

5.9. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2 см. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке N. Длина отрезка MN равна 1 см. Найти величину угла BAD.

5.10. Сторона BC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину стороны AB, если $BC = 8$, $BD = 4\sqrt{2}$, $\widehat{DCA} : \widehat{ACB} = 2:1$.

5.11. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина стороны AB равна $10\frac{3}{10}$, длина стороны AD равна 14, длина стороны CD равна 10. Известно, что угол DAB острый, причем синус угла DAB равен 3/5, косинус угла ADC равен $-3/5$. Окружность с центром в точке O касается сторон AD, AB, BC. Найти длину отрезка BO.

5.12. Пятиугольник $ABCDE$ (вершины обозначены последовательно) вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $AB=\sqrt{2}$, $\widehat{ABE}=45°$, $\widehat{EBD}=30°$ и $BC=CD$. Чему равна площадь пятиугольника?

5.13. В ромб $CDEF$, у которого $\widehat{DCF}=\gamma$, вписана окружность радиуса r. Касательная к этой окружности пересекает сторону CD в точке A, а сторону CF — в точке B. Известно, что $AD=m$. Найти площадь треугольника ABC.

В задачах 5.14—5.16 необходимо ввести вспомогательную величину, имеющую размерность длины, и решить задачу с доопределенным условием. В искомых величинах вспомогательный параметр сократится, и искомые величины будут зависеть только от заданных в условии задачи величин.

5.14. В круг вписана равнобедренная трапеция так, что диаметр круга служит основанием трапеции. Найти отношение площадей круга и трапеции, если тупой угол трапеции равен α.

5.15. Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти углы трапеции.

5.16. Около круга описана трапеция с углами при основании α и β. Найти отношение площади трапеции к площади круга.

Задачи 5.17—5.32 решаются методом введения вспомогательного неизвестного (или нескольких вспомогательных неизвестных), для которого составляется уравнение (соответственно система уравнений), отвечающее условию задачи.

Пример 5.2. Сторона AB квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причем все остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Длина касательной CK, проведенной из вершины C к той же окружности, равна 2. Найти радиус окружности.

Решение. Пусть O — центр окружности, радиус которой нужно найти (рис. 12.17). Введем обозначения: R — радиус искомой окружности, x — длина отрезка, OL — расстояние от центра окружности до хорды AB.

Составим теперь следующие уравнения:

из прямоугольного треугольника COM получим

$$OC^2=(x+1)^2+\frac{1}{4}; \qquad (*)$$

из прямоугольного треугольника OBL получим

$$R^2=x^2+\frac{1}{4}; \qquad (**)$$

из прямоугольного треугольника OCK получим

$$OC^2=R^2+4. \qquad (***)$$

Приравнивая правые части уравнений (*) и (***) с учетом (**), получаем уравнение

$$x^2+2x+1+\frac{1}{4}=x^2+\frac{1}{4}+4 \Leftrightarrow 2x=3.$$

Следовательно, $x=\frac{3}{2}$; искомое значение R получается из уравнения (**):

$$R=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{10}{4}}.$$

Ответ. $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Пример 5.3. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и пересекает сторону DC в единственной

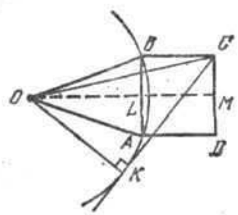


Рис. 12.17

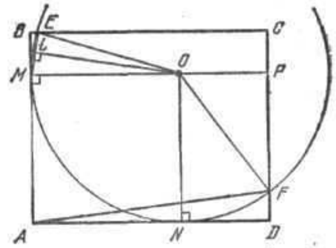


Рис. 12.18

точке F, а сторону BC — в единственной точке E. Найти площадь трапеции $AFCB$, если $AB=32$, $AD=40$ и $BE=1$.

Решение. Пусть O — центр окружности M и N — точки касания окружности со сторонами AB и AD (рис. 12.18); OL — высота равнобедренного треугольника MEO. В качестве неизвестных введем R — радиус окружности и $\alpha=\widehat{BME}$.

В прямоугольном треугольнике MBE по условию задачи $BE=1$. Выражаем стороны треугольника MBE через угол α и $BE=1$:

$$MB=\operatorname{ctg}\alpha, \quad ME=\frac{1}{\sin\alpha}.$$

Четырехугольник $AMON$, образованный радиусами NO, MO, проведенными в точки касания, и частями сторон прямоугольника AM и AN, будет квадратом, так как

$$NO = MO = R, \quad \widehat{NAM} = \pi/2, \quad \widehat{AMO} = \pi/2, \quad \widehat{ANO} = \pi/2,$$

и, следовательно, $AM = AN = R$. Равенство $AM + MB = AB$ дает первое уравнение, связывающее R и α:

$$R + \operatorname{ctg}\alpha = 32.$$

Рассмотрим треугольник OME. В этом треугольнике

$$ME = \frac{1}{\sin\alpha} = 2ML, \quad MO = OE = R, \quad \widehat{OME} = \frac{\pi}{2} - \alpha,$$

углы LOM и BME равны как углы с соответственно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\frac{ML}{R} = \sin\alpha$ и, подставляя сюда найденное уже значение $ML = \frac{1}{2\sin\alpha}$, получим уравнение

$$\frac{1}{2R\sin\alpha} = \sin\alpha.$$

Последнее равенство представляет собой второе уравнение для R и α. Итак, окончательно система уравнений для R и α имеет вид

$$R + \operatorname{ctg}\alpha = 32, \quad R = \frac{1}{2\sin^2\alpha}.$$

Исключая R из системы, получаем тригонометрическое уравнение угла α:

$$\frac{1}{2\sin^2\alpha} + \operatorname{ctg}\alpha = 32,$$

которое с помощью равенства $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$ преобразуется к виду

$$\operatorname{ctg}^2\alpha + 2\operatorname{ctg}\alpha + 1 = 64 \Rightarrow \operatorname{ctg}\alpha = 7$$

(α — острый угол). Из первого уравнения системы получаем $R = 25$.

Опустим из точки O перпендикуляр на сторону DC и рассмотрим прямоугольный треугольник OPF. В этом треугольнике $OF = R = 25$,

$$OP = MP - MO = AD - R = 40 - 25 = 15.$$

По теореме Пифагора находим

$$FP = \sqrt{OF^2 - OP^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20.$$

Так как $\operatorname{ctg}\alpha = 7$, то, следовательно, в треугольнике MBF сторона $MB = 7$. Так как $PC = MB = 7$ и $FC = FP + PC$, то $FC = 20 + 7 = 27$.

Теперь в искомой трапеции $AFBC$ найдено основание $FC = 27$, а второе основание AB и высота AD известны по условию задачи, и, следовательно, площадь трапеции $AFBC$ равна

$$S_{AFBC} = \frac{AB + FC}{2} AD = \frac{32 + 27}{2} \cdot 40 = 1180.$$

Ответ. 1180.

5.17. Около круга радиуса r описана прямоугольная трапеция, меньшее основание которой равно $\frac{3}{2} r$. Определить площадь трапеции.

5.18. В полукруге расположен прямоугольник $ABCD$ так, что его сторона AB лежит на диаметре, ограничивающем полукруг, а вершины C и D — на ограничивающей полукруг дуге. Длина радиуса полукруга равна 5 см. Найти длины сторон прямоугольника $ABCD$, если его площадь равна 24 см^2, а длина диагонали больше 8 см.

5.19. Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найти длины сторон параллелограмма.

5.20. Длина средней линии равнобочной трапеции равна 10. Известно, что в трапецию можно вписать окружность. Средняя линия трапеции делит ее на две части, отношение площадей которых равно 7/13. Найти длину высоты трапеции.

5.21. В окружность радиуса 6 см с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$. Его диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке K. Точки E и F являются соответственно серединами AC и BD. Длина отрезка OK равна 5 см, а площадь четырехугольника $OEKF$ равна 12 см^2. Найти площадь четырехугольника $ABCD$.

5.22. В трапецию $ABCD$ с основанием BC и AD и с боковыми сторонами AB и CD вписана окружность с центром O. Найти площадь трапеции, если угол DAB прямой, а $OC = 2$, $OD = 4$.

5.23. Биссектриса AE угла A рассекает четырехугольник $ABCD$ на равнобедренный треугольник ABE ($AB = BE$) и ромб $AECD$. Радиус круга, описанного около треугольника ECD, в 1,5 раза больше радиуса круга, вписанного в треугольник ABE. Найти отношение периметров этих треугольников.

5.24. В трапецию $ABCD$ с основанием $AD=40$, углами при вершинах A и D, равными $60°$, и боковыми сторонами $AB=CD=10$ вписана окружность так, что она касается обоих оснований AD и BC и стороны AB. Через точку M основания AD, отстоящую на расстояние 10 см от вершины D, проведена касательная к окружности. Эта касательная пересекает основание BC в точке K. Найти отношение площади трапеции $ABKM$ к площади трапеции $MDCK$.

5.25. Окружность, построенная на основании AD трапеции $ABCD$ как на диаметре, проходит через середины боковых сторон AB и CD трапеции и касается основания BC. Найти углы трапеции.

5.26. A, B, C, D — последовательные вершины прямоугольника. Окружность проходит через A и B и касается стороны CD в ее середине. Через D проведена прямая, которая касается той же окружности в точке E, а затем пересекает продолжение стороны AB в точке K. Найти площадь трапеции $BCDK$, если известно, что $AB=10$ и $KE:KA=3:2$.

5.27. В четырехугольнике $ABCD$ сторона AB равна стороне BC, диагональ AC равна стороне CD, а угол ABC равен углу ACD. Радиусы окружностей, вписанных в треугольник ABC и ACD, относятся, как $3:4$. Найти отношение площадей этих треугольников.

5.28. В ромб $ABCD$, у которого $AB=l$ и $\widehat{BAD}=\alpha$, вписана окружность. Касательная к этой окружности пересекает сторону AB в точке M, а сторону AD — в точке N. Известно, что $MN=2a$. Найти длины отрезков MB и ND.

5.29. В прямоугольнике $ABCD$ сторона BC вдвое короче стороны CD. Внутри прямоугольника расположена точка E, причем $AE=\sqrt{2}$, $CE=3$, $DE=1$. Вычислить косинус угла CDE и площадь прямоугольника $ABCD$.

5.30. В параллелограмме $ABCD$ известны длины стороны $AB=\sqrt{2}$ и диагонали $BD=2$. Окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке B, лежащая в плоскости параллелограмма, пересекается со второй окружностью радиуса 1, проходящей через точки A и C. Известно, что касательные, проходящие через одну из точек пересечения окружностей, взаимно перпендикулярны. Найти длину диагонали AC.

5.31. В равнобочную трапецию вписана окружность. Расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции относится к радиусу, как $3:5$. Найти отношение периметра трапеции к длине вписанной окружности.

ГЛАВА 13

СТЕРЕОМЕТРИЯ

Общие свойства прямых и плоскостей. Плоскость α и прямая a, не принадлежащая плоскости α, называются *параллельными*, если они не имеют ни одной общей точки.

Признак параллельности прямой и плоскости. Если прямая параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости, то данные прямая и плоскость либо параллельны, либо прямая принадлежит плоскости.

Теоремы о плоскости и прямой, параллельной плоскости.

1. Если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

2. Если через каждую из двух параллельных прямых проведена произвольная плоскость и эти плоскости пересекаются, то линия их пересечения параллельна каждой из данных прямых.

3. Если две пересекающиеся плоскости параллельны данной прямой, то линия их пересечения также параллельна данной прямой.

Две плоскости α и β называются *параллельными*, если они не имеют общей точки.

Признак параллельности двух плоскостей. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Теорема о параллельных плоскостях.

Если две параллельные плоскости пересечены третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.

Прямая и плоскость называются *взаимно перпендикулярными*, если прямая перпендикулярна каждой прямой, принадлежащей плоскости. Прямую, перпендикулярную плоскости, называют *перпендикуляром* к этой плоскости.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. Если прямая перпендикулярна каждой из двух пересекающихся прямых, лежащих в плоскости, то эти прямые и плоскость взаимно перпендикулярны.

Теоремы о перпендикулярности прямой и плоскости.

1. Два различных перпендикуляра к плоскости параллельны.

2. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая перпендикулярна этой плоскости.

3. Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

4. Две плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

Признак перпендикулярности плоскостей. Если плоскость содержит перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости.

Теоремы о взаимно перпендикулярных плоскостях.

1. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то прямая, принадлежащая одной плоскости и перпендикулярная линии пересечения плоскостей, перпендикулярна и другой плоскости.

2. Если две плоскости взаимно перпендикулярны и к одной из плоскостей проведен перпендикуляр, проходящий через линию пересечения этих плоскостей, то этот перпендикуляр целиком принадлежит другой плоскости.

Прямую, пересекающую плоскость, но не перпендикулярную ей, называют *наклонной к плоскости.*

Теорема о трех перпендикулярах. Для того чтобы прямая, лежащая в плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость.

Углом между наклонной и плоскостью называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость. Две несовпадающие полуплоскости, имеющие в качестве общей границы прямую и ограничивающие полуплоскости, называются *двугранным углом*. Прямая, являющаяся общей границей двух полуплоскостей, называется *ребром* двугранного угла. Полуплоскость, граница которой совпадает с ребром двугранного угла и делящая двугранный угол на два равных двугранных угла, называется *биссекторной плоскостью*. Угол, полученный в результате пересечения двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру, называется *линейным углом* двугранного угла.

§ 1. Многогранники

Многогранником называется тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Общие стороны смежных многоугольников называются *ребрами* многогранника. Многоугольники, которые ограничивают многогранник, называются его гранями.

Призма. Многогранник, две грани которого — равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а ребра всех остальных граней параллельны, называется *n-угольной призмой*. Пару равных n-угольников называют *основаниями* призмы. Остальные грани призмы называют ее *боковыми гранями*, а их объединение — *боковой поверхностью* призмы. Ребра, не лежащие в основаниях призмы, называются *боковыми ребрами*. Все боковые ребра призмы равны как отрезки параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями.

Призма, боковые ребра которой перпендикулярны плоскостям оснований, называют *прямой призмой*. Отрезок перпендикуляра к плоскостям оснований призмы, концы которого принадлежат этим плоскостям, называют *высотой* призмы. Прямая призма, основанием которой является правильный многоугольник, называется *правильной призмой*.

Площадь боковой поверхности призмы вычисляется по формуле

$$S_{бок}=P_n A_1A_2,$$

где P_n — периметр перпендикулярного сечения призмы, A_1A_2 — длина бокового ребра.

Объем наклонной призмы вычисляется по формуле

$$V=S_nA_1A_2,$$

где S_n — площадь перпендикулярного сечения призмы, A_1A_2 — длина бокового ребра, или по формуле

$$V=S_{осн}H,$$

где $S_{осн}$ — площадь основания призмы, H — высота призмы.

Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы. Все шесть граней параллелепипеда — параллелограммы.

Свойства параллелепипеда:

1) середина диагонали параллелепипеда является его центром симметрии;

2) противолежащие грани параллелепипеда попарно равны и параллельны;

3) все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся ею пополам.

Параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны плоскости основания параллелепипеда, называется *прямым*. Прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник, называется *прямоугольным*. Все грани прямоугольного параллелепипеда — прямоугольники.

Объем прямоугольного параллелепипеда вычисляется по формуле

$$V=abc,$$

где a, b, c — длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины.

Прямоугольный параллелепипед с равными ребрами называется *кубом*. Все грани куба — равные квадраты. Объем куба вычисляется по формуле

$$V=a^3.$$

Пример 1.1. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы высотой h, если прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости основания под углом α.

Решение. Пусть $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, в основании которой лежат правильные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, OO_1 — высота ($OO_1=h$), M — середина отрезка B_1C_1, O и O_1 — центры треугольников верхнего и нижнего оснований (рис. 13.1). Рассмотрим треугольник O_1OM. По условию задачи $\widehat{OMO_1}=\alpha$, угол OO_1M прямой, $OO_1=h$.

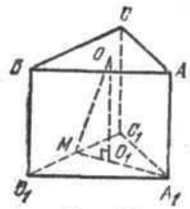


Рис. 13.1

Из прямоугольного треугольника O_1OM находим $O_1M=h\operatorname{ctg}\alpha$. Так как O_1 — центр треугольника $A_1B_1C_1$, то $A_1M=3O_1M=3h\operatorname{ctg}\alpha$. По условию задачи треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний и A_1M — высота, медиана и биссектриса. По высоте треугольника A_1M находим сторону $A_1B_1=\dfrac{3h\operatorname{ctg}\alpha}{\sin 60^\circ}=2\sqrt{3}\ h\operatorname{ctg}\alpha$. Площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна произведению периметра основания на высоту призмы:

$$S=3\cdot A_1B_1\cdot h=6\sqrt{3}\ h^2\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ответ. $6\sqrt{3}\ h^2\operatorname{ctg}\alpha$.

1.1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти угол между диагональю A_1C и ребром A_1D_1.

1.2. Расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных боковых граней куба равно d. Найти его объем.

1.3. Определить объем параллелепипеда, если все его грани — ромбы, длины сторон которых равны a и острые углы равны α.

1.4. Определить объем правильной четырехугольной призмы, если диагональ образует с боковой гранью угол α, а сторона основания равна b.

1.5. Непересекающиеся диагонали двух смежных боковых граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости его основания под углами α и β. Найти угол между этими диагоналями.

1.6. В наклонной треугольной призме длины боковых ребер равны 8 см; стороны перпендикулярного сечения относятся, как 9 : 10 : 17, а его площадь равна 144 см². Найти боковую поверхность этой призмы.

1.7. В прямоугольном параллелепипеде угол между диагональю основания и его стороной равен α. Диагональ параллелепипеда равна d и образует с плоскостью основания угол φ. Найти боковую поверхность параллелепипеда.

1.8. В основании четырехугольной призмы лежит ромб со стороной a и острым углом α, а боковые ребра призмы равны b и наклонены к плоскости основания призмы под углом β. Найти объем призмы.

1.9. Углы, образуемые диагональю прямоугольного параллелепипеда с его гранями, пересекающимися в одной из его вершин, равны α, β, γ. Доказать, что

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1.$$

Пирамида. Многогранник, одна из граней которого — произвольный многоугольник, а остальные грани — треугольники, имеющие одну общую вершину, называется *пирамидой*. Многоугольник называется *основанием* пирамиды, а остальные грани (треугольники) называются *боковыми гранями* пирамиды.

Стороны граней пирамиды называются *ребрами* пирамиды. Ребра, принадлежащие основанию пирамиды, называют *ребрами основания*, а все остальные ребра — *боковыми ребрами*. Общая вершина всех треугольников (боковых граней) называется *вершиной* пирамиды.

Высотой пирамиды называется отрезок перпендикуляра, проведенного из вершины пирамиды к плоскости основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра).

Правильная пирамида. Пирамида называется *правильной*, если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а ортогональная проекция вершины пирамиды совпадает с центром многоугольника, лежащего в основании пирамиды. Все боковые ребра правильной пирамиды равны между собой; все боковые грани — равные равнобедренные треугольники. Высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины, называется *апофемой* этой пирамиды.

Треугольная пирамида, в основании которой лежит треугольник, называется *тетраэдром*. Тетраэдр называется *правильным*, если все его ребра равны.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} Ph,$$

где P — периметр пирамиды, h — апофема.

Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} SH,$$

где S — площадь основания пирамиды, H — высота пирамиды.

Усеченная пирамида. Многогранник, вершинами которого служат вершины основания пирамиды и вершины ее сечения плоскостью, параллельной основанию пирамиды, называется *усеченной пирамидой*. Основания усеченной пирамиды — гомотетичные многоугольники. Центр гомотетии — вершина пирамиды. Перпендикуляр к плоскости оснований, с концами на плоскостях оснований пирамиды, называется *высотой* усеченной пирамиды. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.

Усеченная пирамида называется *правильной*, если она является частью правильной пирамиды. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные равнобедренные трапеции. Высота каждой из этих трапеций называется *апофемой* правильной усеченной пирамиды.

Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}(P + p)\,h,$$

где P, p — периметры оснований пирамиды, h — апофема.

Объем усеченной пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} H \left(S_1 + \sqrt{S_1S_2} + S_2\right),$$

где H — высота усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади ее оснований.

Пример 1.2. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник, равные стороны которого равны b, а угол между ними равен α. Найти объем пирамиды, если каждое из боковых ребер пирамиды образует с высотой пирамиды угол φ.

Решение. Пусть $SABC$ — данная пирамида, SO — высота пирамиды, $AB = AC$, $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{ASO} = \widehat{BSO} = \widehat{CSO} = \varphi$ (рис. 13.2). Рассмотрим треугольники ASO, BSO, CSO. Все эти треугольника прямоугольные (SO — высота пирамиды, перпендикулярная плоскости треугольника ABC, и, следовательно, SO перпендикулярна прямым AO, BO, CO, принадлежащим плоскости треугольника ABC), SO—общая сторона этих треугольников, а углы при вершине S равны φ по условию. Следовательно, все эти треугольники равны между собой и против равных углов этих треугольников лежат равные стороны: $AO = BO = CO$. Таким образом, оказывается, что точка O — точка, равноудаленная от всех вершин треугольника ABC, — является центром окружности, описанной около треугольника ABC.

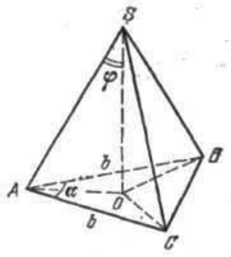


Рис. 13.2

В равнобедренном треугольнике ABC известны боковая сторона $AB = b$ и угол α при вершине A. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $b\Big/\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$. В прямоугольном треугольнике ASO теперь известны катет $|AO| = b\Big/\left(2\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)$ и острый угол при вершине S, равный φ. Находим второй катет SO, который является высотой пирамиды:

$$SO = AO \operatorname{ctg}\varphi = \frac{b}{2\cos(\alpha/2)} \operatorname{ctg}\varphi.$$

Теперь найдем объем пирамиды $SABC$:

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} SO = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} b^2 \sin\alpha \,\frac{b}{2\cos(\alpha/2)} \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{6} b^3 \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\varphi.$$

Ответ. $\dfrac{1}{6} b^3 \sin\dfrac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\varphi$.

1.10. Определить объем правильной треугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l и наклонено к плоскости основания под углом α.

1.11. Определить полную поверхность правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при основании боковой грани равен α, а радиус вписанной в основание окружности равен r.

1.12. Боковые грани треугольной пирамиды — прямоугольные треугольники, а боковые ребра равны a. Найти угол между боковым ребром и высотой. Вычислить объем пирамиды.

1.13. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной b. Боковые грани образуют с основанием двугранные углы, равные α. Найти высоту пирамиды.

1.14. В правильной треугольной пирамиде высота равна H, а двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объем пирамиды.

1.15. Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная плоский угол α при вершине и расстояние a от боковой грани до противоположной вершины.

1.16. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a, угол между боковыми гранями равен 2φ. Найти длину стороны основания.

1.17. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Каждая из боковых граней пирамиды наклонена к основанию под углом β. Найти боковую поверхность пирамиды.

1.18. Стороны основания треугольной пирамиды равны a, b и c. Все плоские углы при ее вершине прямые. Вычислить объем пирамиды.

1.19. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Из трех плоских углов, образованных при вершине пирамиды этими ребрами, два равны α, а третий равен β. Найти объем пирамиды.

1.20. Двугранный угол при основании правильной треугольной пирамиды равен α. Найти двугранный угол между боковыми гранями.

Указание. В этой и следующей задачах ввести вспомогательный параметр a — длину ребра пирамиды.

1.21. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

1.22. Ребра оснований правильной усеченной треугольной пирамиды равны соответственно a и b. Найти высоту пирамиды, если все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α.

1.23. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA перпендикулярно плоскости грани ABC, двугранный угол с ребром SC равен $\pi/4$, $SA = BC = a$ и $\angle ABC = \pi/2$. Найти длину ребра AB.

1.24. Все грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, а высота пирамиды совпадает с высотой одной из ее боковых граней. Найти объем пирамиды, если расстояние между наибольшими противоположными ребрами равно единице.

1.25. Найти объем тетраэдра, у которого каждая грань — треугольник со сторонами a, b, c, где a, b, c — различные числа.

Пример 1.3. В основании пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна Q. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания углы α и β. Найти объем пирамиды.

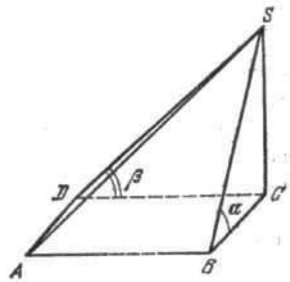


Рис. 13.3

Решение. Пусть $SABCD$ — данная пирамида, в основании которой лежит прямоугольник $ABCD$ площадью Q (рис. 13.3). Так как все боковые грани пирамиды имеют одну общую точку S (вершина пирамиды), то перпендикулярными основанию пирамиды могут быть лишь смежные боковые грани (на рис. 13.3 — грани BSC и DSC). Далее, так как грани BSC и DSC перпендикулярны плоскости основания и имеют общую точку S, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку и перпендикулярной плоскости основания, откуда следует, что высота пирамиды совпадает с боковым ребром SC.

Так как основание пирамиды — прямоугольник, то прямая AD перпендикулярна прямой DC, прямая AB перпендикулярна прямой BC и обе эти прямые (AD и BC) перпендикулярны высоте пирамиды SC. Отрезки DC и BC являются ортогональными проекциями отрезков DS и BS на плоскость основания пирамиды, и по теореме о трех перпендикулярах $AB \perp BS$ и $AD \perp DS$. Таким образом, оказывается, что $\angle SBC$ является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями $ABCD$ и ASB, а $\angle SDC$ — линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями $ABCD$ и ASD. По условию задачи один из этих углов (например, $\angle SBC$) равен α, а другой ($\angle SDC$) равен β.

Пусть $BC = x$, а $DC = y$. Из прямоугольного треугольника BSC находим $SC = x \operatorname{tg} \alpha$, а из прямоугольного треугольника DSC находим $SC = y \operatorname{tg} \beta$. Отсюда следует, что

$$x \operatorname{tg} \alpha = y \operatorname{tg} \beta,$$

а в силу условия задачи $xy = Q$.

Из полученных уравнений находим $y = \sqrt{Q \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \beta}$, и, следовательно,

$$SC = y \operatorname{tg} \beta = \sqrt{Q \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Нетрудно проверить, что если положить $\widehat{SBC} = \beta$, $\widehat{SDC} = \alpha$, то по-прежнему высота пирамиды SC будет определяться тем же самым выражением. Найдем объем пирамиды V_{SABCD}:

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} SC = \frac{1}{3} Q \sqrt{Q \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Ответ. $\frac{1}{3} Q \sqrt{Q \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

1.26. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен α.

1.27. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно l, а двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен β.

1.28. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб, большая диагональ которого равна d, а острый угол равен α. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найти боковую поверхность пирамиды.

1.29. Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α, а высота — h. Определить объем пирамиды.

1.30. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H, объем равен V. Найти боковую поверхность Q.

1.31. В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Найти угол между противоположными боковыми ребрами.

1.32. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен 2α. Найти двугранный угол при основании.

1.33. Основанием пирамиды служит прямоугольник, две боковые грани ее перпендикулярны плоскости основания, две другие боковые грани образуют с основанием углы α и β соответственно. Определить объем пирамиды, если длина наибольшего из боковых ребер равна l.

1.34. В четырехугольной пирамиде $SABCD$ плоскости боковых граней SAB, SBC, SCD, SAD образуют с плоскостью основания углы, равные соответственно 60°, 90°, 45°, 90°. Основание $ABCD$ — равнобочная трапеция; $AB = 2$, площадь основания равна 2. Найти площадь поверхности пирамиды.

1.35. Найти объем и боковую поверхность правильной шестиугольной пирамиды, если даны боковое ребро l и диаметр d круга, вписанного в основание пирамиды.

1.36. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.

1.37. Двугранный угол при боковом ребре правильной шестиугольной пирамиды равен φ. Определить плоский угол при вершине пирамиды.

1.38. Найти объем правильной пирамиды, в основании которой лежит правильный пятиугольник, а боковыми гранями являются правильные треугольники со стороной a.

1.39. В правильной n-угольной пирамиде боковые грани наклонены к плоскости основания под углом α. Под каким углом наклонены к плоскости основания боковые ребра пирамиды?

1.40. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен α. Найти двугранный угол θ между двумя смежными боковыми гранями.

1.41. Найти объем правильной усеченной четырехугольной пирамиды, у которой сторона меньшего основания равна b, большего основания равна a, а угол наклона боковой грани к плоскости большего основания равен 60°.

§ 2. Сечения многогранников

Построить сечение многогранника плоскостью — это значит указать точки пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника и соединить эти точки отрезками, принадлежащими граням многогранника. Точки пересечения плоскости сечения с ребрами многогранника будут вершинами, а отрезки, принадлежащие граням, — сторонами многоугольника, получающегося в сечении многогранника плоскостью.

Для построения сечения многогранника плоскостью нужно в плоскости каждой пересекаемой грани многогранника указать две точки, принадлежащие сечению, соединить их прямой и найти точки пересечения этой прямой с ребрами многогранника. Плоскость сечения многогранника может задаваться разными условиями. Рассмотрим несколько простейших типичных способов задания сечений куба.

Пример 2.1. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a плоскостью, проходящей через середины ребер AB, BC и CC_1.

Решение. Две точки M и N (середины ребер AB и BC соответственно) (рис. 13.4), принадлежащие сечению, лежат на

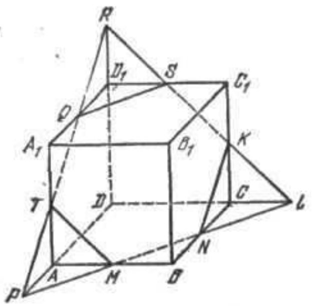


Рис. 13.4

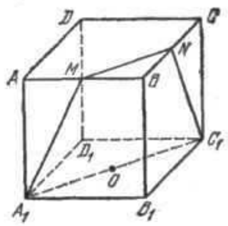


Рис. 13.5

одной грани. Проведем прямую через точки M и N до пересечения с продолжениями ребер AD и DC соответственно в точках P и L. Из треугольников MBN и NLC нетрудно найти, что

$$LC = NC = a/2.$$

Точки L и K (середина ребра CC_1) лежат в плоскости грани DD_1C_1C. Проводим прямую через точки L и K. Учитывая, что $CK = a/2$, из треугольников LCK и KC_1S находим $SC_1 = a/2$, т. е. точка S лежит на середине ребра D_1C_1. Прямая LK пересечет продолжение ребра DD_1 в точке R. Аналогично предыдущему можно показать, что $D_1R = a/2$. Так как точки P и R лежат в плоскости грани A_1ADD_1, то прямая PR пересечет стороны квадрата A_1ADD_1 в точках T и Q, причем точка T — середина ребра AA_1, а точка Q — середина ребра A_1D_1.

Итак, получены шесть точек (M, N, K, S, Q и T), принадлежащих плоскости сечения и лежащих на гранях куба. Соединяя пары точек M и T, N и K, S и Q, получаем искомый шестиугольник сечения.

Пример 2.2. Построить сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через середины ребер AB и BC и центр квадрата $A_1B_1C_1D_1$.

Решение. В данной задаче две точки M и N (рис. 13.5) принадлежат верхней грани, а третья точка O принадлежит параллельной ей грани нижнего основания. Нетрудно убедиться, что в данной задаче построение сечения методом, описанным в предыдущей задаче, не приводит к цели. Так же обстоит дело в задачах, в которых прямая, соединяющая две данные точки сечения, оказывается параллельной ребру многогранника или все три точки искомого сечения принадлежат скрещивающимся ребрам многогранника. В этих случаях при построении сечения используются следующие теоремы.

1. Если две плоскости параллельны и пересекаются третьей плоскостью, то линии пересечения параллельных плоскостей третьей плоскостью параллельны между собой.

2. Если две пересекающиеся плоскости параллельны одной и той же прямой, то линия их пересечения параллельна этой прямой.

3. Если плоскость и прямая параллельны и через прямую проведена плоскость, пересекающая данную, то линия пересечения этих плоскостей параллельна данной прямой.

Искомая плоскость сечения проходит через точку O и прямую MN, параллельную плоскости $A_1B_1C_1D_1$. По теореме 3 плоскость сечения пересечет плоскость грани $A_1B_1C_1D_1$ по прямой, параллельной прямой MN. Так как прямая MN параллельна прямой AC (как средняя линия треугольника ABC), а $AC \parallel A_1C_1$, то линией пересечения плоскости сечения и плоскости грани $A_1B_1C_1D_1$ будет диагональ квадрата A_1C_1. Точки A_1 и M принадлежат грани A_1ABB_1, а точки N и C_1 принадлежат грани BCC_1B_1, и, следовательно, в сечении куба плоскостью будет получаться четырехугольник A_1MNC_1.

В двух рассмотренных выше примерах точки, задающие сечение, принадлежали поверхности куба. Однако существуют задачи, в которых точки, задающие сечения, принадлежат разным граням или же одна из точек лежит внутри многогранника. В этих случаях для решения задач необходимо сделать дополнительные построения, позволяющие свести решение задачи к описанной выше схеме построения сечения. Часто для этого строят вспомогательную плоскость, содержащую какую-либо прямую, принадлежащую плоскости сечения, и какую-либо прямую, принадлежащую плоскости грани. В построенной вспомогательной плоскости отыскивается точка пересечения этих прямых и тем самым находится еще одна точка, лежащая уже в плоскости боковой грани.

Пример 2.3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Найти площадь сечения куба плоскостью P, проходящей через центр куба и середины ребер AB и BC, если ребро куба равно единице.

Решение. Пусть M и N — середины ребер AB и BC соответственно (рис. 13.6). Плоскость P проходит через точки M и N и, следовательно, пересекает грань $ABCD$ по прямой MN. Для того чтобы построить сечение куба плоскостью P, построим вспомогательное сечение куба диагональной плоскостью Q, проходящей через вершины куба B, D, D_1, B_1. Диагональное сечение куба представляет собой прямоугольник со сторонами $BB_1 = 1$ и $BD = \sqrt{2}$. Плоскости P и Q пересекутся по прямой, проходящей через точку L и точку O (центр куба), которая также принадлежит плоскости Q, причем $BL = \frac{1}{4} BD$. Используя равенство треугольников LRO и L_1R_1O, нетрудно доказать, что $L_1D_1 = \frac{1}{4} B_1D_1$. Таким образом, доказано, что плоскость P проходит через точку L_1, принадлежащую верхнему основанию куба, и $L_1D_1 = \frac{1}{4} B_1D_1$.

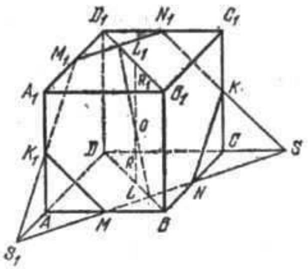


Рис. 13.6

Так как плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны и плоскость P пересекает обе эти плоскости, то линии пересечения этих плоскостей плоскостью P параллельны между собой. Проводя прямую M_1N_1 через точку L_1 параллельно диагонали A_1C_1, получаем две точки (M_1 и N_1), принадлежащие плоскости сечения P и ребрам куба, причем M_1N_1 — средняя линия треугольника $A_1C_1D_1$, $M_1N_1 = \frac{1}{2} A_1C_1$ и $D_1N_1 = N_1C_1$.

Продолжим ребро DC за точку C. Так как прямые MN и DC принадлежат плоскости нижнего основания куба и непараллельны, то они пересекутся в некоторой точке S. Из равенства треугольников MBN и NSC следует, что $SC = MB$. С другой стороны, точка S, принадлежащая плоскости P, принадлежит также грани куба DCC_1D_1. Таким образом, получены две точки (S и N_1), принадлежащие как плоскости P, так и плоскости грани DCC_1D_1. Прямая, проходящая через точки S и N_1, пересечет ребро куба CC_1 в точке K. Из равенства равнобедренных треугольников CSK и KN_1C_1 следует, что $SC = CK = KC_1 = N_1C_1$. Соединяя точки N и K, принадлежащие плоскости P и плоскости грани BCC_1B_1, получаем еще одну сторону многоугольника сечения.

Аналогично, продолжая ребро куба AD за точку A, получаем точку S_1 — точку пересечения прямых MN и AD. Далее, соединяя точки S_1 и M_1, получаем точку K_1 — точку пересечения плоскости P с ребром AA_1, причем $A_1K_1 = A_1M_1 = AK_1$.

Итак, в сечении куба плоскостью P получен шестиугольник $MNKN_1M_1K_1$. Из равенства треугольников MBN, NCK, KC_1N_1, $N_1D_1M_1$, $M_1A_1K_1$, K_1AM следует, что стороны этого шестиугольника равны и длина его стороны равна $\sqrt{2}/2$. Так как треугольники NCS, SCK, NCK равны (все они прямоугольные и $NC = CS = CN$, то треугольник NSK равносторонний, $\widehat{SNK} = 60°$, и, следовательно, $\widehat{MNK} = 120°$. Аналогично можно доказать, что все остальные углы шестиугольника $MNKN_1M_1K_1$ равны 120°, и, следовательно, этот шестиугольник правильный. Площадь правильного шестиугольника со стороной $\sqrt{2}/2$ равна $3\sqrt{3}/4$.

Ответ. $3\sqrt{3}/4$.

Для нахождения площади сечения многогранника в ряде случаев также удобно использовать свойство ортогональной проекции плоского многоугольника:

$$s = S \cos \alpha,$$

где S — площадь многоугольника, s — площадь его ортогональной проекции на некоторую плоскость P, α — угол между плоскостью многоугольника и плоскостью P.

2.1. Через середину диагонали куба перпендикулярно ей проведена плоскость. Определить площадь фигуры, получившейся в сечении куба этой плоскостью, если ребро куба равно a.

2.2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) через середины ребер DD_1 и D_1C_1 и вершину A проведена плоскость. Найти угол между этой плоскостью и гранью $ABCD$.

2.3. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) плоскость P проходит через диагональ A_1C_1 и середину ребра DD_1. Найти расстояние от середины ребра CD до плоскости P, если ребро куба равно 4.

2.4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). Найти расстояние от вершины A до плоскости, проходящей через вершины A_1, B, D, если ребро куба равно a.

2.5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$). На продолжениях ребер AB и BB_1 взяты точки M и N соответственно так, что $AM = B_1N = \frac{1}{2} AB$ $\left(BM = BN = \frac{3}{2} AB\right)$. Где на ребре CC_1 должна находиться точка P для того, чтобы в сечении куба плоскостью, проведенной через точки M, N и P, получился пятиугольник?

2.6. Пусть M и N — середины ребер AA_1 и CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а на продолжении ребра D_1D за точку D взята такая точка P, что $DP = 1/2$ м. Через M, N и P проведена плоскость. Найти площадь сечения, если ребро куба равно 1 м.

2.7. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ ($KK_1 \| LL_1 \| MM_1 \| NN_1$) равна 1. На ребре MM_1 взята точка A так, что длина отрезка AM равна 3/5. На ребре K_1N_1 взята точка B так, что длина отрезка K_1B равна 1/3. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Точка P — проекция вершины N на плоскость α. Найти длину отрезка BP.

2.8. На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка F так, что $B_1F = \frac{1}{3} BB_1$, на ребре C_1D_1 — точка E так, что $D_1E = \frac{1}{3} C_1D_1$. Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{AP}{PQ}$, где точка P лежит на луче DE, а точка Q — на прямой A_1F?

Пример 2.4. Высота прямой призмы равна 1. В основании лежит ромб со стороной, равной 2, и острым углом 30°. Через сторону основания проведена секущая плоскость с углом наклона к плоскости основания 60°. Найти площадь сечения.

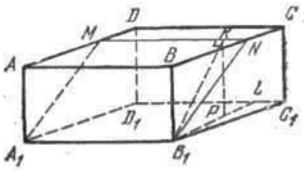


Рис. 13.7

Решение. Пусть призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данная призма (см. рис. 13.7) и секущая плоскость проходит через ребро основания A_1B_1, $A_1B_1 = 2$, $\widehat{B_1A_1D_1} = 30°$, $AA_1 = 1$. В зависимости от линейных размеров призмы плоскость сечения, проходящая через ребро A_1B_1, пересекает либо боковую грань призмы DCC_1D_1, либо грань верхнего основания $ABCD$. Предположим (а потом и докажем), что плоскость сечения пересекает грань основания $ABCD$ по прямой MN. Прямая MN будет параллельна ребру A_1B_1 (плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, и, следовательно, линии пересечения этих двух плоскостей третьей — секущей плоскостью — будут параллельны между собой), и $MN = AB = A_1B_1$. Из точки B_1 проведем перпендикуляр B_1K к прямой A_1B_1, принадлежащий плоскости A_1MNB_1, и перпендикуляр B_1L к прямой A_1B_1, принадлежащий плоскости $A_1B_1C_1D_1$. По построению угол KB_1L — линейный угол двугранного угла, образованного секущей плоскостью и плоскостью основания. По условию задачи $\widehat{KB_1L} = 60°$.

Опустим из точки K перпендикуляр KP на плоскость $A_1B_1C_1D_1$. По теореме о трех перпендикулярах точка P будет принадлежать прямой B_1L. Рассмотрим треугольник B_1KP. Этот треугольник прямоугольный (угол P прямой), а $KP = 1$ (KP — высота прямой призмы), и $\widehat{KB_1P} = 60°$. Из треугольника B_1KP находим

$$B_1K = 2/\sqrt{3}, \quad B_1P = 1/\sqrt{3}.$$

Рассмотрим четырехугольник A_1MNB_1. Как было показано выше, $A_1B_1 \| MN$ и $A_1B_1 = MN = 2$. Четырехугольник, у которого противоположные стороны равны и параллельны, — параллелограмм. Отрезок B_1K — высота параллелограмма A_1MNB_1, так как по построению $B_1K \perp A_1B_1$. Площадь параллелограмма:

$$S_{A_1MNB_1} = A_1B_1 \cdot B_1K = 4/\sqrt{3}.$$

Теперь осталось доказать, что плоскость сечения действительно пересекает верхнее основание призмы, а не ее боковую грань. По условию задачи в основании призмы лежит ромб со стороной, равной 2, и острым углом 30°. Из прямоугольного треугольника B_1C_1L, у которого $B_1C_1 = 2$ и $\widehat{B_1C_1L} = 30°$, находим высоту ромба: $B_1L = 1$.

Допустим, что секущая плоскость пересекает боковую грань DCC_1D_1 по прямой MN. Построив линейный угол двугранного угла с ребром A_1B_1, получаем треугольник B_1KL, причем точка K лежит на боковой грани и отрезок KL — часть высоты призмы, т. е. $KL < 1$. Однако из треугольника B_1KL находим, что $KL = \sqrt{3} > 1$. Установленное противоречие доказывает, что секущая плоскость не может пересекаться с боковой гранью DCC_1D_1.

В заключение следует заметить, что величина острого угла ромба понадобилась нам лишь при доказательстве, что плоскость сечения пересекает верхнее основание призмы, а не ее боковую грань, и никак не была использована при нахождении площади сечения. Можно рассмотреть более общую задачу, полагая, что острый угол ромба равен α. В этом случае площадь сечения будет равна $4/\sqrt{3}$ для всех углов α, удовлетворяющих неравенству $\sin\alpha \geqslant 1/(2\sqrt{3})$.

Ответ. $4/\sqrt{3}$.

2.9. Через вершины A, C и D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол 60°. Стороны основания параллелепипеда равны 4 и 3. Найти объем параллелепипеда.

2.10. Высота правильной треугольной призмы равна H. Плоскость, проведенная через среднюю линию нижнего основания и параллельную ей сторону верхнего основания, составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения.

2.11. Основанием прямой призмы служит равнобочная трапеция с основаниями a и b $(a > b)$ и острым углом α. Плоскость, проходящая через большее основание верхней трапеции и меньшее основание нижней трапеции, образует с плоскостью нижнего основания угол β. Найти объем призмы.

2.12. В правильной четырехугольной призме через сторону основания проведено сечение под углом α к плоскости основания. Найти угол между диагональю и стороной основания.

2.13. В правильной треугольной призме через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания двугранный угол 45°. Площадь сечения равна S. Найти объем призмы.

2.14. Через вершину правильной четырехугольной призмы проведена плоскость так, что в сечении образовался ромб с острым углом α. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости основания призмы.

2.15. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна a. Через диагональ нижнего основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, пересекающая две смежные боковые грани призмы по прямым, угол между которыми равен α. Определить объем призмы.

2.16. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом 30°. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол в 45°. Найти объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

2.17. Высота прямой призмы 1 м, ее основанием служит ромб со стороной 2 м и острым углом 30°. Через сторону основания проведена секущая плоскость, наклоненная к плоскости основания под углом 60°. Найти площадь сечения.

2.18. В основании прямой треугольной призмы лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при основании α. Через основание этого треугольника внутри призмы под углом φ проведена плоскость. Определить площадь сечения, зная, что в сечении получается треугольник.

2.19. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Через одну из сторон основания и противоположную вершину проведена плоскость под углом φ к плоскости основания. Площадь сечения равна S. Найти объем призмы.

2.20. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно l. В основании призмы лежит правильный треугольник со стороной b, а прямая, проходящая через вершину B_1 и центр основания ABC, перпендикулярна основаниям. Найти площадь сечения, проходящего через ребро BC и середину ребра AA_1.

2.21. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы равно 1. Найти площадь сечения, проходящего через сторону основания и бóльшую диагональ призмы.

2.22. Боковое ребро прямой призмы равно a. В основании ее лежит прямоугольный треугольник, меньший из углов которого равен α. Через меньший катет основания и середину противолежащего бокового ребра проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол β. Найти площадь сечения.

2.23. Сечение, проведенное через сторону a основания правильной треугольной призмы под углом α к нему, делит боковое ребро на части в отношении $m:n$, считая от верхнего основания. Определить объемы образовавшихся частей и площадь сечения.

2.24. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с катетами $AB = BC = 1$. Через середины ребер AB и BC и точку P, лежащую на продолжении ребра BB_1 за точку B, проведена плоскость. Найти площадь полученного сечения, если $BP = 1/2$ и $BB_1 = 1$.

2.25. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с площадью основания S и высотой h. Через вершину A_1 верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена секущая плоскость, пересекающая боковое ребро BB_1 в точке B_2, боковое ребро CC_1 в точке C_2 и боковое ребро DD_1 в точке D_2. Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $CC_2 = c$.

2.26. Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ (AA_1, BB_1, CC_1 — боковые ребра), у которой $AC = 6$, $AA_1 = 8$. Через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти, в каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если известно, что $BM = MB_1$, а AN является биссектрисой угла CAC_1.

2.27. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — основания, $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$) даны длины ребер: $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$. Пусть O — центр основания $ABCD$, O_1 — центр основания $A_1B_1C_1D_1$, а S — точка, делящая отрезок OO_1 в отношении $1:3$, т. е. $O_1S:SO = 1:3$.

Найти площадь сечения данного параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку S параллельно диагонали параллелепипеда AC_1 и диагонали его основания BD.

2.28. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найти наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

Пример 2.5. В правильной четырехугольной пирамиде через сторону основания a проведена секущая плоскость, делящая пополам двугранный угол α при основании пирамиды. Найти площадь сечения.

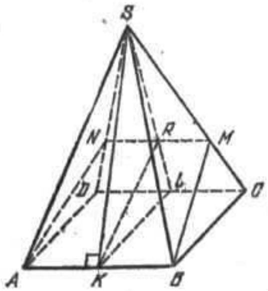


Рис. 13.8

Решение. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида с вершиной S (рис. 13.8), а плоскость сечения проходит через ребро основания AB. По условию задачи данная пирамида правильная, и в основании ее лежит квадрат ($AB \parallel DC$); следовательно, сторона основания AB параллельна плоскости DSC. Плоскость сечения $ABMN$, проходящая через прямую AB, пересекает плоскость боковой грани DSC по прямой, параллельной прямой AB ($MN \parallel AB$). Следовательно, четырехугольник $ANMB$ — трапеция.

Построим вспомогательную секущую плоскость, проходящую через середину ребра AB (точку K), середину ребра DC (точку L) и вершину пирамиды S. Плоскость KSL пересечет боковые грани пирамиды по апофемам, причем $SK \perp AB$, $KL \perp AB$, и, следовательно, угол SKL — линейный угол двугранного угла с ребром AB, равный α. По условию задачи $\widehat{SKR} = \widehat{RKL}$ и эти углы равны $\alpha/2$.

Рассмотрим треугольник KSL, в котором $\widehat{SKL} = \widehat{SLK} = \alpha$, $KL = a$, KR — биссектриса угла SKL. По теореме синусов найдем боковую сторону равнобедренного треугольника KSL:

$$\frac{KS}{\sin\alpha} = \frac{KL}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} \Rightarrow KS = \frac{a}{2\cos\alpha}.$$

Найдем отрезки, на которые точка R разбивает сторону SL. Обозначим $SR = x$. Тогда

$$RL = \frac{a}{2\cos\alpha} - x.$$

По свойству биссектрисы

$$\frac{SR}{KS} = \frac{RL}{KL} \Rightarrow \frac{x}{\frac{a}{2\cos\alpha}} = \frac{\frac{a}{2\cos\alpha} - x}{a} \Rightarrow SR = x = \frac{a}{2\cos\alpha\,(2\cos\alpha + 1)}.$$

Из треугольника KSR по теореме синусов найдем длину биссектрисы KR:

$$KR = \frac{a\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}}.$$

Так как $KR \perp AB$, то KR является высотой трапеции $ABNM$, у которой по условию известно основание AB, равное a. Для нахождения второго основания (MN) рассмотрим треугольник DSC и подобный ему треугольник MSN ($MN \parallel DC$). Так как пирамида $SABCD$ правильная, то апофема боковой грани SL является высотой треугольника DSC, а отрезок апофемы SR — высотой треугольника MSN. В подобных треугольниках стороны пропорциональны опущенным на них высотам:

$$\frac{MN}{SR} = \frac{DC}{SL} \Rightarrow \frac{MN}{\frac{a}{2\cos\alpha\,(2\cos\alpha+1)}} = \frac{a}{\frac{a}{2\cos\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MN\,(2\cos\alpha + 1) = a \Rightarrow MN = \frac{a}{2\cos\alpha + 1}.$$

Площадь трапеции $ABNM$ равна

$$S_{ABNM} = \frac{AB + MN}{2}\,KR = \frac{a + \frac{a}{2\cos\alpha+1}}{2}\,\frac{a\sin\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2a^2(\cos\alpha + 1)\sin\alpha}{2(2\cos\alpha+1)\sin\frac{3\alpha}{2}} = \frac{4a^2\cos^3\frac{\alpha}{2}}{(1 + 2\cos\alpha)^2}.$$

Ответ. $\dfrac{4a^2\cos^3\frac{\alpha}{2}}{(1+2\cos\alpha)^2}$.

2.29. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и наклонено к плоскости основания под углом α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания и через среднюю линию противоположной боковой грани.

2.30. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$; $AB = a$, а двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями, равен α. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A и биссектрису угла SBA.

2.31. Дана правильная треугольная пирамида с длиной бокового ребра a и плоским углом α при вершине. Найти площадь сечения, проходящего через сторону основания AB и перпендикулярного боковому ребру SC.

2.32. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро равно b. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через центр основания и параллельной двум непересекающимся ребрам пирамиды.

2.33. Дана правильная треугольная пирамида с боковым ребром l. Через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра проведена плоскость, составляющая угол α с плоскостью основания. Найти площадь сечения.

2.34. В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна a, а боковое ребро — $2a$, через середину бокового ребра перпендикулярно ему проведена плоскость. Определить площадь сечения.

2.35. Боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды равно стороне меньшего основания и равно a. Угол между боковым ребром и стороной большего основания равен α. Найти площадь диагонального сечения усеченной пирамиды.

2.36. Площадь сечения правильного тетраэдра имеет форму квадрата и равна m^2. Найти поверхность тетраэдра.

2.37. Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объем отсеченной пирамиды, если сторона основания исходной пирамиды равна a, а двугранный угол при основании равен 45°.

2.38. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ плоскость, проходящая через сторону AC и перпендикулярная ребру SB, отсекает пирамиду S_1ABC, объем которой в полтора раза меньше объема пирамиды $SABC$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды $SABC$, если $AC = a$.

2.39. Прямая призма имеет основанием равносторонний треугольник. Плоскость, проведенная через одну из его сторон под углом α к основанию, отсекает от призмы треугольную пирамиду объемом v. Найти площадь сечения.

2.40. В треугольной пирамиде $SABC$ на стороне AC взята точка D так, что $AC = 3DC$; на стороне BC взята точка E так, что $BC = 3CE$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки D и E параллельно ребру SC, если известно, что $SA = SB$, $SC = a$, $AC = BC = b$, $\widehat{ACB} = \alpha$.

2.41. В треугольной усеченной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость, параллельная противоположному боковому ребру. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся, как $1:2$?

2.42. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны. На ребре SA взята такая точка M, что $SM = MA$; на ребре SB — такая точка N, что $SN = \frac{1}{3} SB$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объема пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды $SABC$.

2.43. В правильную треугольную пирамиду с плоским углом α при вершине вписана правильная треугольная призма так, что нижнее основание призмы лежит на основании пирамиды, а верхнее основание совпадает с сечением пирамиды плоскостью, проходящей через верхнее основание призмы. Длина бокового ребра призмы равна длине стороны основания призмы. Найти отношение объемов призмы и пирамиды.

2.44. Угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ равен 60°. Через точку A проведена плоскость, перпендикулярная биссектрисе угла S треугольника BSC. В каком отношении линия пересечения этой плоскости с плоскостью BSC делит площадь грани BSC?

2.45. Дана правильная треугольная пирамида $SABC$. На продолжении ребра AB взята точка M так, что

$$AM = AB \ (MB = 2AB).$$

На ребре SB взята точка N так, что $SN = NB$. Где на апофеме SD грани SBC должна находиться точка P для того, чтобы в сечении пирамиды плоскостью, проведенной через точки M, N и P, получался треугольник?

2.46. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что

$$SK:KA = SL:LB = 2,$$

а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

2.47. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ через середины сторон основания AB и AD проведена плоскость, параллельная боковому ребру SA. Найти площадь сечения, зная сторону основания a и боковое ребро b.

2.48. Дана правильная четырехугольная пирамида с боковым ребром l. Плоскость сечения проходит через диагональ основания и середину бокового ребра и составляет с плоскостью основания угол α. Найти площадь сечения.

2.49. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 4. Через сторону CD основания проведено сечение, которое пересекает грань SAB по средней линии треугольника SAB. Площадь сечения равна 18. Найти объем пирамиды $SABCD$.

2.50. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ плоскость, проведенная через сторону AD перпендикулярно грани SBC, делит эту грань на две равновеликие части. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если $AD = a$.

2.51. Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30°. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найти отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды этой плоскостью.

2.52. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через середины ребер AB, AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

2.53. Площадь боковой грани правильной шестиугольной пирамиды равна S. Вычислить площадь сечения, проходящего через середину высоты пирамиды параллельно боковой грани.

§ 3. Фигуры вращения

Цилиндр. *Прямым круговым цилиндром* (или просто *цилиндром*) называется фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг оси, проходящей через одну из его сторон. При вращении вокруг той же оси ломаной, составленной из сторон прямоугольника, не лежащих на оси вращения, получается фигура, которая называется *поверхностью цилиндра*. Круги, полученные в результате вращения сторон, смежных со стороной, принадлежащей оси вращения, называются *основаниями цилиндра*. Радиус этих двух равных кругов называется *радиусом основания* цилиндра.

Фигура, полученная в результате вращения стороны прямоугольника, не смежной со стороной, принадлежащей оси вращения, называется *боковой поверхностью* цилиндра. Перпендикуляр к плоскостям оснований цилиндра, концы которого совпадают с центрами оснований цилиндра, называется *высотой* цилиндра.

Объем цилиндра вычисляется по формуле

$$V=\pi R^2H.$$

Площадь боковой и полной поверхности цилиндра вычисляется по формулам

$$S_{\text{бок}}=2\pi RH,$$
$$S_{\text{цил}}=2\pi RH+2\pi R^2,$$

где R — радиус основания, H — высота цилиндра.

Конус. *Прямым круговым конусом* (или просто *конусом*) называется фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника вокруг оси, содержащей его катет. Фигура, полученная при вращении вокруг той же оси ломаной, составленной из гипотенузы и катета, не принадлежащего оси вращения, называется *поверхностью конуса*. Фигура, полученная при вращении гипотенузы, называется *боковой поверхностью* конуса, а круг, полученный от вращения катета, — *основанием конуса*. Радиус этого круга называется *радиусом основания* конуса.

Катет треугольника, принадлежащий оси вращения, называется высотой конуса, гипотенуза прямоугольного треугольника — *образующей* конуса.

Объем конуса вычисляется по формуле

$$V_{\text{кон}}=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

Площадь боковой поверхности конуса вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}}=\pi RL,$$

где R — радиус основания, H — высота, L — образующая конуса.

Усеченный конус. Часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания, называется *усеченным конусом*. *Основания* усеченного конуса — гомотетичные круги с центром гомотетии в вершине конуса.

Усеченный конус можно получить в результате вращения равнобедренной трапеции вокруг ее оси симметрии.

Боковая сторона трапеции называется *образующей* усеченного конуса; круги, полученные при вращении оснований трапеции, — *основаниями* усеченного конуса.

Объем усеченного конуса вычисляется по формуле

$$V=\frac{1}{3}\pi H\left(R_1^2+R_1R_2+R_2^2\right),$$

где H — высота, R_1 и R_2 — радиусы верхнего и нижнего оснований усеченного конуса.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса вычисляется по формуле

$$S_{\text{бок}}=\pi(R_1+R_2)L,$$

где L — образующая усеченного конуса.

Шар. Множество всех точек пространства, находящихся на данном положительном расстоянии R от данной точки пространства O, называется *сферой*. Данная точка O называется *центром сферы*.

Сферу также можно определить как фигуру, полученную в результате вращения полуокружности вокруг оси, содержащей диаметр полуокружности. Отрезок OM (M — произвольная точка сферы) называется *радиусом сферы*. Отрезок, соединяющий любые две точки сферы и проходящий через ее центр, называется *диаметром сферы*. Диаметр сферы равен ее удвоенному радиусу.

Множество всех точек пространства, находящихся от данной точки O на расстоянии, не большем данного расстояния R, называется *шаром*. Шар также можно определить как фигуру, полученную в результате вращения полукруга вокруг оси, содержащей диаметр полукруга.

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

Площадь сферы радиуса R вычисляется по формуле

$$S=4\pi R^2.$$

Сечение шара плоскостью, проходящей через центр шара, называется *большим кругом*. *Касательной плоскостью* к сфере (шару) называется плоскость, имеющая со сферой единственную общую точку. Эту точку называют *точкой касания* сферы и плоскости. Для того чтобы плоскость была касательной к сфере, необходимо и достаточно, чтобы эта плоскость была перпендикулярна радиусу сферы и проходила через его конец.

Прямая, принадлежащая касательной плоскости к сфере и проходящая через точку касания, называется *прямой, касательной к сфере* (шару *)).

Пример 3.1. В цилиндре точка M, лежащая на окружности нижнего основания, и точка N, лежащая на окружности верхнего основания, соединены отрезком, проходящим через середину высоты цилиндра. Найти объем цилиндра, если длина отрезка MN равна a, а угол наклона прямой MN к плоскости основания цилиндра равен α.

Решение. Пусть OO_1 — высота цилиндра (рис. 13.9), K — точка пересечения высоты цилиндра и отрезка MN, причем по условию задачи $OK = KO_1$. Рассмотрим треугольники KON и KO_1M. Эти треугольники прямоугольные ($KO \perp ON$ и $KO_1 \perp O_1M$), углы OKN и O_1KM вертикальные, и $OK = KO_1$; следовательно, эти треугольники равны (по стороне и двум углам). Из равенства треугольников следует, что $KO_1 = OK$; $KM = KN = \frac{1}{2} MN = \frac{a}{2}$.

Радиус MO_1 основания цилиндра является проекцией отрезка MK, а угол KMO_1 — угол между прямой MN и плоскостью основания цилиндра — по условию задачи равен α. Из прямоугольного треугольника MKO_1 находим

$$MO_1 = \frac{a}{2}\cos\alpha, \quad KO_1 = \frac{a}{2}\sin\alpha = \frac{OO_1}{2}.$$

Вычислим объем цилиндра:

$$V_{\text{цил}} = S_{\text{осн}} H = \pi (MO_1)^2 \cdot OO_1 = \frac{\pi a^3}{4}\cos^2\alpha \sin\alpha.$$

Ответ. $\frac{\pi a^3}{4}\sin\alpha\cos^2\alpha$.

Пример 3.2. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен α. Через его вершину под углом β ($\beta < \alpha/2$) к оси конуса проведена плоскость. Найти угол между двумя образующими конуса, по которым проведенная плоскость пересекает его поверхность.

Решение. Пусть SO — высота конуса, MSN — секущая плоскость, образующая с высотой SO угол β, MN — хорда окружности основания (рис. 13.10). Так как по условию задачи угол при вершине осевого сечения конуса равен α, то угол между любой образующей конуса (в частности, образующими SM

*) Иногда (когда не возникает путаницы) будет употребляться как синоним сферы.

и SN) и высотой конуса равен $\alpha/2$. Рассмотрим прямоугольный треугольник MSO (угол MOS прямой). Обозначая радиус основания конуса через r, получаем

$$SM = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad SO = r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Построим угол между плоскостью SMN и высотой SO. Для этого в плоскости основания конуса из точки O на хорду MN опустим перпендикуляр OK. По свойству хорды $MK = NK$. Прямая MN перпендикулярна высоте конуса SO и прямой OK и, следовательно, перпендикулярна плоскости треугольника KSO.

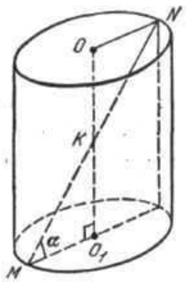


Рис. 13.9

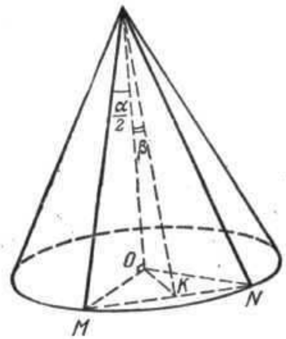


Рис. 13.10

Плоскость MSN проходит через перпендикуляр MN к плоскости KSO. Следовательно, плоскости треугольников KSN и KSO взаимно перпендикулярны, а луч SK является ортогональной проекцией луча SO на плоскость MSN. Так как по определению углом между наклонной (SO) и плоскостью (MSN) называется угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость, то угол KSO и есть угол, величина которого равна β. Из прямоугольного треугольника KSO получаем

$$SK = \frac{SO}{\cos\beta} = \frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}.$$

Как было указано выше, $KO \perp MN$ и $SO \perp MN$, и, следовательно, по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp MN$. Треугольник MSN равнобедренный ($MS = NS$), и SK — высота, медиана и биссектриса этого треугольника. Из прямоугольного треугольника MSK находим угол MSK:

$$\cos(\widehat{MSK}) = \frac{SK}{SM} = \frac{r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta\dfrac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta} \Rightarrow \widehat{MSK} = \arccos\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\right),$$

$$\widehat{MSN} = 2\widehat{MSK} = 2\arccos\left(\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\right).$$

Ответ. $2\arccos\left(\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}\right)$.

3.1. Боковая поверхность цилиндра, будучи развернута, представляет собой прямоугольник, в котором диагональ равна d и составляет угол α с основанием. Определить объем цилиндра.

3.2. Площадь сечения цилиндра плоскостью, перпендикулярной образующей, равна s_1, а площадь осевого сечения равна s_2. Найти площадь боковой поверхности и объем цилиндра.

3.3. Радиус основания конуса равен r, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен 90°. Найти объем конуса.

3.4. Боковой поверхностью конуса служит свернутая четверть круга. Определить полную поверхность конуса, если площадь его осевого сечения равна S.

3.5. Площадь боковой поверхности прямого кругового конуса равна S; расстояние от центра основания до образующей равно r. Найти объем конуса.

3.6. Площадь боковой поверхности конуса относится к площади основания, как 2 : 1. Площадь его осевого сечения равна S. Найти объем конуса.

3.7. Радиус основания конуса равен r, а площадь боковой поверхности равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найти объем конуса.

3.8. Высота конуса равна диаметру его основания. Найти отношение площади его основания к площади боковой поверхности.

3.9. Плоскость, проведенная через вершину конуса, пересекает основание по хорде, длина которой равна радиусу основания. Найти отношение объемов образовавшихся частей конуса.

3.10. Две перпендикулярные образующие прямого кругового конуса делят окружность основания в отношении 1 : 2. Найти объем конуса, если его высота равна h.

3.11. Через две образующие конуса, угол между которыми равен α, проведена плоскость. Найти отношение площади сечения к полной поверхности конуса, если угол между образующей конуса и плоскостью основания равен β.

3.12. Образующая конуса равна l и составляет угол β с высотой конуса. Найти площадь сечения этого конуса плоскостью, проходящей через его вершину и составляющей угол α с его высотой.

3.13. Через вершину конуса проведены две плоскости. Одна из них наклонена к плоскости основания конуса под углом α и пересекает основание по хорде длиной a, а другая наклонена к плоскости основания под углом β и пересекает основание по хорде длиной b. Найти объем конуса.

3.14. Площади параллельных сечений шара, расположенных по одну сторону от центра, равны S_1 и S_2, а расстояние между этими сечениями равно d. Найти площадь сечения шара, параллельного сечениям S_1 и S_2 и делящего пополам расстояние между ними.

3.15. В двугранный угол 60° вписан шар радиуса R. Найти радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол 45°.

3.16. Две равные сферы радиуса r касаются друг друга и граней двугранного угла, величина которого равна α. Найти радиус сферы, которая касается граней двугранного угла и обеих данных сфер.

3.17. Четыре равных шара радиуса r внешним образом касаются друг друга так, что каждый касается трех остальных. Найти радиус сферы, касающейся всех четырех шаров и содержащей их внутри себя.

3.18. Два шара касаются плоскости P в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами этих шаров равно 10. Третий шар касается двух данных шаров, а его центр O лежит в плоскости P. Известно, что

$$AO = OB = 2\sqrt{10}, \quad AB = 8.$$

Найти радиус третьего шара.

3.19. Три шара касаются плоскости треугольника ABC в его вершинах, и каждый шар касается двух других. Найти радиусы шаров, если длина стороны AB равна c и прилежащие к ней углы равны α и β.

3.20. На плоскости лежат, не пересекаясь, два шара радиусов r и R. Расстояние между центрами шаров равно ρ. Найти минимально возможный радиус шара, который лежал бы на этой плоскости и касался заданных шаров.

§ 4. Комбинации многогранников и фигур вращения

Призма и шар. Шар, касающийся всех граней призмы, называется *вписанным в призму*. Призма называется *вписанной в шар*, если все вершины призмы лежат на поверхности шара.

В задачах на комбинацию призмы (в частности, параллелепипеда и куба) и шара решение, как правило, необходимо начать с геометрического построения, показывающего, где находится центр шара. При нахождении центра шара, вписанного в призму, используется теорема о том, что центр шара, вписанного в призму, является точкой пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов призмы, а центр шара, описанного около призмы, является точкой пересечения всех плоскостей, проходящих через середину ребер призмы и перпендикулярных им.

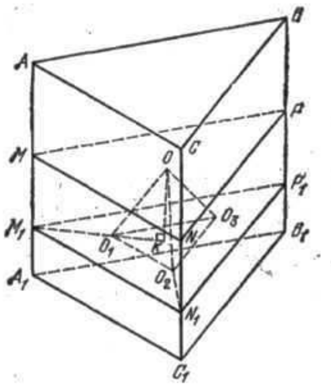


Рис. 13.11

Пример 4.1. Три шара радиуса r касаются нижнего основания правильной треугольной призмы, причем каждый шар касается двух других шаров и двух боковых граней призмы. Четвертый шар касается каждого из этих трех шаров, всех боковых граней и верхнего основания призмы. Найти высоту призмы.

Решение. Пусть O_1, O_2, O_3 — центры шаров радиуса r, ABC и $A_1B_1C_1$ — равносторонние треугольники, являющиеся соответственно верхним и нижним основаниями призмы (рис. 13.11). Так как призма $ABCA_1B_1C_1$ правильная, то ее боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 перпендикулярны плоскостям оснований и плоскости боковых граней также перпендикулярны плоскостям оснований.

Через центр шара O_1 проведем плоскость, параллельную плоскости основания призмы. В сечении призмы этой плоскостью получится равносторонний треугольник $M_1N_1P_1$ со стороной, равной стороне основания призмы. Построенная плоскость будет

перпендикулярна плоскостям боковых граней призмы, а точки O_2 и O_3 будут принадлежать этой плоскости.

Докажем, что точки касания шарами плоскостей боковых граней будут также принадлежать плоскости треугольника $M_1N_1P_1$. Из точки O_1 опустим перпендикуляр на плоскость A_1ACC_1. Так как шар касается этой плоскости, то этот перпендикуляр попадает в точку касания, и его длина равна r. С другой стороны, так как плоскости $M_1N_1P_1$ и A_1ACC_1 взаимно перпендикулярны, а точка O_1 принадлежит плоскости $M_1N_1P_1$, то перпендикуляр, опущенный из точки O_1 на плоскость A_1ACC_1, будет целиком принадлежать плоскости $M_1N_1P_1$, и, следовательно, основание перпендикуляра (на рис. 13.12 точка K) будет принадлежать линии пересечения этих взаимно перпендикулярных плоскостей (см. теорему о взаимно перпендикулярных плоскостях).

Аналогично доказывается, что точка касания шара с центром O_1 и плоскости A_1ABB_1 также принадлежат плоскости $M_1N_1P_1$ и точки касания шаров с центрами O_2 и O_3 и плоскостей боковых граней принадлежат плоскости $M_1N_1P_1$. Так как плоскость $M_1N_1P_1$ проходит через центры всех трех попарно касающихся шаров, то линии центров этих шаров (отрезки O_1O_2, O_2O_3, O_1O_3) будут принадлежать плоскости $M_1N_1P_1$. Таким образом, в сечении призмы плоскостью $M_1N_1P_1$ получится равносторонний треугольник $M_1N_1P_1$, в который вложены три окружности радиуса r, каждая из которых касается двух других окружностей и двух сторон треугольника (рис. 13.12).

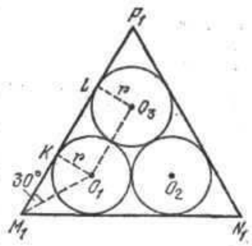


Рис. 13.12

Рассмотрим треугольник $M_1N_1P_1$. Проведем радиусы O_1K и O_3L в точки касания окружностей со стороной M_1P_1. Так как $O_1K \perp M_1P_1$, $O_3L \perp M_1P_1$ и $O_1K = O_3L = r$, то четырехугольник O_1O_3KL — прямоугольник и $KL = O_1O_3 = 2r$. Так как окружность с центром O_1 касается сторон треугольника M_1N_1 и M_1P_1, то точка O_1 лежит на биссектрисе угла $N_1M_1P_1$ и $\widehat{O_1M_1K} = 30°$. В прямоугольном треугольнике M_1O_1K известны угол $\widehat{O_1MK} = 30°$ и катет $O_1K = r$. Находим второй катет:

$$M_1K = r\sqrt{3}.$$

Аналогично из $\triangle LO_3P_1$ находим $LP_1 = r\sqrt{3}$. Таким образом, сторона треугольника $M_1N_1P_1$ равна $2r(1+\sqrt{3})$.

Через центр O четвертого шара проведем плоскость, параллельную плоскости основания призмы. В сечении призмы этой плоскостью получится равносторонний треугольник MNP (рис. 13.13), а в сечении шара с центром O получится окружность большого диаметра, вписанная в треугольник MNP (точки касания шара с центром O с плоскостями боковых граней принадлежат плоскости MNP, что доказывается так же, как и в случае построения сечения $M_1N_1P_1$). Так как плоскости треугольников $M_1N_1P_1$ и MNP параллельны, то треугольники $M_1N_1P_1$ и MNP равны, и, следовательно, сторона треугольника MNP равна $2r(1+\sqrt{3})$. Радиус окружности, вписанной в треугольник MNP, а следовательно, и радиус шара с центром O равны $r\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

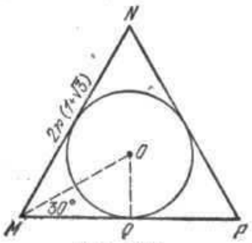


Рис. 13.13

Искомая высота призмы складывается из расстояния от верхнего основания до плоскости MNP, расстояния между плоскостями MNP и $M_1N_1P_1$ и расстояния от плоскости $M_1N_1P_1$ до нижнего основания призмы. По условию задачи шар с центром O касается верхнего основания призмы, и расстояние l_1 между верхним основанием и плоскостью MNP, содержащей точку O, равно радиусу шара с центром в точке O:

$$l_1=r\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Также по условию задачи три шара (с центрами O_1, O_2, O_3) лежат на нижнем основании призмы, и расстояние l_2 между нижним основанием и плоскостью $M_1N_1P_1$, содержащей точки O_1, O_2, O_3, равно радиусам этих шаров:

$$l_2=r.$$

Осталось найти расстояние между плоскостями MNP и $M_1N_1P_1$. Рассмотрим многогранник с вершинами O, O_1, O_2, O_3. Этот многогранник — пирамида, в основании которой лежит равносторонний треугольник $O_1O_2O_3$ со стороной $2r$. Боковые ребра OO_1, OO_2, OO_3 равны между собой (так как все шары попарно касаются) и равны $r\left(2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Проведем высоту OK правильной треугольной пирамиды $OO_1O_2O_3$ (рис. 13.11). Отрезок OK перпендикулярен плоскости $M_1N_1P_1$ и параллельной ей плоскости MNP, и, следовательно, длина этого отрезка есть расстояние между плоскостями. Так как в правильной треугольной пирамиде

основание высоты совпадает с центром основания, то $O_1K=2r/\sqrt{3}$. Из прямоугольного треугольника O_1OK по теореме Пифагора находим

$$OK=\sqrt{(OO_1)^2-(O_1K)^2}=\frac{1}{3}r\sqrt{27+12\sqrt{3}}.$$

Высота призмы:

$$H=l_1+l_2+OK=\frac{1}{3}r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right).$$

Ответ. $\dfrac{1}{3}r\left(6+\sqrt{3}+\sqrt{27+12\sqrt{3}}\right)$.

4.1. В основании правильной призмы лежит квадрат со стороной a, а ее высота равна H. Найти радиус описанного шара.

4.2. Около шара описана правильная треугольная призма и около нее описан шар. Найти отношение поверхностей этих шаров.

4.3. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная призма. Найти площадь ее поверхности.

4.4. Сфера касается боковых ребер правильной прямой шестиугольной призмы, основание которой лежит вне сферы. Найти отношение площади боковой поверхности призмы, заключенной внутри сферы, к площади поверхности сферы, находящейся вне призмы.

4.5. В куб с ребром a вписан шар. Определить радиус другого шара, касающегося трех граней куба и первого шара.

4.6. В полусферу радиуса R вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полусферы, а остальные четыре принадлежат сферической поверхности полушара. Вычислить объем куба.

4.7. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, где $AA_1 \parallel BB_1 \parallel DD_1$. В угол A куба вписан шар радиуса $R=1/2$. Найти радиус шара, вписанного в угол C и касающегося данного шара, при условии, что ребро куба равно $3/2$.

4.8. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Точка E — середина ребра C_1D_1, точка F — середина ребра B_1C_1. Найти радиус сферы, проходящей через точки E, F, A, C, если ребро куба равно a.

Пирамида и шар. Шар называется *вписанным в пирамиду*, если он касается всех граней пирамиды. Центр шара, вписанного в пирамиду, является точкой пересечения биссекторных плоскостей всех двугранных углов пирамиды.

Шар называется *описанным около пирамиды*, если все вершины пирамиды лежат на его поверхности. Если около пирамиды описан шар, то его центр является точкой пересечения всех плоскостей, проведенных через середины ребер пирамиды перпендикулярно этим ребрам.

В задачах на комбинацию пирамиды и шара решение, как правило, необходимо начинать с геометрического построения, в результате которого находится точка, являющаяся центром шара. Кроме того, часто бывает удобно построить вспомогательное сечение пирамиды и шара, разбивающее комбинацию пирамиды и шара на две симметричные части, в результате чего решение стереометрической задачи иногда может быть сведено к решению планиметрической задачи (такой метод использован в примере 4.3).

Пример 4.2. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна $3a/2$. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

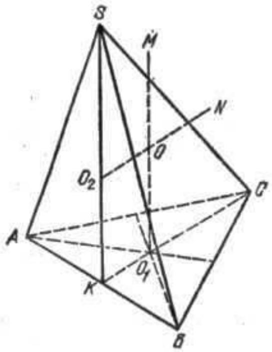


Рис. 13.14

Решение. Пусть S — вершина пирамиды, ABC — равносторонний треугольник, лежащий в основании пирамиды (рис. 13.14), SK — высота пирамиды (а также высота треугольника ASB) и по условию задачи $AK = KB$. Треугольники ASK и BSK равны (оба прямоугольные, SK — общая сторона, и $AK = KB$), и, следовательно, треугольник ASB равнобедренный. По определению пирамида вписана в шар, если все вершины пирамиды принадлежат поверхности шара и центр шара — точка, равноудаленная от всех вершин пирамиды. Найдем геометрическое место точек, равноудаленных от всех вершин пирамиды.

Геометрическое место точек, равноудаленных от трех вершин A, B и C, — перпендикуляр O_1M к плоскости равностороннего треугольника ABC, восставленный из его центра O_1 (рис. 13.14). Геометрическое место точек, равноудаленных от вершин A, S, B, — перпендикуляр O_2N к плоскости равнобедренного треугольника ASB, восставленный из точки O_2, являющейся центром окружности, описанной около треугольника ASB.

Докажем, что два перпендикуляра O_1M и O_2N пересекаются. По условию задачи отрезок SK перпендикулярен плоскости треугольника ABC, $SK \perp AB$, K — середина отрезка AB, и, следовательно, KC — высота, медиана и биссектриса равностороннего треугольника ABC ($KC \perp AB$). Таким образом, отрезок AB перпендикулярен двум различным прямым SK и KC и, следовательно, перпендикулярен плоскости, проходящей через точки S, K и C (см. теорему о взаимно перпендикулярных прямых и плоскостях). Плоскости ASB и ABC перпендикулярны плоскости SKC, так как каждая из них содержит прямую AB, перпендикулярную плоскости SKC.

Точка O_1 принадлежит линии пересечения плоскостей ABC и SKC, а точка O_2 — линии пересечения плоскостей ASB и SKC. Перпендикуляр O_1M к плоскости ABC будет целиком принадлежать плоскости SKC, а перпендикуляр O_2N к плоскости ASB также будет принадлежать плоскости SKC (по теореме о двух взаимно перпендикулярных плоскостях и перпендикуляре к одной из плоскостей, проходящем через линии их пересечения).

Таким образом, доказано, что прямые O_1M и O_2N принадлежат одной плоскости, пересекаются в точке O и четырехугольник KO_2OO_1, все вершины которого принадлежат плоскости SKC, — прямоугольник. Точка O — точка, равноудаленная от точек A, B, C, S, — является центром шара, описанного около пирамиды. Радиус окружности, описанной около треугольника ASB, равен $5a/6$, и $O_2K = SK - SO_2 = \dfrac{3a}{2} - \dfrac{5a}{6} = \dfrac{2a}{3}$. В равностороннем треугольнике ABC расстояние от центра O_1 до вершины C равно $O_1C = \dfrac{2}{3}KC = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Так как $O_2K = O_1O$ (KO_2OO_1 — прямоугольник), то из прямоугольного треугольника OO_1C по теореме Пифагора находим длину отрезка OC, которая равна искомому радиусу шара:

$$R = |OC| = \sqrt{(O_1O)^2 + (O_1C)^2} = \sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{3}.$$

Ответ. $\dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

4.9. В шар радиуса R вписан правильный тетраэдр. Найти объем тетраэдра.

4.10. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной 6 см. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания и равно 4 см. Найти радиус шара, описанного вокруг пирамиды.

4.11. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

4.12. Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны a, а угол между равными сторонами основания равен α. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

4.13. Ребро правильного тетраэдра равно a. Определить радиус шара, касающегося боковых ребер тетраэдра в вершинах основания.

4.14. Ребро правильного тетраэдра равно a. Найти радиус шара, касающегося боковых граней тетраэдра в точках, лежащих на сторонах основания.

4.15. Найти радиус шара, касающегося основания и боковых ребер правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол при основании равен α.

4.16. Грани правильной усеченной треугольной пирамиды касаются шара. Найти отношение поверхности шара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом α.

4.17. В данную правильную усеченную треугольную пирамиду можно поместить сферу, касающуюся всех граней, и сферу, касающуюся всех ребер. Найти стороны основания пирамиды, если боковые ребра равны b.

4.18. Ребро правильного тетраэдра равно a. Определить радиус шара, поверхность которого касается всех ребер тетраэдра.

4.19. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, боковое ребро равно b. Найти радиус сферы, касающейся всех ребер пирамиды.

4.20. В правильную треугольную пирамиду с плоским углом β при вершине вписан шар. Найти отношение объемов шара и пирамиды.

4.21. Ребро правильного тетраэдра $SABC$ равно a. Найти радиус сферы, вписанной в трехгранный угол, образованный гранями тетраэдра с вершиной в точке S, и касающейся плоскости, проведенной через середины ребер SA, SC и AB.

4.22. В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, зная, что отношение объема пирамиды к объему шара равно $27\sqrt{3}/(4\pi)$.

4.23. В правильной треугольной пирамиде угол между боковыми ребрами и высотой, опущенной на основание, равен α. Найти отношение объема пирамиды к объему описанного шара.

4.24. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол между плоскостью основания и боковой гранью равен α. Найти отношение объема вписанного в пирамиду шара к объему пирамиды.

4.25. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида $SABC$, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти сторону основания пирамиды.

4.26. Внутри правильного тетраэдра с ребром a расположены четыре равные сферы так, что каждая касается трех других сфер и трех граней тетраэдра. Найти радиус этих сфер.

4.27. В тетраэдре $SABC$ двугранные углы при ребрах AB, AC и SB прямые, а величины двугранных углов при ребрах SA и BC равны 15°. Найти радиус шара, вписанного в тетраэдр, если $BC = 2$.

4.28. Через сторону основания правильной треугольной пирамиды и центр вписанного в нее шара проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды, если ее боковое ребро в 3,5 раза больше стороны основания?

4.29. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания ABC равна b, а высота пирамиды равна $b\sqrt{2}$. Сфера, вписанная в пирамиду, касается SBC в точке K. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и ребро SA.

4.30. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер пирамиды также равно a, а два других равны b. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды.

4.31. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, равные стороны которого имеют длину b; соответствующие им боковые грани перпендикулярны плоскости основания, и угол между ними равен α. Угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания также равен α. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

4.32. На основании правильной треугольной пирамиды с высотой H и радиусом круга, вписанного в основание, равным r, лежит шар, касающийся основания в его центре. Найти радиус шара, если плоскость, проведенная через вершину пирамиды и середины двух сторон основания, касается этого шара.

4.33. В треугольной пирамиде $SABC$ грань SAC перпендикулярна грани ABC, $SA = SC = 1$, а угол при вершине B треугольника ABC прямой. Шар касается плоскости основания пирамиды в точке B, а грани SAC — в точке S. Найти радиус шара.

4.34. В правильную треугольную пирамиду с длиной ребра основания a и двугранным углом при основании, равным 60°, вложены три одинаковых шара так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней. Найти радиусы этих шаров.

4.35. В правильную треугольную пирамиду помещен шар радиуса 1. В точке, делящей пополам высоту пирамиды, он касается внешним образом полушара. Полушар опирается на круг, вписанный в основание пирамиды; шар касается боковых граней пирамиды. Найти площадь боковой поверхности пирамиды и величину двугранного угла, образованного боковыми гранями пирамиды.

4.36. Правильный треугольник со стороной a лежит в плоскости P. Средними линиями он разделен на 4 треугольника, и на трех из них, примыкающих к вершинам, построены как на основаниях три правильные треугольные пирамиды с высотой a (все три — по одну сторону плоскости P). Найти радиус шара, лежащего между пирамидами и касающегося как плоскости P, так и всех трех пирамид.

П р и м е р 4.3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние от центра шара до вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α. Найти объем пирамиды.

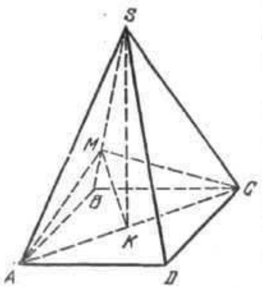


Рис. 13.15

Р е ш е н и е. Пусть $SABCD$ (рис. 13.15) — правильная четырехугольная пирамида ($ABCD$ — квадрат, SK — высота пирамиды, K — центр квадрата, боковые грани — равные равнобедренные треугольники). Найдем точку O — центр вписанного в пирамиду шара.

Из вершины A треугольника ASB проведем высоту к основанию SB. Из вершины C треугольника BSC проведем высоту к основанию SB. Так как треугольники ASB и BSC равны, то основаниями высот будет одна и та же точка M и $AM = MC$. Угол AMC по построению будет линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями боковых граней ASB и BSC. В треугольнике AMC биссектриса угла AMC будет медианой и высотой и пересечет основание AC в точке K.

В нашем случае точка S принадлежит ребру двугранного угла, а точка K — биссектрисе линейного угла и, следовательно, высота пирамиды SK принадлежит биссекторной плоскости двугранного угла с ребром SB. Построив биссекторную плоскость двугранного угла с ребром SC, аналогичным образом можно доказать, что высота SK будет принадлежать и этой биссекторной плоскости. Так как две различные плоскости пересекаются по одной прямой, а прямая SK принадлежит и той и другой

плоскости, то линия пересечения двух различных биссекторных плоскостей будет содержать высоту пирамиды SK. Центр шара, вписанного в пирамиду, лежит на пересечении биссекторных плоскостей всех двугранных углов пирамиды и, следовательно, в нашем случае (когда пирамида правильная) — на высоте пирамиды.

Проведем плоскость через высоту пирамиды SK и середины противоположных сторон квадрата L, P (рис. 13.16). Так как треугольник DSC равнобедренный, то SP — медиана и высота треугольника DSC и $SP \perp DC$. Отрезок LP также перпендикулярен DC, и, следовательно, угол LPS — линейный угол двугранного угла, образованного боковой гранью DSC и плоскостью основания $ABCD$, который по условию равен α. Аналогично можно доказать, что $\widehat{SLP} = \alpha$. Центр шара, вписанного в пирамиду, лежит в биссекторной плоскости двугранного угла с ребром DC. Точка пересечения этой плоскости с высотой SK и есть центр вписанного в пирамиду шара (точка O на рис. 13.16).

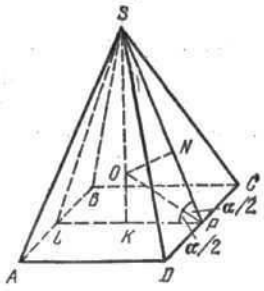


Рис. 13.16

Плоскости DSC и $ABCD$ перпендикулярны плоскости LSP, так как они содержат прямую DC, перпендикулярную плоскости LSP. Из точки O, принадлежащей плоскости LSP, опустим перпендикуляр на плоскость DSC. Основание этого перпендикуляра (точка N) совпадает с точкой касания шара и плоскости DSC. С другой стороны, по теореме о двух взаимно перпендикулярных плоскостях (DSC и LSP) и перпендикуляре к одной из плоскостей прямая ON будет целиком принадлежать плоскости LSP. Таким образом, доказано, что точка касания шара с плоскостью боковой грани DSC принадлежит плоскости LSP.

Аналогичным способом можно доказать, что точки касания шара с плоскостями $ABCD$ и ASB будут также принадлежать плоскости LSP.

Рассмотрим треугольники OSN и PSK. Эти треугольники подобны (они прямоугольные и имеют один общий угол). Из подобия треугольников следует, что $\widehat{SON} = \alpha$, а по условию задачи $SO = a$. Из треугольника OSN находим $ON = a\cos\alpha$. Высота треугольника будет равна $SK = SO = a(1 + \cos\alpha)$. Из треугольника SKP находим

$$KP = SK \operatorname{ctg}\alpha = a(1 + \cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha.$$

В треугольнике LSP имеем $LP=2KP=2a(1+\cos\alpha)\operatorname{ctg}\alpha= =AB$. Таким образом, найдены величины, необходимые для вычисления объема пирамиды:

$$V_{SABCD}=\frac{1}{3}SKS_{ABCD}=\frac{1}{3}a(1+\cos\alpha)4a^2(1+\cos\alpha)^2\operatorname{ctg}^2\alpha=$$
$$=\frac{4}{3}a^3(1+\cos\alpha)^3\operatorname{ctg}^2\alpha.$$

Ответ. $\frac{4}{3}a^3(1+\cos\alpha)^3\operatorname{ctg}^2\alpha$.

4.37. Найти поверхность шара, описанного около правильной четырехугольной пирамиды, если сторона основания пирамиды равна a, а боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом α.

4.38. В шар вписана правильная четырехугольная пирамида. Радиус шара равен R, плоский угол при вершине равен α. Определить боковую поверхность пирамиды.

4.39. В шар радиуса R вписана пирамида, в основании которой лежит квадрат. Две боковые грани перпендикулярны основанию. Большее боковое ребро составляет с пересекающей его стороной основания угол α. Найти боковую поверхность пирамиды.

4.40. В основании пирамиды лежит квадрат со стороной a. Высота пирамиды проходит через середину одного из ребер основания и равна $a\sqrt{3}/2$. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

4.41. В шар радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида. Найти объем пирамиды, если радиус окружности, описанной около ее основания, равен r.

4.42. Шар радиуса R вписан в пирамиду, в основании которой лежит ромб с острым углом α. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

4.43. В шар радиуса R вписана пирамида, в основании которой лежит квадрат. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а большее боковое ребро образует с основанием угол α. Определить боковую поверхность пирамиды.

4.44. Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды равна Q, а двугранный угол при основании — α. Эта пирамида пересечена плоскостью, проходящей через центр вписанного шара параллельно основанию. Определить площадь сечения пирамиды.

4.45. Дана пирамида $SABCD$, основанием которой служит ромб $ABCD$. Сторона основания равна a, $SA=SC=a$, $SB= =SD$, $\widehat{BCD}=2\alpha$. Определить радиус вписанного шара.

4.46. Центр сферы, описанной около правильной четырехугольной пирамиды, находится на расстоянии a от боковой грани и на расстоянии b от бокового ребра. Найти радиус сферы.

4.47. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S и стороной основания a вписан шар, радиус которого равен $a/(2\sqrt{3})$. Плоскость P, составляющая угол в 30° с плоскостью основания, касается шара и пересекается с плоскостью основания, не пересекаясь с самим основанием, по линии, параллельной стороне основания. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью P.

4.48. В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны c. Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определить радиус описанного шара.

4.49. Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ (S — вершина) равны a, а стороны ее основания равны $a/\sqrt{2}$. Найти расстояние от центра шара, вписанного в пирамиду $SABCD$, до плоскости, проходящей через диагональ BD основания $ABCD$ и середину E ребра SA.

4.50. В правильной четырехугольной пирамиде расположен шар радиуса 2. Этот шар касается боковых граней пирамиды и внешним образом касается полусферы, опирающейся на круг, вписанный в основание пирамиды. Точка касания шара и полусферы отстоит от основания пирамиды на расстояние, равное одной трети высоты пирамиды. Найти объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре пирамиды.

4.51. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ со стороной основания a и боковым ребром b ($b>0$). Сфера с центром в точке O лежит над плоскостью основания $ABCD$, касается этой плоскости в точке A и, кроме того, касается бокового ребра SB. Найти объем пирамиды $OABCD$.

4.52. В шар радиуса R вписана правильная шестиугольная усеченная пирамида, у которой плоскость нижнего основания проходит через центр шара, а боковое ребро составляет с плоскостью основания угол 60°. Найти объем пирамиды.

4.53. Около шара радиуса R описана правильная шестиугольная пирамида, боковая грань которой составляет с плоскостью основания угол α. Найти боковую поверхность и объем пирамиды.

4.54. В шар вписана прямоугольная призма, в основании которой лежит правильный треугольник, а высота призмы равна стороне основания. Найти отношение объема этой призмы к объему вписанной в тот же шар правильной шестиугольной пирамиды, боковое ребро которой равно удвоенной стороне основания.

4.55. Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему вписанного в нее шара, зная, что окружности, описанные около основания и боковых граней пирамиды, равны.

Комбинации фигур вращения. Шар называется *вписанным в прямой круговой конус*, если он касается основания конуса в его центре и соприкасается с боковой поверхностью конуса по окружности. Прямой круговой конус называется *вписанным в шар*, если его вершина и окружность его основания лежат на поверхности шара.

Шар называется *вписанным в прямой круговой цилиндр*, если шар касается оснований цилиндра в их центрах и соприкасается с боковой поверхностью цилиндра по окружности большого круга шара, параллельной основаниям. Прямой круговой цилиндр называется *вписанным в шар*, если окружности оснований цилиндра лежат на поверхности шара.

Конус называется *вписанным в цилиндр*, если основание конуса совпадает с одним из оснований цилиндра, а вершина конуса совпадает с центром другого основания.

Задачи на комбинации фигур вращения часто бывает удобно решать построением вспомогательного сечения, разбивающего комбинацию фигур вращения на две симметричные части. Вспомогательное сечение, как правило, удобно строить таким образом, чтобы оно проходило (в зависимости от вида задачи) через ось цилиндра (или ось конуса) и центр шара. При этом в сечении цилиндра будет получаться прямоугольник, в сечении конуса — равнобедренный треугольник, а в сечении шара — круг с радиусом, равным радиусу шара. Так, например, если по условию задачи шар вписан в конус, то в осевом сечении конуса будут получаться равнобедренный треугольник и вписанный в него круг; если шар описан около цилиндра, то в сечении получается прямоугольник, описанный около окружности.

Пример 4.4. Образующая конуса равна l и образует с высотой конуса угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найти расстояние от этой плоскости до центра шара, вписанного в конус.

Решение. Пусть S — вершина конуса, O — основание высоты конуса, SA и SB — образующие конуса, угол между которыми равен β (рис. 13.17). Из прямоугольного треугольника SOB (угол SOB прямой, $SB = l$, $\widehat{BSO} = \alpha$) находим радиус окружности, лежащей в основании конуса, и высоту конуса:

$$BO = l \sin\alpha, \quad SO = l\cos\alpha.$$

Из равнобедренного треугольника ASB ($\widehat{ASB} = \beta$, $AS = SB = l$) находим длину хорды AB, высекаемой плоскостью ASB на основании конуса:

$$AB = 2l\sin\frac{\beta}{2}.$$

Расстояние от центра основания конуса до середины хорды AB (точки N) найдем из треугольника NOB по теореме Пифагора:

$$|NO| = \sqrt{(BO)^2 - (NB)^2} = l\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}.$$

Через середину хорды AB (точку N) и высоту конуса SO проведем плоскость. В сечении конуса плоскостью получится равнобедренный треугольник MSM_1 с боковой стороной l и углом

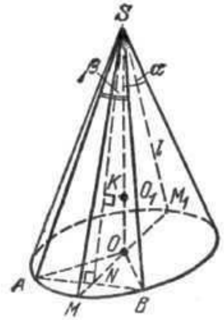


Рис. 13.17

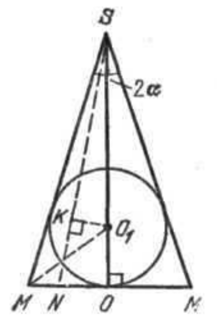


Рис. 13.18

при вершине 2α; в сечении шара, вписанного в конус, получится круг с радиусом, равным радиусу шара, вписанного в равнобедренный треугольник MSM_1, а плоскости MSM_1 и ASB пересекутся по прямой NS (рис. 13.18).

Докажем, что расстояние от центра окружности O_1 до прямой SN (т. е. длина отрезка O_1K) будет искомым расстоянием от центра шара до плоскости ASB.

Обратимся к рис. 13.17. Хорда AB окружности основания конуса перпендикулярна высоте конуса и перпендикулярна радиусу OM, проходящему через середину хорды AB (точку N). Следовательно, хорда AB перпендикулярна плоскости MSM_1, так как она перпендикулярна двум непараллельным прямым (SO и MM_1), принадлежащим плоскости. Итак, имеем плоскость MSM_1 и перпендикулярную ей прямую AB. Так как плоскость ASB проходит через прямую AB, перпендикулярную плоскости MSM_1, то и сама плоскость ASB будет перпендикулярна плоскости MSM_1, т. е. эти две плоскости взаимно перпендикулярны.

Центр шара, вписанного в конус, принадлежит плоскости MSM_1. Если из центра шара опустить перпендикуляр на плоскость ASB, то по теореме о двух взаимно перпендикулярных плоскостях этот перпендикуляр будет целиком принадлежать плоскости MSM_1, т. е. основание перпендикуляра (точка K) будет лежать на линии пересечения плоскостей SN, что и изображено на рис. 13.17.

Таким образом, нахождение расстояния от центра шара до плоскости ASB сводится к нахождению длины отрезка KO_1 из рис. 13.18 планиметрической задачи. Найдем радиус окружности, вписанной в треугольник MSM_1:

$$OO_1 = MO \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = BO \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = l \sin\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Рассмотрим треугольники KSO_1 и NSO. Эти треугольники подобны (они прямоугольные и имеют общий угол NSO). Вычислим гипотенузу SO_1 треугольника KSO_1:

$$SO_1 = SO - O_1O = l\left(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

Гипотенузу SN треугольника SON вычислим по теореме Пифагора:

$$SN = \sqrt{(NO)^2 + (SO)^2} = l\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\alpha} = l\cos\frac{\beta}{2}.$$

Из подобия треугольников KSO_1 и NSO следуют равенства

$$\frac{KO_1}{NO} = \frac{SO_1}{SN} \Rightarrow KO_1 = \frac{l\left(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Ответ. $\dfrac{l\sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2\frac{\beta}{2}}\left(\cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)\right)}{\cos\frac{\beta}{2}}.$

4.56. В конус вписан шар. Найти объем шара, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

4.57. Около шара радиуса R описан усеченный конус, образующая которого составляет с плоскостью большего основания угол α. Найти объем и площадь боковой поверхности усеченного конуса.

4.58. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти угол при вершине в осевом сечении конуса.

4.59. В конус вписан шар. Радиус окружности, по которой касаются конус и шар, равен r. Найти объем конуса, если угол между высотой и образующей конуса равен α.

4.60. В шар, площадь поверхности которого S, вписан конус. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определить площадь полной поверхности конуса.

4.61. В конус вписан шар. Доказать, что отношение полной поверхности конуса к поверхности шара равно отношению их объемов.

4.62. В конус, образующие которого наклонены к плоскости основания под углом α, вписан шар. Найти отношение объема шара к объему конуса.

4.63. В прямой круговой конус вписан шар. Отношение объемов конуса и шара равно двум. Найти отношение полной поверхности конуса к поверхности шара.

4.64. Высота цилиндра равна высоте конуса. Боковая поверхность цилиндра относится к боковой поверхности конуса, как $3:2$. Кроме того, известно, что угол наклона образующей конуса к плоскости основания равен α. Найти отношение объема цилиндра к объему конуса.

4.65. В усеченный конус с площадью боковой поверхности S вписана сфера площадью s. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса.

4.66. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен α, а радиус основания конуса равен R. Найти объем такой сферы с центром в вершине конуса, которая делит объем конуса пополам.

4.67. В прямой круговой конус с углом 60° при вершине в осевом сечении конуса вложены три одинаковых шара радиуса r так, что каждый шар касается двух остальных, боковой поверхности конуса и плоскости основания. Найти радиус основания конуса.

4.68. На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиуса r. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти высоту конуса.

4.69. Определить угол при вершине в осевом сечении конуса, описанного около четырех равных шаров, расположенных так, что каждый касается трех других.

4.70. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстояние d.

4.71. В усеченный конус, у которого радиусы нижнего и верхнего оснований равны R и r, вписан шар. Найти радиус второго шара, который касается первого шара, боковой поверхности усеченного конуса и верхнего основания.

4.72. Два конуса имеют высоты h_1 и h_2 и общее основание радиуса R, а их вершины лежат по разные стороны от плоскости основания. В поверхность, составленную из боковых поверхностей этих конусов, вписан шар. Найти радиус другого шара, который касается как боковой поверхности первого конуса (причем по целой окружности), так и первого шара.

4.73. Шар касается основания конуса в его центре. Поверхность шара пересекает боковую поверхность конуса по двум окружностям, одна из которых имеет радиус, равный радиусу шара, и лежит в плоскости, параллельной основанию конуса. Известно, что радиус основания конуса в 4/3 раза больше радиуса шара. Найти отношение объема шара к объему конуса.

4.74. Прямой круговой цилиндр описан около шара радиуса R. Точка C расположена внутри цилиндра на его оси и удалена на $\frac{3}{4}R$ от нижнего основания. Через эту точку проведена плоскость P, имеющая с окружностью нижнего основания только одну общую точку. В шар вписан прямой круговой конус, основание которого лежит в плоскости P, а вершина расположена выше этой плоскости. Найти объем этого конуса.

4.75. Прямой круговой конус имеет радиус основания r и угол α в осевом сечении. Два одинаковых шара радиуса R касаются друг друга боковой поверхности конуса (извне) и плоскости основания конуса. Найти площадь треугольника, вершинами которого служат центры шаров и центр основания конуса.

4.76. В прямой круговой цилиндр с радиусом основания $r=1$ и высотой $H=12/(3+2\sqrt{3})$ вписаны три одинаковых шара так, что шары касаются верхнего основания цилиндра, его боковой поверхности и попарно — друг друга. Найти объем прямого кругового конуса, основание которого совпадает с нижним основанием цилиндра и который касается всех трех шаров.

4.77. Даны три одинаковых прямых круговых конуса с углом α $(\alpha<2\pi/3)$ в осевом сечении и радиусом основания r. Основания этих конусов расположены в одной плоскости и попарно касаются друг друга внешним образом. Найти радиус сферы, касающейся всех трех конусов и плоскости, проходящей через их вершины.

ГЛАВА 14

МЕТОД КООРДИНАТ И ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Векторы в координатах

Координатами точки M_0 относительно прямоугольной системы координат $OXYZ$ называют упорядоченную тройку чисел (x_0, y_0, z_0). Число x_0 называют *абсциссой* точки M_0, y_0 — *ординатой*, z_0 — *аппликатой*.

Пусть A и B — две различные точки пространства. Отрезок AB, у которого точку A считают началом, а точку B — концом, называют *вектором* AB и обозначают $\overrightarrow{AB}$. Направление луча AB определяет *направление* вектора $\overrightarrow{AB}$, а длина отрезка AB называется *длиной* или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ и обозначается $|AB|$. Вектор, начинающийся и кончающийся в точке A, называется *нулевым* вектором и обозначается $\overrightarrow{AA}$. Понятие направления для него не вводится.

Если координаты начала и конца вектора AB представлены в виде $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$, то *координатами* вектора $\overrightarrow{AB}$ является упорядоченная тройка чисел

$$(x_B-x_A, y_B-y_A, z_B-z_A).$$

Два вектора считаются равными, если одноименные координаты совпадают. В дальнейшем наряду с обозначениями $\overrightarrow{AB}$ для вектора будем использовать и обозначения, не связанные с началом и концом вектора в пространстве: $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots$

Над множеством векторов, заданных своими координатами, можно определить операции сложения, вычитания и умножения на число по следующим правилам:

1) *сумма (разность) векторов* равна вектору, координаты которого равны сумме (разности) соответствующих координат слагаемых;

2) *произведение вектора на число* равно вектору, каждая координата которого равна координате исходного вектора умноженной на это число.

Для удобства ссылок представим правила действий с векторами $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ формулами

$$\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b}=(a_1\pm b_1, a_2\pm b_2, a_3\pm b_3). \qquad (1)$$

$$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3). \qquad (2)$$

Векторы

$$\boldsymbol{i}=(1, 0, 0), \quad \boldsymbol{j}=(0, 1, 0), \quad \boldsymbol{k}=(0, 0, 1) \qquad (3)$$

называются *ортами*. Любой вектор $\boldsymbol{a}(a_1, a_2, a_3)$ представляется, и при этом единственным образом, в виде

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}. \qquad (4)$$

Пример 1.1. Заданы векторы

$$a = 2i + 3j, \quad b = -3j - 2k, \quad c = i + j - k.$$

Найти координаты вектора $a - \frac{1}{2}b + c$.

Решение. По условию задачи

$$a = (2, 3, 0), \quad b = (0, -3, -2), \quad c = (1, 1, -1).$$

Используя правила (1), (2), имеем

$$a - \frac{1}{2}b + c = \left(2 - 0 + 1,\ 3 + \frac{3}{2} + 1,\ 0 + 1 - 1\right).$$

Ответ. $a - \frac{1}{2}b - c = \left(3, \frac{11}{2}, 0\right)$.

1.1. Даны векторы $a = (-3, -1, 2)$, $b = (4, 0, 6)$, $c = (5, -2, 7)$. Найти координаты векторов: а) $2a$; б) $-a + 3c$.

1.2. Даны три вектора $a = (2, 4)$, $b = (-3, 1)$, $c = (5, -2)$. Найти координаты векторов:

а) $2a + 3b - 5c$; б) $a + 24b + 14c$; в) $2a - \frac{1}{2}b$; г) $5c$.

Пример 1.2. Даны четыре вектора $p\{3, -2, 1\}$, $q\{-1, 1, -2\}$, $r\{2, 1, -3\}$ и $c(11, -6, 5)$. Найти числа x, y, z, если

$$c = xp + yq + zr.$$

Решение. Из условия равенства двух векторов имеем

$$\begin{aligned} 11 &= 3x - y + 2z, \\ -6 &= -2x + y + z, \\ 5 &= x - 2y - 3z. \end{aligned}$$

Решая эту систему уравнений, получим

$$x = 2, \quad y = -3, \quad z = 1.$$

Ответ. $c = 2p - 3q + r$.

1.3. Заданы векторы

$$a = (1, 5, 3),\ b = (6, -4, -2),$$
$$c = (0, -5, 7) \text{ и } d = (-20, 27, -35).$$

Найти такие числа α, β и γ, что

$$\alpha a + \beta b + \gamma c + d = 0.$$

1.4. Даны три вектора $p\{3, -2, 1\}$, $q = \{-1, 1, -2\}$, $r = \{2, 1, -3\}$. Найти координаты вектора c, если справедливо представление

$$c = 2p - 3q + r.$$

1.5. Даны четыре вектора $p(0, 1, 2)$, $q(1, 2, 3)$, $r(-1, 1, -2)$, $c(0, 4, 3)$. Найти x, y, z в представлении

$$c = xp + yq + zr.$$

1.6. Выразить вектор c через векторы a и b в каждом из следующих случаев:

а) $a = (4, -2)$, $b = (3, 5)$, $c = (1, -7)$;
б) $a = (5, 4)$, $b = (-3, 0)$, $c = (19, 8)$;
в) $a = (-6, 2)$, $b = (4, 7)$, $c = (9, -3)$.

1.7. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ по координатам точек P и Q:

а) $P(2, -3, 0)$, $Q(-1, 2, -3)$;
б) $P\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{6}\right)$, $Q\left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{3}\right)$.

1.8. Даны четыре точки $A(0, 2)$, $B(3, 1)$, $C(-5, 3)$, $D(2, 4)$. Найти координаты такой точки Q, что

$$\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{QD} = 0.$$

1.9. От точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB} = a$. Найти координаты точки B в каждом из следующих случаев:

а) $A(0, 0)$, $a = (-2, 1)$;
б) $A(-1, 5)$, $a = (1, -3)$;
в) $A(2, 7)$, $a = (-2, -5)$.

1.10. На оси абсцисс найти точку M, расстояние от которой до точки $A(3, -3)$ равно 5.

1.11. На оси ординат найти точку M, равноудаленную от точек $A(1, -4, 7)$ и $B(5, 6, -5)$.

1.12. Найти координаты точки M, лежащей на оси Ox и одинаково удаленной от точек $A(1, 2, 3)$ и $B(-3, 3, 2)$.

1.13*. Найти координаты центра тяжести треугольника ABC, если точки A, B и C имеют следующие координаты:

а) $A(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(5, 0)$;
б) $A(0, 0)$, $B(2, 5)$, $C(-1, 7)$;
в) $A(1, 3)$, $B(3, 6)$, $C(-2, 5)$.

Два вектора $a = (a_1, a_2, a_3)$ и $b = (b_1, b_2, b_3)$ $(b \neq 0)$ *коллинеарны*, если существует такое число λ, что

$$a_1 = \lambda b_1,\ a_2 = \lambda b_2,\ a_3 = \lambda b_3.$$

1.14. В каждом из следующих случаев определить, при каком значении k вектор $\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ будет коллинеарен вектору $\boldsymbol{c}$:

а) $\boldsymbol{a}=(2, 3)$, $\boldsymbol{b}=(3, 5)$, $\boldsymbol{c}=(-1, 3)$;

б) $\boldsymbol{a}=(1, 0)$, $\boldsymbol{b}=(2, 2)$, $\boldsymbol{c}=(3, -5)$;

в) $\boldsymbol{a}=(3, -2)$, $\boldsymbol{b}=(1, 1)$, $\boldsymbol{c}=(0. 5)$.

1.15. Воспользовавшись условием коллинеарности двух векторов, выяснить, коллинеарны ли векторы

а) $\boldsymbol{a}=\left(\frac{3}{7}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ и $\boldsymbol{b}=\left(\frac{2}{7}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$;

б) $\boldsymbol{c}=\left(-\frac{3}{2}, 6, \frac{4}{3}\right)$ и $\boldsymbol{d}=\left(\frac{9}{8}, -\frac{9}{2}, -1\right)$.

1.16. При каких значениях X и Y векторы $\boldsymbol{a}=(X, -2, 5)$ и $\boldsymbol{b}=(1, Y, -3)$ коллинеарны?

1.17. Даны четыре точки $A(-2, -3, 8)$, $B(2, 1, 7)$, $C(1, 4, 5)$ и $D(-7, -4, 7)$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

1.18. Отрезок с концами в точках $A(3, -2)$ и $B(6, 4)$ разделен на три равные части. Найти координаты точек деления.

1.19. Найти координаты концов отрезка, который точками $C(2, 0, 2)$ и $D(5, -2, 0)$ разделен на три равные части.

1.20. Даны вершины треугольника $A(1, 0, 2)$, $B(1, 2, 2)$ и $C(5, 4, 6)$. Точка L делит отрезок $\overrightarrow{AC}$ в отношении $1:3$; CE — медиана, проведенная из вершины C. Найти координаты точки пересечения прямых BL и CE.

1.21. При каких значениях α и β векторы $\boldsymbol{a}=-2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+\alpha\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b}=\beta\boldsymbol{i}-6\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ коллинеарны?

Три вектора $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$, $\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, c_3)$ *компланарны*, если

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

1.22. Проверить, что векторы $\boldsymbol{a}=(1, 0, 2)$, $\boldsymbol{b}=(0, 1, 3)$, $\boldsymbol{c}=(1, 1, 5)$ компланарны.

1.23. Доказать, что если вектор $\boldsymbol{c}$ представляется в виде $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, то три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ будут компланарны.

1.24. Доказать, что если три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то существуют константы α и β такие, что справедливо представление

$$\boldsymbol{c}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}.$$

1.25. Даны три вектора $\boldsymbol{a}=(1, -1, 0)$, $\boldsymbol{b}=(0, 1, -1)$, $\boldsymbol{c}=(1, 0, -1)$ и вектор $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}$. Доказать, что при любых α и β векторы $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

Если векторы $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$ заданы своими координатами в прямоугольной системе координат, то их *скалярным произведением* называется число, которое находится по формуле

$$\boldsymbol{ab}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{5}$$

Косинусом угла между ненулевыми векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ называется число, которое находится по формуле

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}. \tag{6}$$

Условие перпендикулярности двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеет вид

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3. \tag{7}$$

Длина вектора $\boldsymbol{a}$ вычисляется по формуле

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}. \tag{8}$$

Пример 1.3. Даны два вектора $\boldsymbol{a}=(5, 2)$, $\boldsymbol{b}=(7, -3)$. Найти вектор $\boldsymbol{c}$, удовлетворяющий условиям $\boldsymbol{ac}=38$, $\boldsymbol{bc}=30$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{c}=(X, Y)$, тогда на основании (5) имеем

$$5X+2Y=38,$$
$$7X-3Y=30.$$

Решив эту систему относительно X и Y, получаем $X=6$, $Y=4$.

Ответ. $\boldsymbol{c}=(6, 4)$.

1.26. Даны векторы $\boldsymbol{a}=(4, -2, -4)$ и $\boldsymbol{b}=(6, -3, 2)$. Вычислить:

а) $\boldsymbol{ab}$; б) $(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$; в) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$; г) $|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

1.27. Дан вектор $\boldsymbol{a}=(-6, 8)$. Найти координаты единичного вектора, коллинеарного вектору $\boldsymbol{a}$, и:

а) сонаправленного вектору $\boldsymbol{a}$;

б) противоположно направленного вектору $\boldsymbol{a}$.

1.28*. Из одной точки проведены векторы $\boldsymbol{a}=(-12, 16)$, $\boldsymbol{b}=(12, 5)$. Найти координаты вектора, который, будучи отложенным от той же точки, делит пополам угол между векторами.

1.29. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $|\boldsymbol{c}|=4$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, вычислить $\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{bc}+\boldsymbol{ca}$.

1.30. Вычислить длины векторов:

а) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$; б) $\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$.

1.31. Длина вектора равна 3. Вычислить координаты вектора, если известно, что все они равны.

1.32. Вычислить длину вектора $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$, если

$$\boldsymbol{a}=(1, 1, -1); \quad \boldsymbol{b}=(2, 0, 0).$$

1.33. Даны векторы $\boldsymbol{a}=(1, 1, -1)$, $\boldsymbol{b}=(5, -3, -3)$ и $\boldsymbol{c}=(3, -1, 2)$. Найти векторы, коллинеарные вектору $\boldsymbol{c}$, длины которых равны длине вектора $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

1.34*. Векторы $\overrightarrow{AB} = -3\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{k}$ и $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, -2)$ являются сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

Пример 1.4. Вычислить угол между векторами $\boldsymbol{a} = (-1, 2, -2)$ и $\boldsymbol{b} = (6, 3, -6)$.

Решение. По формуле (6) получаем

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{(-1)\cdot 6 + 2\cdot 3 + (-2)\cdot(-6)}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{36+9+36}} = \frac{12}{3\cdot 9} = \frac{4}{9}.$$

Ответ. $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \arccos\frac{4}{9}$.

1.35. Вычислить угол между векторами:

а) $\boldsymbol{a} = (6, -2, -3)$; $\boldsymbol{b} = (5, 0, 0)$;
б) $\boldsymbol{a} = (2, -4, 5)$; $\boldsymbol{b} = (0, 2, 0)$;
в) $\boldsymbol{a} = (-2, 6, -3)$; $\boldsymbol{b} = (0, 0, -3)$;
г) $\boldsymbol{a} = (-4, -6, 2)$; $\boldsymbol{b} = (4, 0, 0)$;
д) $\boldsymbol{a} = (3, -2, 6)$; $\boldsymbol{b} = (0, -5, 0)$;
е) $\boldsymbol{a} = (4, -5, -2)$; $\boldsymbol{b} = (0, 0, 2)$.

1.36. Какой угол образуют с вектором $\boldsymbol{i}$ следующие векторы: $\boldsymbol{a} = (2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 5)$, $\boldsymbol{c} = (-5, 1)$, $\boldsymbol{d} = (-1, -1)$?

1.37. Вычислить косинус угла между векторами $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a} = (1, 2, 1)$ и $\boldsymbol{b} = (2, -1, 0)$.

1.38*. Вычислить косинусы углов, которые образуют с векторами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ вектор:

а) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$; б) $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$;
в) $\boldsymbol{c} = -5\boldsymbol{i}$; г) $\boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

1.39. Вычислить координаты вектора $\boldsymbol{p}$, коллинеарного вектору $\boldsymbol{q} = (3, -4)$, если известно, что вектор $\boldsymbol{p}$ образует тупой угол с вектором $\boldsymbol{i}$ и $|\boldsymbol{p}| = 10$.

1.40. Вектор $\boldsymbol{b}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{a} = (6, 8, -15/2)$ и образует с ортом $\boldsymbol{k}$ острый угол. Зная, что $|\boldsymbol{b}| = 50$, найти его координаты.

1.41. Вычислить угол между векторами $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$ и определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

1.42*. Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ имеют равные углы. Найти координаты вектора $\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$.

1.43. Прямая составляет равные углы с ребрами прямого трехгранного угла. Найти эти углы.

1.44. Векторы $\overrightarrow{AB} = (3, -2, 2)$ и $\overrightarrow{BC} = (-1, 0, -2)$ являются смежными сторонами параллелограмма. Определить величину угла между его диагоналями.

Пример 1.5. Вычислить координаты единичного вектора $\boldsymbol{a}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$ и $\boldsymbol{c} = (0, 1, 1)$.

Решение. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты X, Y, Z. Тогда по условию задачи

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1. \qquad (*)$$

Из условия перпендикулярности вектора $\boldsymbol{a}$ с векторами $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ получаем уравнения

$$X + Y = 0 \quad \text{и} \quad Y + Z = 0.$$

Подставляя X и Z, выраженные через Y, в равенство $(*)$, получаем $Y = \pm 1/\sqrt{3}$. Следовательно, существуют два вектора, удовлетворяющих условию задачи:

$$\boldsymbol{a}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Ответ. $\boldsymbol{a}_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,
$\boldsymbol{a}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1.45. При каком значении Z векторы $\boldsymbol{a} = (6, 0, 12)$ и $\boldsymbol{b} = (-8, 13, Z)$ перпендикулярны?

1.46. При каких X и Y вектор $\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}$ и скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$ равно 4?

1.47. Вектор $\boldsymbol{c}$ перпендикулярен векторам $\boldsymbol{a} = (2, 3, -1)$ и $\boldsymbol{b} = (1, -2, 3)$ и удовлетворяет условию $\boldsymbol{c}(2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}) = -6$. Найти координаты $\boldsymbol{c}$.

1.48. Вычислить координаты вектора $\boldsymbol{c}$, перпендикулярного векторам $\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}$ и образующего тупой угол с ортом $\boldsymbol{j}$, если $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{7}$.

1.49*. Найти координаты вектора $\boldsymbol{a} = (X, Y, Z)$, образующего равные углы с векторами $\boldsymbol{b} = (Y, -2Z, 3X)$, $\boldsymbol{c} = (2Z, 3X, -Y)$, если $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{d} = (1, -1, 2)$, $|\boldsymbol{a}| = 2\sqrt{3}$ и угол между вектором $\boldsymbol{a}$ и ортом $\boldsymbol{j}$ тупой.

1.50. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трех вершин: $A(3, 1, 2)$, $B(0, -1, -1)$, $C(-1, 1, 0)$. Найти длину диагонали BD.

1.51. Доказать, что точки $A(1, -1, 1)$, $B(1, 3, 1)$, $C(4, 3, 1)$, $D(4, -1, 1)$ являются вершинами прямоугольника. Вычислить длины его диагоналей и координаты их точки пересечения.

1.52. Доказать, что точки $A(2, 4, -4)$, $B(1, 1, -3)$, $C(-2, 0, 5)$, $D(-1, 3, 4)$ являются вершинами параллелограмма, и вычислить величину угла между его диагоналями.

1.53. Найти косинус угла φ между диагоналями параллелограмма AC и BD, если заданы три его вершины: $A(2, 1, 3)$, $B(5, 2, -1)$ и $C(-3, 3, -3)$.

1.54. Треугольник задан координатами своих вершин: $A(3, -2, 1)$, $B(3, 1, 5)$, $C(4, 0, 3)$. Вычислить длины медиан AA_1 и BB_1, расстояние от начала координат до центра тяжести треугольника ABC, величины углов этого треугольника.

1.55. Вычислить координаты вершины C равностороннего треугольника ABC, если даны координаты $A(1, 3)$, $B(3, 1)$.

1.56. Вычислить координаты вершин C и D квадрата $ABCD$ если даны координаты $A(2, 1)$, $B(0, 4)$.

1.57. Даны точки $B(1, -3)$, $D(0, 4)$, являющиеся вершинами ромба $ABCD$. Вычислить координаты вершин A и C, если $\widehat{BAD} = 60°$.

1.58. Даны вершины треугольника $A(1, -1, -3)$, $B(2, 1, -2)$ и $C(-5, 2, -6)$. Вычислить длину биссектрисы его внутреннего угла при вершине A.

1.59. Даны координаты трех точек $A(3, 3, 2)$, $B(1, 1, 1)$ и $C(4, 5, 1)$. Определить координаты точки D, принадлежащей биссектрисе угла ABC и удаленной от вершины B на расстояние $\sqrt{870}$.

1.60. Вычислить работу силы $\mathbf{F} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ при перемещении материальной точки из положения $A(-1, 2, 0)$ в положение $B(2, 1, 3)$.

1.61. Даны три силы $\mathbf{M} = (3, -4, 2)$, $\mathbf{N} = (2, 3, 5)$ и $\mathbf{P} = (-3, -2, 4)$, приложенные к одной точке. Вычислить работу, производимую равнодействующей этих сил, когда их точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из $A(5, 3, -7)$ в $B(4, 1, -4)$.

1.62. Найти длины сторон и величины углов треугольника с вершинами $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$ и $C(3, -2, 1)$.

1.63. Известны координаты вершин треугольника: $A(1, 1, 1)$, $B(2, 4, 2)$, $C(8, 3, 3)$. Определить, является ли этот треугольник прямоугольным или тупоугольным.

1.64. Вершины треугольника находятся в точках $A(2, -3, 0)$, $B(2, -1, 1)$ и $C(0, 1, 4)$. Найти величину угла φ, образованного медианой DB и основанием AC.

1.65*. В треугольнике ABC точка H — точка пересечения высот. Известно, что $\overrightarrow{AB} = (6, -2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AH}$.

1.66. Доказать, что треугольник ABC, вершины которого расположены в точках $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 0)$, $C(1, 1, 1)$, прямоугольный. Найти расстояние от начала координат до центра окружности, описанной около этого треугольника.

1.67. Треугольная пирамида задана вершинами $A(3, 0, 1)$, $B(-1, 4, 1)$, $C(5, 2, 3)$, $D(0, -5, 4)$. Вычислить длину вектора $\overrightarrow{AG}$, если G — точка пересечения медиан грани BCD.

1.68*. Объем прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равен 3. Определить координаты вершины A_1, если координаты вершин одного из оснований призмы известны: $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$.

1.69. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y = x^2$ заданы такие точки A и B, что $\overrightarrow{OA}\cdot\mathbf{i} = 1$ и $\overrightarrow{OB}\cdot\mathbf{i} = -2$. Найти длину вектора $12\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$.

1.70. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y = x^2 - 2x + 3$, лежащей в первой четверти, заданы точка $A(x_1, y_1)$ с абсциссой $x_1 = 1$ и точка $B(x_2, y_2)$ с ординатой $y_2 = 11$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$.

§ 2. Задачи на аналитическую запись линий на плоскости и поверхностей в пространстве

Прямая на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат Oxy может быть задана одним из уравнений (1)—(7).

Общее уравнение прямой:

$$Ax + By + C = 0. \tag{1}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n} = (A, B)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2}$$

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (m, n)$:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{3}$$

Уравнение прямой в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \tag{4}$$

где a и b — координаты точек, отсекаемых прямой на координатных осях Ox и Oy соответственно.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k:

$$y = kx + b. \tag{5}$$

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0)$ с данным угловым коэффициентом k:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{6}$$

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \tag{7}$$

Углом между прямыми l_1 и l_2 называется наименьший из двух смежных углов, образованных этими прямыми. Угол между прямыми l_1 и l_2 с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg}(\widehat{l_1, l_2}) = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|, \quad k_1 \cdot k_2 \neq -1. \tag{8}$$

Если $l_1 \perp l_2$, то $k_1 \cdot k_2 = -1$. (9)

Если $l_1 \parallel l_2$, то $k_1 = k_2$. (10)

Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l, задаваемой уравнением $Ax + By + C = 0$, находится по формуле

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{11}$$

Пример 2.1. Прямая l проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ перпендикулярно вектору $n = (A, B)$. Написать уравнение прямой l, если $M_0(-1, 2)$, $n = (2, 2)$.

Решение. Согласно формуле (2) имеем $2(x+1) + 2(y-2) = 0$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем уравнение $x + y - 1 = 0$.

Ответ. $x + y - 1 = 0$.

Пример 2.2. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 2)$ и параллельной вектору $a = (3, -1)$.

Решение. Согласно формуле (3) имеем $\dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y-2}{-1}$, или $x + 3y - 5 = 0$.

Ответ. $x + 3y - 5 = 0$.

Пример 2.3. Заданы прямая l: $-2x + y - 1 = 0$ и точка $M(-1, 2)$. Требуется:

1) вычислить расстояние $\rho(M, l)$ от точки M до прямой l;

2) написать уравнение прямой l', проходящей через точку M перпендикулярно заданной прямой l;

3) написать уравнение прямой l'', проходящей через точку M параллельно заданной прямой l.

Решение. 1) Согласно (11) имеем

$$\rho(M, l) = \frac{|(-2)(-1) + 1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{4+1}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

2) Применяя формулу (9) для $k_1 = 2$, получим $k_2 = -1/2$. Согласно (6) имеем $x + 2y - 3 = 0$.

3) Применяя формулы (10) и (6), получаем $y - 2 = 2(x+1)$, т. е. $y = 2x + 4$.

Ответ. 1) $\dfrac{3}{\sqrt{5}}$; 2) $x + 2y - 3 = 0$; 3) $y = 2x + 4$.

2.1. Прямая l проходит через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Написать уравнение прямой l, если:

а) $M_1(1, 2)$, $M_2(-1, 0)$;

б) $M_1(1, 1)$, $M_2(1, -2)$;

в) $M_1(2, 2)$, $M_2(0, 2)$.

2.2*. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку $M(8, 6)$ и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

2.3. Написать уравнение прямой, параллельной двум заданным прямым l_1 и l_2 и равноудаленной от l_1 и l_2, если:

а) l_1: $3x - 2y - 1 = 0$, l_2: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+3}{3}$;

б) l_1: $3x - 15y - 1 = 0$, l_2: $\dfrac{x+1/2}{5} = \dfrac{y+1/2}{1}$.

2.4. Треугольник ABC задан координатами своих вершин $A(1, 2)$, $B(2, -2)$, $C(6, 1)$. Требуется:

1) написать уравнение прямой, содержащей сторону AB;

2) написать уравнение прямой, содержащей высоту CD и вычислить длину $h = |CD|$;

3) найти угол φ между высотой CD и медианой BM;

4) написать уравнение биссектрис l_1 и l_2 внутреннего и внешнего углов при вершине A.

2.5. Из точки $M(5, 4)$ выходит луч света под углом $\varphi = \operatorname{arctg} 2$ к оси Ox и отражается от нее. Написать уравнения падающего и отраженного лучей (уравнения прямых, содержащих эти лучи).

2.6. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M(2, 1)$ под углом $\pi/4$ к прямой $2x + 3y + 4 = 0$.

2.7*. Две вершины треугольника ABC находятся в точках $A(-1, -1)$ и $B(4, 5)$, а третья вершина лежит на прямой $y = 5(x-3)$. Площадь треугольника равна 9,5. Найти координаты вершины C.

2.8. Даны три точки $A(2, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-4, 0)$, являющиеся вершинами равнобочной трапеции $ABCD$. Вычислить координаты точки D, если $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $C_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Пример 2.4. Составить уравнение окружности, проходящей через точки $A(2, 0)$, $B(5, 0)$ и касающейся оси Oy.

Решение. Пусть неизвестный центр окружности C_0 имеет координаты (x_0, y_0). Тогда из условия касания окружности оси

Oy заключаем, что абсцисса центра x_0 равна радиусу R. Так как точки $A(2, 0)$ и $B(5, 0)$ лежат на окружности, то их координаты удовлетворяют уравнению окружности. Используя перечисленные условия, получим следующую систему уравнений:

$$(x_0-2)^2+y_0^2=R^2,$$
$$(x_0-5)^2+y_0^2=R^2,$$
$$x_0=R,$$

которая имеет два решения: $x_0=7/2$, $y_0=\pm\sqrt{10}$; $R=7/2$.

Ответ. $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y-\sqrt{10})^2=\frac{49}{4}$ и $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+$ $+(y+\sqrt{10})^2=\frac{49}{4}$.

2.9. Составить уравнение окружности, вписанной в треугольник, стороны которого лежат на прямых $x=0$, $y=0$, $3x+4y-12=0$.

2.10. Дана окружность $x^2+y^2=4$. Составить уравнение прямой l, параллельной оси абсцисс и пересекающей окружность в таких точках M и N, что $|MN|=1$.

2.11*. В окружность $x^2+y^2=169$ вписан квадрат $ABCD$. Найти координаты вершин B, C и D, если $A(5, -12)$.

2.12.** Дана окружность $x^2+y^2=9$. Составить уравнение окружности, проходящей через начало координат, точку $A(1, 0)$ и касающейся данной окружности.

2.13. Составить уравнение окружности, проходящей через точку $A(2, 1)$ и касающейся осей координат.

Плоскость α в прямоугольной системе координат $Oxyz$ может быть задана следующими способами.

Общее уравнение плоскости:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *перпендикулярно вектору* $n=(A, B, C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \tag{12}$$

Углом между двумя плоскостями α_1 и α_2 называют наименьший из двугранных углов, образованных этими плоскостями. Косинус этого угла вычисляется по формуле

$$\cos(\widehat{\alpha_1, \alpha_2})=\frac{n_1\cdot n_2}{|n_1|\,|n_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}, \tag{13}$$

где $n_1=(A_1, B_1, C_1)$ и $n_2=(A_2, B_2, C_2)$ — векторы, перпендикулярные плоскостям α_1 и α_2 соответственно.

Пример 2.5. Составить уравнение плоскости, если известно, что точка $N(3, 5, 2)$ является основанием перпендикуляра, проведенного из начала координат к этой плоскости, и принадлежит плоскости.

Решение. Из условия задачи следует, что вектор $\overrightarrow{ON}$ перпендикулярен искомой плоскости, где O — начало координат, N — точка, принадлежащая плоскости, и $\overrightarrow{ON}=(3, 5, 2)$. Согласно (12) уравнение плоскости, проходящей через точку N перпендикулярно вектору $\overrightarrow{ON}$, имеет вид

$$3(x-3)+5(y-5)+2(z-2)=0,$$

или

$$3x+5y+2z-38=0.$$

Пример 2.6. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки $M(0, 0, 0)$, $N(1, 1, 1)$, $K(3, 2, 1)$, и плоскостью, проходящей через точки $M(0, 0, 0)$, $N(1, 1, 1)$, $D(3, 1, 2)$.

Решение. Согласно формуле (13) для вычисления косинуса угла между плоскостями, необходимо найти координаты векторов, перпендикулярных этим плоскостям. Пусть вектор $n_1=(A_1, B_1, C_1)$ перпендикулярен первой плоскости. Тогда $n_1\perp\overrightarrow{MN}$ и $n_1\perp\overrightarrow{NK}$, и, следовательно, $n_1\cdot\overrightarrow{MN}=0$, $n_1\cdot\overrightarrow{NK}=0$. Записывая эти равенства в координатной форме, получаем систему уравнений

$$A_1+B_1+C_1=0,$$
$$3A_1+2B_1+C_1=0, \tag{*}$$

решениями которой будут неизвестные координаты вектора n_1. Так как система (*) состоит только из двух уравнений, то одно неизвестное, например C_1, можно взять в качестве свободного. Полагая его равным 1, получим $n_1=(1, -2, 1)$. Проводя аналогичные рассуждения, находим: вектор n_2, перпендикулярный второй плоскости, имеет координаты $(-1/2, -1/2, 1)$. Подставляя найденные координаты в выражение (13), получим: косинус искомого угла равен

$$\cos\varphi=\frac{-1/2+1+1}{\sqrt{6}\sqrt{3/2}}=\frac{1}{2},$$

и, следовательно, угол между плоскостями равен 60°.

Ответ: 60°.

Пример 2.7. Даны плоскость $2x+2y-z+4=0$ и прямая l, проходящая через точки $A(2, 1, 1)$ и $B(-3, 4, 0)$. Вычислить координаты точки пересечения прямой l с данной плоскостью.

Решение. Вычислим координаты вектора:

$$\overrightarrow{AB}=(-3-2, 4-1, 0-1)=(-5, 3, -1).$$

Пусть точка $M(x_0, y_0, z_0)$ является точкой пересечения данной плоскости и прямой, проходящей через точки A и B. Это значит, что, во-первых, координаты точки M удовлетворяют уравнению данной плоскости, т. е. связаны равенством

$$2x_0 + 2y_0 - z_0 + 4 = 0,$$

и, во-вторых, вектор $\overrightarrow{AM}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$:

$$\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB},$$

откуда следуют равенства

$$\begin{aligned} x_0 - 2 &= -5k, \\ y_0 - 1 &= 3k, \\ z_0 - 1 &= -k. \end{aligned} \qquad (*)$$

Решая систему уравнений (*), находим координаты точки M: $x_0 = -13$, $y_0 = 10$, $z_0 = -2$.

Ответ. $(-13, 10, -2)$.

2.14. Составить уравнение плоскости, если известно, что она проходит через начало координат и перпендикулярна вектору $\mathbf{n} = (-6, 3, 6)$.

2.15. Прямая l проходит через точки A и B. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно прямой l, для каждого из следующих случаев:

а) $A(1, 2, 3)$, $B(4, 6, 9)$;
б) $A(-1, 2, 3)$, $B(3, -2, 1)$;
в) $A(1, 0, -3)$, $B(2, -1, 1)$.

2.16. Найти угол между плоскостями:

а) $2x + y - z = 2$, $x + 2y - z = 1$; б) $3x - y - 2z = 1$, $2x + 3y - z = 2$;

в) $x - y + 3z = 2$, $-x - 3y + z = 2$.

2.17*. Дана плоскость $x - y + 2z - 1 = 0$ и прямая, проходящая через точки $A(2, 3, 0)$, $B(0, 1, 1)$. Вычислить синус угла между прямой AB и данной плоскостью.

2.18. Прямая задана точками $A(1, -1, 1)$ и $B(-3, 2, 1)$. Найти угол между прямой AB и плоскостью:

а) $6x + 2y - 3z - 7 = 0$; б) $5x - y + 8z = 0$.

2.19. Вычислить расстояние от плоскости $15x - 10y + 6z - 190 = 0$ до начала координат.

2.20. Вычислить расстояние:

а) от точки $(3, 1, -1)$ до плоскости $22x + 4y - 20z - 45 = 0$;

б) от точки $(4, 3, -2)$ до плоскости $3x - y + 5z + 1 = 0$;
в) от точки $(2, 0, -1/2)$ до плоскости $4x - 4y + 2z + 17 = 0$.

2.21. Вычислить высоту (h_S) пирамиды с вершинами $S(0, 6, 4)$, $A(3, 5, 3)$, $B(-2, 11, -5)$, $C(1, -1, 4)$.

2.22. Составить уравнение плоскости, отстоящей на расстояние 6 единиц от начала координат и отсекающей на осях координат отрезки, связанные соотношением $a : b : c = 1 : 3 : 2$.

2.23. Найти координаты точки пересечения плоскости $2x - y + z = 0$ и прямой, проходящей через данные точки $A(-1, 0, 2)$ и $B(3, 1, 2)$.

2.24. Найти точку пересечения:

а) прямой, представляющей собой линию пересечения двух плоскостей $3x - 4y = 0$ и $y - 3z = 6$ и плоскости $2x - 5y - z - 2 = 0$;

б) прямой $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и плоскости $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Уравнение сферы с центром в точке $C_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиусом R имеет вид

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2. \qquad (14)$$

Если центр сферы совпадает с началом координат, то уравнение приобретает вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (15)$$

Пример 2.8. Составить уравнение сферы, проходящей через данную точку $A(1, -1, 4)$ и касающейся координатных плоскостей.

Решение. Так как искомая сфера касается координатных плоскостей и центр сферы находится в той части пространства, для каждой точки которой $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$ (ибо в этой части расположена точка $A(1, -1, 4)$), то координаты центра будут $(R, -R, R)$. С другой стороны, так как точка A принадлежит сфере, то ее координаты удовлетворяют уравнению (14):

$$(1 - R^2) + (-1 + R)^2 + (4 - R)^2 = R^2,$$

откуда следует, что

$$R^2 - 6R + 9 = 0 \quad \text{или} \quad (R-3)^2 = 0, \text{ т. е. } R = 3.$$

Ответ. $(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$.

2.25*. Вычислить расстояние от плоскости $2x + 2y - z + 15 = 0$ до сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$.

2.26. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 - 25 = 0$ и прямая l, проходящая через точку $A(2, 1, 1)$ параллельно вектору $\mathbf{a} = (2, -4,$

—1). Вычислить координаты точек пересечения прямой l со сферой.

2.27. Найти множество точек пространства, сумма квадратов расстояний от каждой из которых до данных двух точек $A(2,\ 3,\ -1)$ и $B(1,\ -1,\ 3)$ имеет одно и то же значение m^2.

§ 3. Решение геометрических задач с помощью метода координат

Геометрические задачи этого параграфа решаются введением декартовой системы координат на плоскости или в пространстве. Приведенные ниже задачи могут быть решены и методами элементарной геометрии. Однако, как правило, эти решения требуют использования нетривиальных, искусственных приемов.

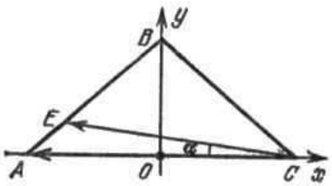


Рис. 14.1

Пример 3.1. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC| = 8$) точка E делит боковую сторону AB в отношении $3:1$ (считая от вершины B). Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{CE}$ и $\overrightarrow{CA}$, если $|CA| = 12$.

Решение. Введем систему координат Oxy так, как указано на рис. 14.1 (по свойству высоты равнобедренного треугольника $|OA| = |OC|$). Из треугольника OBC находим

$$|OB| = \sqrt{|BC|^2 - |OC|^2} = 2\sqrt{7}.$$

Поскольку $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, то $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ и координаты векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CE}$ равны соответственно

$$\overrightarrow{CA} = (-12,\ 0),\quad \overrightarrow{AB} = (6,\ 2\sqrt{7}),\ \overrightarrow{CE} = \left(-\frac{21}{2},\ \frac{\sqrt{7}}{2}\right).$$

Подставляя найденные координаты в формулу скалярного произведения векторов, получаем

$$\cos\alpha = \frac{(-12)\cdot(-21/2)}{12\sqrt{(21/2)^2 + (\sqrt{7}/2)^2}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Ответ. Искомый угол равен $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

3.1. В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB| = |BC| = 15$) точка E делит сторону BC в отношении $1:4$ (считая от

вершины B). Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AC}$, если $|AC| = 20$.

3.2. В прямоугольном треугольнике ABC угол B прямой, $|AB| = 3$, $|BC| = 4$. Вычислить угол между медианами AM и BD.

3.3. В прямоугольном треугольнике с катетами AB и BC ($|AB| = 8$, $|BC| = 6$) проведена прямая AD, делящая BC в отношении $|BD|:|DC| = 4:5$. Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3.4. В прямоугольном треугольнике с катетами BC и BA ($|BC| = 4$, $|BA| = 3$) проведена прямая AD, делящая сторону BC в отношении $|BD|:|DC| = 3:5$. Вычислить угол между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$.

3.5*. Дан прямоугольный равнобедренный треугольник ABC с прямым углом при вершине B; BS — его высота, K — середина высоты BS, а M — точка пересечения прямой AK со стороной BC. Вычислить отношение, в котором точка M делит отрезок BC.

Пример 3.2. Доказать, что если основания высот треугольника ABC соединить прямыми, то получим треугольник, для которого эти высоты будут биссектрисами.

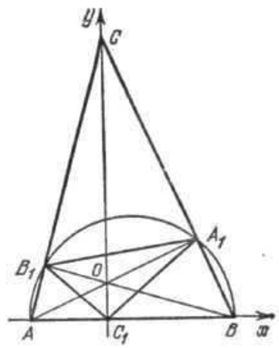


Рис. 14.2

Решение. Опустим высоты треугольника из его вершин: $AA_1 \perp BC$, $BB_1 \perp AC$ и $CC_1 \perp AB$, точку пересечения высот обозначим O. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпадало с точкой C_1, ось Ox прошла через вершину B (рис. 14.2). Тогда ось Oy пройдет через вершину C. Пусть координаты вершин треугольника таковы: $A(-a,\ 0)$, $B(b,\ 0)$, $C(0,\ c)$. Докажем, что высота C_1C — биссектриса угла $A_1C_1B_1$.

Уравнение прямой, проходящей через точки A и C, имеет вид

$$y = \frac{c}{a}x + c. \qquad (*)$$

Уравнение прямой, проходящей через точки B и O перпендикулярной прямой AC, имеет вид

$$y = -\frac{a}{c}x + \frac{ab}{c} \qquad (**)$$

(при получении последнего уравнения использовано соотношение между угловыми коэффициентами двух взаимно перпендикулярных прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$). Решая систему уравнений (*) и (**), находим координаты точки пересечения этих прямых (точки B_1):

$$B_1\left(\frac{a(ab-c^2)}{a^2+c^2}, \frac{ac(a+b)}{a^2+c^2}\right).$$

Аналогично, записывая уравнения прямых, проходящих через пары точек B, C и A, O, находим координаты точки A_1:

$$A_1\left(\frac{b(c^2-ab)}{b^2+c^2}, \frac{bc(a+b)}{b^2+c^2}\right).$$

Записывая уравнения прямых, проходящих через пары точек A_1, C_1 и B_1, C_1, находим угловые коэффициенты этих прямых:

$$k_{A_1C_1} = \frac{c(a+b)}{c^2-ab}, \quad k_{B_1C_1} = \frac{c(a+b)}{ab-c^2},$$

откуда следует, что $k_{B_1C_1} = -k_{A_1C_1}$. Так как угловой коэффициент представляет собой тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси Ox, то получаем

$$\widehat{BC_1B_1} = \pi - \widehat{BC_1A_1},$$

откуда следует, что $\widehat{AC_1B_1} = \widehat{BC_1A_1}$. Так как прямая C_1C перпендикулярна прямой AB, то $\widehat{B_1C_1C} = \widehat{A_1C_1C}$, т. е. высота C_1C треугольника ABC действительно является биссектрисой треугольника $A_1B_1C_1$.

Аналогично можно доказать, что и другие две высоты треугольника ABC являются биссектрисами соответствующих углов треугольника $A_1B_1C_1$.

3.6. На высоте CC_1 треугольника ABC дана произвольная точка P. Прямые AP и BP пересекают стороны BC и CA соответственно в точках A_1 и B_1. Доказать, что луч C_1P является биссектрисой угла $A_1C_1B_1$.

3.7*. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами a и b, $C = 90°$. Составить уравнение множества точек M, для которых

$$|MA|^2 + |MB|^2 = 2|MC|^2.$$

3.8. В плоскости прямоугольника $ABCD$ дана точка M. Доказать, что

$$|MA|^2 + |MC|^2 = |MB|^2 + |MD|^2.$$

3.9. Окружность вписана в ромб с углом 60°. Расстояние от центра окружности до ближайшей вершины равно 1. Доказать, что для любой точки P окружности имеет место равенство

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 + |PD|^2 = 11.$$

3.10. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки M, взятой на диаметре некоторой окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд постоянна.

3.11. Около окружности описан квадрат $ABCD$. Из вершин квадрата к произвольной прямой, касающейся окружности, проведены перпендикуляры AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Доказать, что

$$|AA_1| \cdot |CC_1| = |BB_1| \cdot |DD_1|.$$

3.12. Дан равносторонний треугольник ABC и окружность, проходящая через вершины A и B, центр которой D симметричен вершине C относительно прямой AB. Доказать, что если M — произвольная точка этой окружности, то из отрезков MA, MB, MC можно составить прямоугольный треугольник.

3.13. В окружность вписан прямоугольник $ABCD$. Из произвольной точки P окружности проведены перпендикуляры к прямым AB, BC, CD и DA, пересекающие эти прямые соответственно в точках K, L, M и N. Доказать, что точка N — ортоцентр треугольника KLM.

3.14. В квадрат вписана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Найти эту сумму.

3.15. Около квадрата описана окружность. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки окружности до вершин квадрата не зависит от выбора точки на окружности. Найти эту сумму.

Если объектом задачи является куб или прямоугольный параллелепипед, то наиболее удобной является система координат, начало которой находится в одной из вершин нижнего основания этих тел, а координатные оси проходят через ребра, выходящие из этой вершины.

Пример 3.3. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка AE равна 1/3. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна 1/4. Через центр куба O_1 и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние ρ от вершины B_1 до плоскости α.

Решение. Выберем систему координат так, чтобы ее начало совпало с точкой A, а оси Ox, Oy и Oz проходили через ребра AB, AD и AA_1 соответственно. В этой системе координат

$$F\left(1, \frac{1}{4}, 0\right), \quad E\left(0, 0, \frac{1}{3}\right), \quad O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Составим уравнение секущей плоскости α. Пусть вектор $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ перпендикулярен искомой плоскости. Так как векторы

$$\overrightarrow{EF} = \left(-1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right), \quad \overrightarrow{EO_1} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

принадлежат искомой плоскости, то, используя условие перпендикулярности пар векторов $\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{EF}$ и $\boldsymbol{n}$, $\overrightarrow{EO_1}$, получим следующую систему уравнений для n_1, n_2, n_3:

$$-n_1 - \frac{n_2}{4} + \frac{n_3}{3} = 0,$$

$$-\frac{n_1}{2} + \frac{n_2}{4} + \frac{n_3}{2} = 0.$$

Считая n_3 свободным неизвестным, получим $n_1 = \frac{5}{9} n_3$ и $n_2 = -\frac{8}{9} n_3$. Полагая $n_3 = 9$ в качестве вектора, перпендикулярного искомой плоскости, получаем вектор $\boldsymbol{n} = (5, -8, 9)$. Уравнение плоскости, проходящей через точку $E(0, 0, 1/3)$ перпендикулярно вектору $\boldsymbol{n} = (5, -8, 9)$, будем иметь вид

$$5x - 8y + 9z - 3 = 0.$$

Координатами точки B_1 в выбранной декартовой системе координат будут $(1, 0, 1)$. Вычислим расстояние от точки $B_1(1, 0, 1)$ до плоскости:

$$5x - 8y + 9z - 3 = 0.$$

Пусть $M(x_0, y_0, z_0)$ — точка основания перпендикуляра к данной плоскости, проходящего через точку B_1. Вычислим координаты точки M. Так как эта точка принадлежит плоскости, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости:

$$5x_0 - 8y_0 + 9z_0 - 3 = 0. \tag{*}$$

С другой стороны, вектор $\overrightarrow{B_1M}$ перпендикулярен данной плоскости, и, следовательно, вектор $\overrightarrow{B_1M}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}$:

$$\overrightarrow{B_1M} = k\boldsymbol{n}.$$

Последнее равенство в координатной форме дает следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} x_0 - 1 &= 5k, \\ y_0 &= -8k, \\ z_0 - 1 &= 9k. \end{aligned} \tag{**}$$

Решая систему уравнений (*), (**), находим координаты точки M

$$x_0 = \frac{115}{170}, \quad y_0 = -\frac{88}{170}, \quad z_0 = \frac{71}{170}$$

и длину вектора $|B_1M| = \frac{11}{\sqrt{170}}$, которая и является искомым расстоянием от точки B_1 до плоскости.

Ответ. $11/\sqrt{170}$.

3.16. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре BC взята точка E так, что длина отрезка BE равна 1/4. На ребре C_1D_1 взята точка F так, что длина отрезка FD_1 равна 2/5. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины A_1 до плоскости α.

3.17. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре AB взята точка E так, что длина отрезка BE равна 2/5. На ребре CC_1 взята точка F так, что длина отрезка FC равна 2/3. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α. Найти расстояние от вершины A до плоскости α.

3.18. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ равна 1. На ребре MM_1 взята точка A так, что длина отрезка AM равна 3/5. На ребре K_1N_1 взята точка B так, что длина отрезка K_1B равна 1/3. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Точка P — проекция вершины N на плоскость α. Найти длину отрезка BP.

3.19. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка AL равна 3/4. На ребре MM_1 взята точка B так, что длина отрезка MB равна 3/5. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Найти длину отрезка BP, где точка P — проекция вершины N на плоскость α.

3.20. Длина ребра куба $KLMNK_1L_1M_1N_1$ равна 1. На ребре KL взята точка A так, что длина отрезка KA равна 1/4. На ребре MM_1 взята точка B так, что длина отрезка M_1B равна 2/5. Через центр куба и точки A и B проведена плоскость α. Точка P — проекция вершины K_1 на плоскость α. Найти длину отрезка AP.

3.21. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$; точка K — середина ребра AA_1, L — центр грани CC_1D_1D. Найти угол между плоскостями BKL и AD_1C.

3.22*. Найти площадь сечения куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер B_1C_1 и D_1C_1. Ребро куба равно a.

3.23.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a точка K—середина ребра AB, точка L — середина ребра DD_1. Найти стороны треугольника A_1KL и определить, в каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершины этого треугольника.

3.24. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a последовательно соединены середины ребер AA_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1C, CD, DA и AA_1. Доказать, что полученная фигура есть правильный шестиугольник, и определить его площадь.

3.25. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины ребер BC и B_1C_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям куба, с прямыми A_1E, DF, AD_1. Найти:

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину ребра AA_1;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

3.26. В куб вписана сфера. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки сферы до вершин куба не зависит от выбора точки. Найти эту сумму.

Пример 3.4. Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Вычислить величину угла треугольника и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

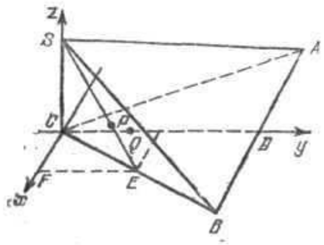


Рис. 14.3

Решение. Введем прямоугольную систему координат, приняв за начало координат точку C, за ось ординат — прямую CD (точка D — середина AB), за ось аппликат — прямую CS, за ось абсцисс — прямую, принадлежащую плоскости треугольника ABC и перпендикулярную прямой CD, а за единицу масштаба — отрезок, длина которого равна 1 (рис. 14.3). В этой системе

координат векторы $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{SE}$ (точка E — середина стороны CB) имеют следующие координаты:

$$\overrightarrow{CD}=\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\,|CB|,\ 0\right)=(0,\ 2\sqrt{6},\ 0),$$

$$\overrightarrow{SE}=\left(\frac{|AB|}{4},\ \frac{|CD|}{2},\ -|CS|\right)=(\sqrt{2},\ \sqrt{6},\ -2).$$

Поэтому

$$\cos(\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{SE})=\frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{SE}}{|\overrightarrow{CD}|\cdot|\overrightarrow{SE}|}=\frac{12}{2\sqrt{6}\cdot\sqrt{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

и, следовательно, искомый угол равен 45°.

Пусть PQ — общий перпендикуляр к прямым SE и CD ($P\in SE$, $Q\in CD$). Тогда существуют такие числа α и β, что $\overrightarrow{SP}=\alpha\cdot\overrightarrow{SE}$, $\overrightarrow{CQ}=\beta\cdot\overrightarrow{CD}$. Ясно, что

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PS}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CQ}=-\alpha\overrightarrow{SE}-\overrightarrow{CS}+\beta\overrightarrow{CD},$$

или, в координатном виде,

$$\overrightarrow{PQ}=(-\alpha\sqrt{2},\ -\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot 2\sqrt{6},\ 2\alpha-2).$$

Так как $PQ\perp CD$ и $PQ\perp SE$, то $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{SE}=0$. Последние два векторных уравнения в координатной форме имеют вид

$$(-\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot 2\sqrt{6})\cdot 2\sqrt{6}=0,$$

$$-\alpha\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}+(-\alpha\sqrt{6}+\beta\cdot 2\sqrt{6})\cdot\sqrt{6}+(2\alpha-2)(-2)=0,$$

или

$$\alpha=2\beta,$$

$$-3\alpha+3\beta+1=0,$$

откуда $\alpha=2/3$, $\beta=1/3$. Таким образом,

$$\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3},\ 0,\ -\frac{2}{3}\right),\qquad |PQ|=\sqrt{\frac{8}{9}+\frac{4}{9}}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Ответ. Величина угла равна $\pi/4$, искомое расстояние равно $2/\sqrt{3}$.

3.27. Основанием пирамиды $SABC$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длина гипотенузы AB которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды SC перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна 2. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра AC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.

3.28. Основанием пирамиды $HPQR$ является равносторонний треугольник PQR, длина стороны которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро HR перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 1. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра QR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.

3.29. Основанием пирамиды $HPQR$ является равнобедренный прямоугольный треугольник PQR, длина гипотенузы PQ которого равна $2\sqrt{2}$. Боковое ребро пирамиды перпендикулярно плоскости основания, и его длина равна 1. Найти величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку H и середину ребра PR, а другая проходит через точку R и середину ребра PQ.

3.30. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1.

а) Один из этих отрезков проведен через такую точку M диагонали BC_1, что $|BM|:|BC_1| = 1:3$. Найти его длину.

б) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

3.31. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, а боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали основания BD и боковом ребре SC, параллельные плоскости грани SAD. Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

§ 4. Простейшие задачи векторной алгебры

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются равными, если:

1) длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна длине вектора $\overrightarrow{CD}$;

2) лучи $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ одинаково направлены.

При таком определении равенства векторов множества всех векторов, равных $\overrightarrow{AB}$, называют *свободным вектором*. Понятие свободного вектора AB можно связать также с отображением пространства на себя, при котором все точки пространства перемещаются в одном и том же направлении (направление AB) на одно и то же расстояние (длину AB). Так определенный свободный вектор называется также *параллельным переносом*, который полностью определяется упорядоченной парой несовпадающих точек A, B.

Любая пара совпадающих точек определяет тождественное отображение пространства или *нулевой вектор*.

Линейными операциями над векторами называются операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — два ненулевых вектора. Отложим вектор $\mathbf{a}$ от некоторой точки 0 и обозначим его конец буквой A (рис. 14.4). Отложим от точки A вектор $\mathbf{b}$ и обозначим его конец буквой B. Вектор $\mathbf{c}$ с началом в точке 0 и концом в точке B ($\overrightarrow{OB}=\mathbf{c}$) называют *суммой* векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}.$$

Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$;

2) $\mathbf{c}+(\mathbf{a}+\mathbf{b})=(\mathbf{c}+\mathbf{a})+\mathbf{b}$;

3) $\mathbf{a}+0=\mathbf{a}$.

Приведенное выше правило сложения векторов называется *правилом треугольника* (сумма векторов представляется третьей стороной треугольника, в то время как слагаемые образуют две другие стороны треугольника, см. рис. 14.4). Наряду с этим правилом существует так называемое *правило параллелограмма*, при котором слагаемые векторы

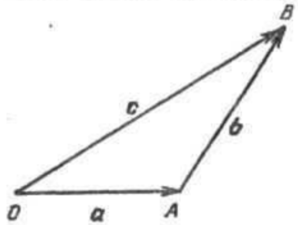


Рис. 14.4

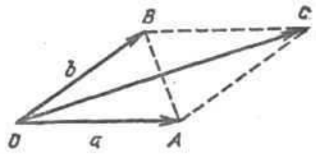


Рис. 14.5

откладываются от одной точки, через их концы проводятся прямые, достраивающие фигуру до параллелограмма (рис. 14.5), диагональ которого, проходящая через общее начало векторов, и равна сумме векторов.

Вектором, *противоположным* вектору $\mathbf{a}$, называют вектор $(-\mathbf{a})$ такой, что сумма векторов $\mathbf{a}$ и $-\mathbf{a}$ равна нулевому вектору:

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=0.$$

Ненулевые противоположные векторы имеют равные длины и противоположные направления.

Разность двух векторов $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ есть сумма вектора $\mathbf{a}$ и вектора, противоположного вектору $\mathbf{b}$, т. е.

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

Разность векторов может быть получена с помощью правила треугольника. Отложим от точки A вектор $\mathbf{a}$ (рис. 14.6); получим $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$. От конца вектора $\overrightarrow{AB}$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}=-\mathbf{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}=\mathbf{c}$ — разность векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}.$$

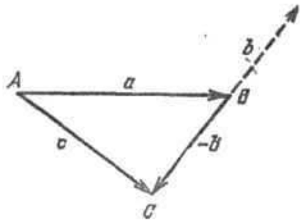


Рис. 14.6

Вектор разности двух векторов может быть также выражен второй диагональю параллелограмма BA (рис. 14.5).

Произведением ненулевого вектора $\mathbf{a}$ на число $\lambda \neq 0$ называют вектор, имеющий направление вектора $\mathbf{a}$, если λ положительно, и противоположное направление, если λ отрицательно; длина этого вектора равна произведению длины вектора $\mathbf{a}$ на абсолютное значение (модуль числа) λ.

Свойства операции умножения вектора на число:

1) $(\lambda_1\lambda_2)\mathbf{a}=\lambda_1(\lambda_2\mathbf{a})$;

2) $\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}$, $(\lambda_1+\lambda_2)\mathbf{a}=\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{a}$;

3) $0\cdot\mathbf{a}=0$;

4) $\lambda 0=0$.

Два ненулевых вектора называются *коллинеарными*, если они параллельны одной прямой. Для коллинеарности двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

необходимо и достаточно, чтобы существовало число $\lambda \neq 0$, удовлетворяющее равенству

$$b = \lambda a. \qquad (1)$$

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору

Пример 4.1. В трапеции $ABCD$ вектор $\overrightarrow{BC} = \lambda\overrightarrow{AD}$. Доказать, что вектор $p = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$.

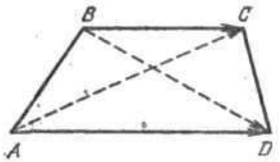


Рис. 14.7

Решение. Согласно определениям суммы и разности векторов представим векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ в виде (рис. 14.7)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD},$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.$$

Для вектора p тогда справедливо следующее представление,

$$p = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = (\lambda + 1)\,\overrightarrow{AD}.$$

Это соотношение доказывает коллинеарность векторов p и $\overrightarrow{AD}$.

4.1. Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, параллельная диагонали BD, которая пересекает прямую AD в точке E; точка Q — точка пересечения диагоналей параллелограммами. Выразить через векторы $\overrightarrow{DC}$ и CQ сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CE}$.

4.2. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, причем K — середина BC, L — середина AD. Обозначим $\overrightarrow{AK} = a$, $\overrightarrow{AL} = b$. Выразить векторы $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$ через a и b.

4.3. В трапеции $ABCD$ отношение длины основания BC к длине основания AD равно n. Диагонали трапеции пересекаются в точке O. Выразить вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$.

4.4. Даны три ненулевых вектора a, b, c, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если $a + b$ коллинеарен вектору c, а $b + c$ коллинеарен вектору a.

4.5. Точки M, N, P и Q лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$, причем $|AM|:|MB| = |BN|:|NC| = |CP|:|PD| = |DQ|:|QA|$. Доказать, что $MNPQ$ — параллелограмм.

Если векторы a и b неколлинеарны, то из равенства $\alpha a + \beta b = 0$ следует, что $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Пример 4.2. Векторы a и b неколлинеарны. Найти значения λ и μ, если известно, что векторы

$$c = \lambda a + \mu b \quad \text{и} \quad d = (\mu + 1)\,a + (2 - \lambda)\,b$$

равны.

Решение. Из равенства векторов c и d следует

$$\lambda a + \mu b = (\mu + 1)\,a + (2 - \lambda)\,b$$

или

$$(\mu + 1 - \lambda)\,a + (2 - \lambda - \mu)\,b = 0.$$

Но, так как a и b неколлинеарны, то справедливы уравнения

$$\mu + 1 - \lambda = 0,$$
$$2 - \lambda - \mu = 0.$$

Решая эту систему, находим $\lambda = 3/2$; $\mu = 1/2$.

Ответ: $\lambda = 3/2$; $\mu = 1/2$.

4.6. Векторы a и b неколлинеарны. Найти λ, если векторы $(\lambda - 1)a + 2b$ и $3a + \lambda b$ коллинеарны.

4.7. Векторы a и b неколлинеарны. Найти значение α, при котором векторы $(\lambda - 2)a + b$ и $(2\lambda + 1)a - b$ будут коллинеарны.

4.8. Векторы a и b неколлинеарны. Найти значения λ и μ, при которых справедливо равенство

$$2u - v = w,$$

если $u = \lambda a + 2\mu b$, $v = -2\mu a + 3\lambda b$, $w = 4a - 2b$.

Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если они параллельны одной и той же плоскости. Если среди трех векторов есть хотя бы один нулевой, то такие векторы также считаются компланарными.

Если три вектора a, b, c некомпланарны, то из равенства

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0 \qquad (2)$$

следует, что $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$.

Если векторы a и b неколлинеарны, то любой вектор c, компланарный с векторами a и b, можно единственным образом представить в виде

$$c = \alpha a + \beta b.$$

Если векторы a, b, c некомпланарны, то любой вектор d можно единственным образом представить в виде

$$d = \alpha a + \beta b + \gamma c.$$

Три ненулевых вектора a, b, c компланарны тогда и только тогда, когда существуют три числа α, β, γ, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha a + \beta b + \gamma c = 0. \qquad (3)$$

Пример 4.3. Даны три некомпланарных вектора a, b и c. Доказать, что векторы $a + 2b - c$, $3a - b + c$, $-a + 5b - 3c$ компланарны.

Решение. Согласно критерию компланарности трех векторов, достаточно найти три числа α, β, γ, удовлетворяющих условиям

$$\alpha\,(a + 2b - c) + \beta\,(3a - b + c) + \gamma\,(-a + 5b - 3c) = 0, \qquad (*)$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0. \qquad (**)$$

Условие (**) эквивалентно тому, что по крайней мере одно число α, β или γ не равно нулю.

Преобразуем (*) к виду

$$(\alpha+3\beta-\gamma)\,\boldsymbol{a}+(2\alpha-\beta+5\gamma)\,\boldsymbol{b}+(-\alpha+\beta-3\gamma)\,\boldsymbol{c}=0.$$

Так как $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ некомпланарны, то согласно (2) α, β, γ должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \alpha+3\beta-\gamma&=0,\\ 2\alpha-\beta+5\gamma&=0,\\ -\alpha+\beta-3\gamma&=0. \end{aligned} \qquad (***)$$

Одним из ненулевых решений системы (***) будет тройка чисел $\alpha=-2$, $\beta=1$, $\gamma=1$.

Тем самым доказано, что $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$, $3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $-\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}$ компланарны.

4.9. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Вычислить значение k, при котором векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+k\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}$ компланарны.

4.10. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}$ компланарны.

4.11. Даны три некомпланарных вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. Найти числа p и q, при которых векторы $p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}+p\boldsymbol{b}+q\boldsymbol{c}$ коллинеарны.

4.12. Даны четыре ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, каждые три из которых некомпланарны. Найти их сумму, если $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=p\boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=q\boldsymbol{a}$.

Пример 4.4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложить векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$ по векторам $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$ и $\overrightarrow{DB_1}$.

Решение. Введем вспомогательные некомпланарные векторы $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AA_1}$, $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}$, $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AD}$; выразим через них векторы $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$ и искомые векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$.

Согласно правилам сложения и вычитания векторов имеем

$$\overrightarrow{DA_1}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{DC_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\quad \overrightarrow{DB_1}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}, \qquad (*)$$

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{a}. \qquad (**)$$

Из равенств (*) выражаем векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ через $\overrightarrow{DA_1}$, $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DB_1}$. Имеем

$$\boldsymbol{a}=\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{DC_1},\quad \boldsymbol{b}=\overrightarrow{DB_1}-\overrightarrow{DA_1},\quad \boldsymbol{c}=-\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{DC_1}.$$

Подставляя значения $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ в (**), получаем искомые представления.

Ответ.

$$\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DA_1}-\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{DC_1},$$

$$\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{DB_1}-\overrightarrow{DA_1})+(-\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{DC_1})=-\overrightarrow{DA_1}+\overrightarrow{DC_1},$$

$$\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{DB_1}-\overrightarrow{DA_1})-(-\overrightarrow{DB_1}+\overrightarrow{DC_1})=-\overrightarrow{DA_1}+2\overrightarrow{DB_1}-\overrightarrow{DC_1}.$$

4.13. В тетраэдре $OABC$ точки M и N — середины ребер $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$. Разложить векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$ и $\overrightarrow{MN}$ по векторам $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$.

4.14. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ диагонали грани BB_1C_1C пересекаются в точке M. Разложить векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{A_1M}$ по векторам $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BC}$.

4.15. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Разложить вектор $\overrightarrow{AA_1}$ по векторам $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ называется *базисом* в множестве всех векторов пространства.

Всякий вектор может быть единственным образом представлен в виде

$$\boldsymbol{a}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3. \qquad (4)$$

Упорядоченная тройка чисел (x_1, x_2, x_3) называется ***координатами*** вектора $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$. Запись (4) называют ***разложением*** вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Пример 4.5. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{C_1D}$ в базисе векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$ (рис. 14.8).

Решение. Вектор $\overrightarrow{C_1D}$ равен вектору $\overrightarrow{B_1A}$ (рис. 14.8), который в свою очередь равен

$$\overrightarrow{B_1A}=-\overrightarrow{AB_1}=-(\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}).$$

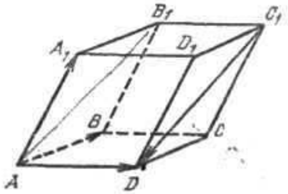


Рис. 14.8

Таким образом, координаты вектора $\overrightarrow{C_1D}$ имеют вид $(0, -1, -1)$.

Ответ. $(0, -1, -1)$.

4.16. Задан тетраэдр $OABC$, точки D и E — середины ребер $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BC}$ соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{DE}$ в базисе $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

4.17. В тетраэдре $OABC$ F — точка пересечения медиан основания ABC. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OF}$ в базисе $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

4.18. В тетраэдре $OABC$ медиана AL грани ABC делится точкой M в отношении $|AM|:|ML| = 3:7$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$.

4.19. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина грани DD_1C_1C (точка пересечения диагоналей). Найти координаты вектора AM в базисе из векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

4.20. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M делит ребро CC_1 в отношении $|CM|:|MC_1| = 1:2$, точка N делит ребро A_1D_1 пополам. Найти координаты вектора $\overrightarrow{NM}$ в базисе из векторов $\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

§ 5. Геометрические задачи, решаемые методами векторной алгебры

Методы векторной алгебры основаны на единственности разложения вектора на плоскости по двум неколлинеарным векторам и на единственности разложения вектора в пространстве по трем некомпланарным векторам.

Приведенные ниже задачи можно условно разбить на два типа: на «прямые» задачи и на «обратные». Прямыми задачами будем называть задачи, в которых постулируется принадлежность трех точек одной прямой или принадлежность четырех точек одной плоскости. В этих задачах обычно требуется установить или проверить некоторые соотношения между длинами отрезков.

В обратных задачах требуется, как правило, установить, что при определенных соотношениях между длинами отрезков некоторые три точки A, B, C принадлежат одной прямой или некоторые четыре точки A, B, C, D принадлежат одной плоскости, а также иногда требуется доказать, что некоторые прямые пересекаются в одной точке.

Решение прямых задач на плоскости основано на проверке векторной формулы

$$\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}, \tag{1}$$

выполнение которой при некотором действительном k означает, что три точки A, B, C лежат на одной прямой, или на проверке формулы

$$\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB},$$

где A, B, C — точки одной прямой, а O — произвольная точка.

Пример 5.1. Дан параллелограмм $ABCD$. Прямая l пересекает прямые AB, AC и AD соответственно в точках B_1, C_1 и D_1.

Доказать, что если $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3\overrightarrow{AC}$, то

$$\frac{1}{\lambda_0} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}$$

(прямая задача).

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ (рис. 14.9). Тогда $\overrightarrow{AB_1} = \lambda_1\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AD_1} = \lambda_2\boldsymbol{b}$ и $\overrightarrow{AC_1} = \lambda_3(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Так как три точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой l, то справедливо следующее равенство:

$$\overrightarrow{B_1C_1} = k\overrightarrow{B_1D_1}, \tag{*}$$

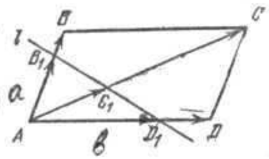


Рис. 14.9

но

$$\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AC_1} - \overrightarrow{AB_1} = (\lambda_3 - \lambda_1)\,\boldsymbol{a} + \lambda_3\boldsymbol{b},$$
$$\overrightarrow{B_1D_1} = \overrightarrow{AD_1} - \overrightarrow{AB_1} = -\lambda_1\boldsymbol{a} + \lambda_2\boldsymbol{b}.$$

Подставив разложение векторов $\overrightarrow{B_1C_1}$ и $\overrightarrow{B_1D_1}$ по неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в соотношение (*), получим

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\,\boldsymbol{a} + \lambda_3\boldsymbol{b} = k\lambda_2\boldsymbol{b} - k\lambda_1\boldsymbol{a}.$$

На основании единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получим систему

$$\lambda_3 - \lambda_1 = -k\lambda_1,$$
$$\lambda_3 = k\lambda_2.$$

Исключив коэффициент k, найдем соотношение между λ_1, λ_2 и λ_3:

$$\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \lambda_1\lambda_2.$$

Разделив последнее равенство почленно на $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, имеем

$$\frac{1}{\lambda_3} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2},$$

что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример обратной задачи.

Пример 5.2. На стороне ON параллелограмма $AMNO$ и на его диагонали OM взяты такие точки B и C, что

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON}, \quad \overrightarrow{OC} = \frac{1}{n+1}\overrightarrow{OM}.$$

Доказать, что точки A, B и C лежат на одной прямой.

Решение. Выразим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ через векторы $\overrightarrow{ON}$ $\vec{A}$ (рис. 14.10):

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA},\quad \overrightarrow{AB}=\frac{1}{n}\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}.$$

Так как $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}$ и, следовательно,

$$\frac{1}{n+1}\overrightarrow{OM}=\frac{1}{n+1}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON}),$$

то

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{n+1}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{ON})-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{n+1}\overrightarrow{ON}-\frac{n}{n+1}\overrightarrow{OA}.$$

Сравнивая разложения векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OA}$, получаем

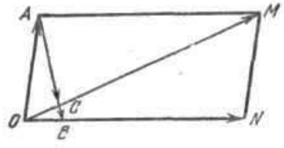


Рис. 14.10

$$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{AC},\quad \text{где } \lambda=\frac{n+1}{n}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ коллинеарны и имеют общее начало, то три точки A, B, C лежат на одной прямой.

5.1. На прямых BC, CA, AB, определяющих треугольник ABC, взяты соответственно точки L, M и N, лежащие на одной прямой. Доказать, что если

$$\overrightarrow{BL}=\alpha\overrightarrow{LC},\quad \overrightarrow{CM}=\beta\overrightarrow{MA},\quad \overrightarrow{AN}=\gamma\overrightarrow{NB},$$

то $\alpha\beta\gamma=-1$ (*теорема Менелая*).

5.2. Дан треугольник MNP. На прямых MN, NP, PM взяты точки A, B и C так, что $\overrightarrow{MA}=\alpha\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NB}=\beta\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PC}=\gamma\overrightarrow{CM}$. Доказать, что если $\alpha\beta\gamma=-1$, то точки A, B, C лежат на одной прямой (*обратная теорема Менелая*).

5.3. Прямые a и b параллельны. На прямой a взяты произвольные точки A_1, A_2, A_3, на прямой b — произвольные точки B_1, B_2, B_3. На отрезках A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 взяты такие точки C_1, C_2, C_3, что

$$|A_1C_1|=\alpha|A_1B_1|,\quad |A_2C_2|=\alpha|A_2B_2|,\quad |A_3C_3|=\alpha|A_3B_3|.$$

Доказать, что точки C_1, C_2, C_3 расположены на одной прямой.

5.4. Точки C_1, C_2, C_3 делят отрезок AB на четыре части; D — произвольная точка плоскости. Выразить векторы $\overrightarrow{DC_1}$, $\overrightarrow{DC_2}$, $\overrightarrow{DC_3}$ через векторы $\overrightarrow{DA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{DB}=\boldsymbol{b}$.

5.5. Даны три точки M, A, B, а четвертая — точка C — взята так, что $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$. Выразить вектор $\overrightarrow{MC}$ через векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$.

5.6. На плоскости взяты три точки A, B, M. На отрезке AB взята такая точка C, что $|AC|:|CB|=k$. Выразить вектор $\overrightarrow{MC}$ через $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$.

Пример 5.3. Если точка A пересечения диагоналей четырехугольника $MNPQ$ и середины B, C его противоположных сторон MN, PQ лежат на одной прямой, то $MNPQ$—трапеция или параллелограмм (рис. 14.11).

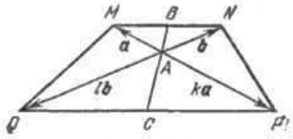


Рис. 14.11

Решение. Положим $\overrightarrow{AM}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{AN}=\boldsymbol{b}$. Тогда $\overrightarrow{AP}=k\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{AQ}=l\boldsymbol{b}$. Так как B — середина отрезка MN, то

$$\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

Аналогично

$$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AP}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}).$$

По условию точки A, B, C лежат на одной прямой, и поэтому существует такое число m, что $\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}$, т. е.

$$\frac{m}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\frac{1}{2}(k\boldsymbol{a}+l\boldsymbol{b}),$$

или

$$\frac{m-k}{2}\boldsymbol{a}+\frac{m-l}{2}\boldsymbol{b}=0,$$

откуда следует, что $m=k=l$. Тогда

$$\overrightarrow{MN}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a},\quad \overrightarrow{PQ}=l\boldsymbol{b}-k\boldsymbol{a}=-k(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

т. е. $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{MN}$. Следовательно, $PQ\parallel MN$, т. е. $MNPQ$ — трапеция или параллелограмм.

5.7. Точка пересечения средних линий четырехугольника совпадает с точкой пересечения его диагоналей. Доказать, что четырехугольник — параллелограмм.

5.8. Доказать, что середины оснований трапеции и точка пересечения продолжений ее боковых сторон принадлежат одной прямой.

5.9. Точка M — середина отрезка AB, точка M' — середина отрезка $A'B'$. Доказать, что середины отрезков AA', BB' и MM' расположены на одной прямой.

5.10. Доказать, что середины сторон произвольного четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

5.11. Доказать, что в произвольном четырехугольнике:

а) средние линии, пересекаясь, делятся пополам; б) отрезок, соединяющий середины диагоналей, проходит через точку пересечения средних линий и делится в этой точке пополам.

Решение ряда задач основано на использовании формулы

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}), \qquad (2)$$

где A, B, C — произвольные точки, не лежащие на одной прямой; M — центр тяжести треугольника ABC; O — произвольная точка.

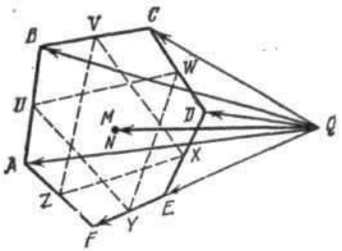


Рис. 14.12

Пример 5.4. Пусть $ABCDEF$ — произвольный шестиугольник и U, V, W, X, Y, Z — середины его сторон. Доказать, что центры тяжести треугольников UWY и VXZ совпадают (рис. 14.12).

Решение. Так как точки U, V, W, X, Y и Z — середины сторон шестиугольника, то

$$\overrightarrow{OU}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\quad \overrightarrow{OV}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),$$

$$\overrightarrow{OW}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),$$

$$\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}),\quad \overrightarrow{OY}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}),\quad \overrightarrow{OZ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}),$$

где O — произвольная точка. Обозначая через M и N центры тяжести треугольников UWY и VXZ, имеем по формуле (2)

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OU}+\overrightarrow{OW}+\overrightarrow{OY})=$$
$$=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}),$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OV}+\overrightarrow{OX}+\overrightarrow{OZ})=$$
$$=\frac{1}{6}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}).$$

Таким образом, $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}$, откуда следует, что точка M совпадает с точкой N.

5.12. Дан треугольник ABC. Доказать, что равенство $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{0}$ имеет место в том и только том случае, когда O — центр тяжести треугольника ABC.

5.13. а) Пусть M и N — центры тяжести треугольников ABC и DEF. Доказать, что

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=3\overrightarrow{MN}.$$

б) Пусть A, B, C, D, E, F — произвольные точки плоскости. Доказать, что

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}.$$

5.14. Точка M — центр тяжести треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{CM}$.

5.15. Через центр тяжести треугольника ABC проведена прямая l, пересекающая стороны AC и BC соответственно в точках P и Q. Доказать, что

$$\frac{|AP|}{|PC|}+\frac{|BQ|}{|QC|}=1.$$

5.16. Вершины A_1, B_1, C_1 треугольника ABC принадлежат соответственно сторонам A_1, B_1 и C_1 треугольника ABC, причем центры тяжести обоих треугольников совпадают. Доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 делят стороны треугольника ABC в равных отношениях.

При решении задач, связанных с вычислением отношения площадей некоторых плоских фигур, используется следующее *свойство площадей треугольников*. Если площадь треугольника ABC равна S и на сторонах AC и BC этого треугольника выбраны соответственно точки M и N так, что

$$|CM|:|CA|=k_1,\quad |CN|:|CB|=k_2,$$

то площадь треугольника MCN равна k_1k_2S.

Пример 5.5. В треугольнике ABC на стороне AB взята точка K так, что $|AK|:|BK|=1:2$, а на стороне BC взята точка L так, что $|CL|:|BL|=2:1$. Точка Q — точка пересечения прямых AL и CK. Найти площадь треугольника ABC, если известно, что площадь треугольника BQC равна 1.

Решение. Пусть $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}$ (рис. 14.13). Так как $|BL|:|LC|=1:2$, то на основании сформулированного выше свойства площадей получаем $S_{BQL}=1/3$, $S_{LQC}=2/3$.

Найдем отношение $|QL|:|AL|$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне AC, пересечет сторону AB в точке M, при этом $AM:MB = 2:1$ и $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a}$. Прямая, проходящая через точку L параллельно стороне AB, пересечет сторону AC в точке N, при этом $AN:NC = 1:2$ и $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\boldsymbol{b}$. Отсюда

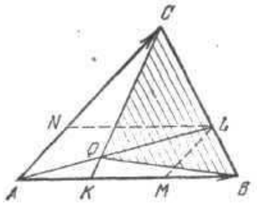


Рис. 14.13

$$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\boldsymbol{a} + \frac{1}{3}\boldsymbol{b}.$$

Так как векторы $\overrightarrow{AQ}$ и $\overrightarrow{AL}$ коллинеарны (точки A, Q, L лежат на одной прямой), то

$$\overrightarrow{AQ} = \mu\overrightarrow{AL} = \frac{\mu}{3}(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}). \qquad (*)$$

Аналогично для точки K можно показать, что

$$\overrightarrow{CK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}(\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{CQ} = \lambda\overrightarrow{CK} = \frac{\lambda}{3}(\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}).$$

Но $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CQ}$, откуда

$$\frac{\mu}{3}(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b} + \frac{\lambda}{3}(\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}).$$

Из условия единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получаем систему уравнений $2\mu = \lambda$, $\mu = 3 - 3\lambda$, из которой находим $\mu = 3/7$.

Теперь можно найти отношение $|QL|:|AL|$. Имеем

$$\frac{|QL|}{|AL|} = \frac{|AL| - |AQ|}{|AL|} = 1 - \frac{|AQ|}{|AL|},$$

и по равенству (*) $\frac{|QL|}{|AL|} = 1 - \mu = \frac{4}{7}$. Отсюда $\frac{S_{ABC}}{S_{QBC}} = \frac{1}{1-\mu} = \frac{7}{4}$ и так как $S_{QBC} = 1$, то искомая площадь треугольника равна 7/4.

Ответ. 7/4.

5.17. В треугольнике ABC, площадь которого равна 6, на стороне AB взята точка K, делящая эту сторону в отношении $|AK|:|BK| = 2:3$, а на стороне AC — точка L, делящая AC в отношении $|AL|:|LC| = 5:3$. Точка Q пересечения прямых CK и BL отстоит от прямой AB на расстояние 1,5. Найти длину стороны AB.

5.18. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно; $|AB| = 5|AM|$, $|BC| = 3|BN|$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O. Найти отношение площадей треугольников OAC и ABC.

5.19. Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении $3:1$, считая от вершины. В каком отношении прямая делит площадь треугольника ABC?

5.20. На каждой медиане треугольника взята точка, делящая медиану в отношении $1:3$, считая от вершины. Найти отношение площади треугольника с вершинами в этих точках к площади исходного треугольника.

Решение некоторых задач предполагает использование вектора $\boldsymbol{c}$, коллинеарного биссектрисе угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Удобным представлением вектора $\boldsymbol{c}$ является следующее:

$$\boldsymbol{c} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} + \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}. \qquad (3)$$

5.21. В треугольнике ABC даны стороны a, b, c. Найти $\overrightarrow{AA_1}$, где AA_1 — биссектриса внутреннего угла A треугольника.

5.22. В треугольнике ABC медиана BD пересекается с биссектрисой AF в точке O. Отношение площади треугольника DOA к площади треугольника BOF равно 3/8. Найти $|AC|:|AB|$.

5.23. В треугольнике ABC биссектриса AA_1 делит сторону BC в отношении $|BD|:|CD| = 2:1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

5.24. Биссектрисы AD и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Найти отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$.

Решение некоторых задач основано на использовании следующего векторного соотношения. Если A, B, C, D — четыре точки, принадлежащие одной плоскости, а O — произвольная точка пространства, то

$$\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \alpha - \beta)\overrightarrow{OC}, \qquad (4)$$

где $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5.25. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Плоскость пересекает прямые AB, AD, AA_1, AC_1 соответственно в точках B_0, D_0, A_0, C_0. Доказать, что если $\overrightarrow{AC_0} = \lambda_1\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{AB_0} = \lambda_2\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AD_0} = \lambda_3\overrightarrow{AD_1}$, $AA_0 = \lambda_4\overrightarrow{AA_1}$, то

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4}.$$

5.26. Точки K, L, M, N взяты соответственно на сторонах OA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3O неплоского четырехугольника $OA_1A_2A_3$, причем

$$\overrightarrow{OK}=\alpha\overrightarrow{KA},\quad \overrightarrow{A_1L}=\beta\overrightarrow{LA_2},\quad \overrightarrow{A_2M}=\gamma\overrightarrow{MA_3},\quad \overrightarrow{A_3N}=\delta\,\overrightarrow{NO}.$$

Доказать, что для принадлежности четырех точек K, L, M и N одной плоскости необходимо и достаточно выполнение равенства $\alpha\beta\gamma\delta=1$.

5.27. Даны два треугольника $A_1A_2A_3$ и $A_4A_5A_6$, не лежащие в одной плоскости. Доказать, что векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$ компланарны, если M, N, P, Q, R и S — середины отрезков A_1A_2, A_4A_5, A_2A_3, A_5A_6, A_3A_1, A_6A_4 соответственно.

5.28. Даны два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, не лежащие в одной плоскости; M и N — середины сторон AC и BC, а M_1 и N_1 — середины сторон A_1C_1 и B_1C_1. Доказать, что если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, то векторы $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{NN_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ компланарны.

5.29. Даны две скрещивающиеся прямые m и n. На прямой m даны точки P, Q, R, а на прямой n — точки P_1, Q_1, R_1, причем $\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{P_1Q_1}=k\overrightarrow{P_1R_1}$. Доказать, что прямые PP_1, QQ_1, RR_1 параллельны одной плоскости.

При решении задач, связанных с отношением объемов частей тетраэдра, образующихся при сечении его некоторой плоскостью, часто используется следующее утверждение: если объем тетраэдра $ABCD$ равен V и на его ребрах DA, DB, DC взяты соответственно точки M, N, P так, что

$$|DM|=k_1|DA|,\quad |DN|=k_2|DB|,\quad |DP|=k_3|DC|,$$

то объем тетраэдра $MNPD$ равен $k_1k_2k_3V$.

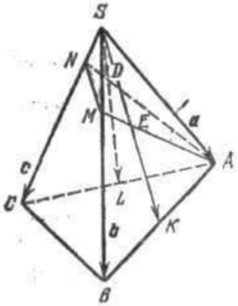


Рис. 14.14

Пример 5.6. Плоскость проходит через вершину A основания треугольной пирамиды $SABC$ и делит пополам медиану SK треугольника SAB, а медиану SL треугольника SAC пересекает в такой точке D, что $2|SD|=|DL|$. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Решение. Обозначим $\overrightarrow{SA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{SB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{SC}=\boldsymbol{c}$ (рис. 14.14). Очевидно, что $k_1=\dfrac{a}{a}=1$. Пусть $\overrightarrow{SM}=k_2\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{SN}=k_3\boldsymbol{c}$, где M и N — точки пересечения плоскости сечения с ребрами SB и SC соответственно. Найдем k_2 и k_3. Для этого воспользуемся равенствами

$$\overrightarrow{SE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SK}=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}),\quad \overrightarrow{SD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SL}=\frac{1}{6}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}).$$

Обозначая $\overrightarrow{SM}=k_2\boldsymbol{b}$, согласно (4) вектор $\overrightarrow{SM}$ можно представить в виде

$$\overrightarrow{SM}=\alpha\boldsymbol{a}+\frac{\beta}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\frac{1}{6}(1-\alpha-\beta)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}).$$

Используя единственность разложения вектора по трем некомпланарным векторам, получим систему уравнений

$$0=\frac{5}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta+\frac{1}{6},\quad k_2=\frac{1}{4}\beta,\quad 0=\frac{1}{6}(1-\alpha-\beta),$$

из которой находим $k_2=1/3$.

Аналогично из уравнений

$$\overrightarrow{SN}=k_3\boldsymbol{c},\quad \overrightarrow{SN}=\left(\frac{5}{6}\alpha+\frac{\beta}{12}+\frac{1}{6}\right)\boldsymbol{a}+\frac{\beta}{4}\boldsymbol{b}+\frac{1}{6}(1-\alpha-\beta)\boldsymbol{c}$$

находим $k_3=1/5$.

На основании сформулированного выше утверждения получаем

$$V_{SAMN}=1\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}V_{SABC},$$

и, следовательно, объем оставшейся части пирамиды равен $\dfrac{14}{15}V_{SABC}$. Таким образом, искомое отношение объемов равно $1:14$.

Ответ. $1:14$.

5.30. В трехгранном угле с вершиной S проведены параллельные сечения ABC и $A_1B_1C_1$. Обозначая через V, V_1, V_2, V_3 соответственно объемы тетраэдров $SABC$, $SA_1B_1C_1$, SA_1BC, SAB_1C_1, показать, что

$$V_2=\sqrt[3]{V^2\cdot V_1}\quad\text{и}\quad V_2\cdot V_3=V\cdot V_1.$$

5.31. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Через середины ребер AB, AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

5.32. Объем пирамиды $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка

MC равно 2/3. Вычислить площадь сечения пирамиды указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

5.33. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB и SC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L и M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если известно, что $|SK|:|KA| = |SL|:|LB| = 2$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

5.34. В треугольной пирамиде $SABC$ все ребра равны. На ребре SA взята точка M так, что $SM = MA$, на ребре SB — точка N так, что $3SN = SB$. Через точки M и N проведена плоскость, параллельная медиане AD основания ABC. Найти отношение объема треугольной пирамиды, отсекаемой от исходной проведенной плоскостью, к объему пирамиды $SABC$.

§ 6. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется произведение длин этих векторов на косинус угла между векторами:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}). \qquad (1)$$

Необходимым и достаточным *условием перпендикулярности* двух ненулевых векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0. \qquad (2)$$

Если $\varphi=(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$, то

$$\text{при } 0\leqslant\varphi<\frac{\pi}{2} \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0; \quad \text{при } \frac{\pi}{2}<\varphi\leqslant\pi \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0. \qquad (3)$$

Скалярное произведение вектора на себя равно квадрату его длины:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2. \qquad (4)$$

Свойства скалярного произведения:

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$ (коммутативный закон);

$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ (ассоциативный закон);

$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ (дистрибутивный закон).

Пример 6.1. Известно, что векторы $3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ и $2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ перпендикулярны между собой и векторы $\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b}$ и $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ также взаимно перпендикулярны. Найти угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Решение. По условию задачи

$$(3\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0,$$
$$(\boldsymbol{a}+4\boldsymbol{b})\cdot(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=0.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}6\boldsymbol{a}^2-7\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{b}^2&=0,\\ -\boldsymbol{a}^2-3\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{b}^2&=0,\end{aligned} \qquad (*)$$

т. е. получены два уравнения относительно трех неизвестных $\boldsymbol{a}^2$, $\boldsymbol{b}^2$ и $\boldsymbol{ab}$. Согласно (1) косинус угла между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ вычисляется по формуле

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \qquad (**)$$

Из уравнений (*) находим

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{19}{43}\boldsymbol{a}^2, \quad \boldsymbol{b}^2=\frac{25}{43}\boldsymbol{a}^2. \qquad (***)$$

Возводя обе части равенства (**) в квадрат и подставляя значения (***), получаем

$$\cos^2(\widehat{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}})=\frac{19^2}{25\cdot 43},$$

или

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}})=\frac{19}{5\sqrt{43}}, \quad \cos(\widehat{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}})=-\frac{19}{5\sqrt{43}}.$$

Ответ. $\arccos\dfrac{19}{5\sqrt{43}}$ или $\arccos\left(-\dfrac{19}{5\sqrt{43}}\right)$.

6.1. Дано: $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=4$, $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=2\pi/3$. Вычислить: а) $\boldsymbol{a}^2$; б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2$; в) $(3\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})$.

6.2. Зная, что $|\boldsymbol{a}|=3$, $|\boldsymbol{b}|=1$, $|\boldsymbol{c}|=4$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$, вычислить $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

6.3. Какому условию должны удовлетворять векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, чтобы имело место равенство $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$?

6.4. Доказать, что вектор $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{ac})\boldsymbol{b}$ перпендикулярен вектору $\boldsymbol{a}$.

6.5. Доказать, что если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы, причем $\boldsymbol{a}$ не перпендикулярен $\boldsymbol{c}$, то существует такое число k, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}+k\boldsymbol{c}$ перпендикулярны друг другу. Найти k.

Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ являются сторонами ABC, то из равенства $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$ следует равенство

$$\boldsymbol{c}^2=\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},$$

представляющее собой векторную запись теоремы косинусов. Задачи 6.6—6.21 решаются с использованием векторной записи теоремы косинусов.

6.6. В треугольнике ABC проведена медиана CC_1. Доказать, что если $|BC|>|AC|$, то угол CC_1B тупой.

6.7. Доказать, что угол C треугольника ABC будет острым, прямым или тупым в зависимости от того, будет ли медиана

CC_1, проведенная из вершины C, больше, равна или меньше $\frac{1}{2}|AB|$.

6.8. а) Найти длину медианы $|AD|$ треугольника ABC, зная длины сторон $|AC|=b$, $|AB|=c$ и величину угла A.

б) Найти длину биссектрисы $|AE|$ треугольника, зная длины сторон $|AC|=b$, $|AB|=c$ и величину угла A.

6.9. Известны стороны треугольника ABC. Найти:

а) длину медианы $|AD|=m_a$;

б) длину биссектрисы $|AE|=l_a$.

6.10. В треугольнике ABC угол B прямой, медианы $|AD|$ и $|BE|$ взаимно перпендикулярны. Найти величину угла C.

6.11. В треугольнике ABC на сторонах BC и AC соответственно выбраны точки D и E так, что $|BD|=|DC|$, $|AE|=2|CE|$. Найти $|BC|:|AB|$, если известно, что $AD\perp BE$ и $\widehat{ABC}=60°$.

6.12. В четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине A равен 120°, а диагональ AC является биссектрисой этого угла. Известно, что $|AC|=\frac{1}{5}|AB|=\frac{1}{3}|AD|$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CD}$.

6.13. Доказать, что если для треугольника ABC имеет место равенство $a^2+b^2=2c^2$, то $am_a+bm_b=2cm_c$, где m_a, m_b, m_c — длины медиан треугольника, a, b, c — длины его сторон.

6.14. В треугольнике ABC проведен отрезок A_1B_1, параллельный стороне AB, где точки A_1 и B_1 лежат соответственно на сторонах AC и BC. Показать, что если $|AB_1|=|BA_1|$, то треугольник ABC равнобедренный.

6.15. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1 и BB_1. Доказать, что если $\widehat{C}+(\widehat{\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{BB_1}})=180°$, то $|CA|^2+|CB|^2=2|AB|^2$.

6.16. Доказать, что если G — центр тяжести треугольника ABC, а O — некоторая точка пространства, то

$$|OA|^2+|OB|^2+|OC|^2=3|OG|^2+|AG|^2+|BG|^2+|CG|^2$$

(*теормеа Лейбница*).

6.17. Доказать, что если O — центр описанной около треугольника ABC окружности и H — его ортоцентр, то:

1) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$;

2) $|OH|^2=9R^2-(a^2+b^2+c^2)$;

3) $|AH|=2R|\cos\widehat{A}|$.

6.18. Доказать, что центр O описанной окружности, центр тяжести треугольника G и ортоцентр H произвольного треугольника принадлежат одной прямой (*прямая Эйлера*), причем $|OG|:|GH|=1:2$.

6.19. Доказать, что расстояние от центра O окружности, описанной около треугольника ABC, до его центра тяжести G определяется формулой

$$|OG|^2=R^2-\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

6.20. Доказать, что если Q — произвольная точка, H — ортоцентр и O — центр описанной окружности треугольника ABC, то

$$\overrightarrow{QO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QH}).$$

6.21. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$. Доказать, что если $|AB|^2+|CD|^2=4R^2$, где R — радиус описанной окружности, то диагонали четырехугольника перпендикулярны.

С помощью скалярного произведения можно доказать справедливость некоторых неравенств для тригонометрических функций углов треугольника.

Пример 6.2. Доказать, что для всякого треугольника ABC выполняется неравенство

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant -3/2.$$

Решение. Пусть точка O — центр описанной около треугольника ABC окружности с радиусом, равным R. Очевидно, что $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})^2\geqslant 0$. Раскрыв скобки, получим

$$\overrightarrow{OA}^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}^2+2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}^2\geqslant 0.$$

Так как центральный угол, образованный радиусами OA и OB, вдвое больше угла C, вписанного в окружность, то

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=R^2\cos 2C.$$

Аналогично

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=R^2\cos 2B,\quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=R^2\cos 2A.$$

Так как $\overrightarrow{OA}^2=\overrightarrow{OB}^2=\overrightarrow{OC}^2=R^2$, то последнее неравенство принимает вид

$$2R^2(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)+3R^2\geqslant 0,$$

или

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C\geqslant -3/2,$$

что и требовалось доказать.

6.22. Доказать, что для углов всякого треугольника ABC выполняется неравенство

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant 3/2.$$

6.23. Доказать, что для углов всякого треугольника ABC выполняется неравенство

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leqslant 9/4.$$

6.24. Доказать, что для углов всякого треугольника ABC справедливо неравенство

$$\cos 2A + \cos 2B - \cos 2C \leqslant 3/2.$$

При каком условии неравенство обращается в равенство?

6.25. Доказать, что для любого трехгранного угла с плоскими углами α, β, γ выполняется неравенство

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -3/2.$$

ГЛАВА 15

КОМБИНАТОРИКА. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Размещения. Сочетания. Перестановки

Пусть дано множество, состоящее из n различных элементов $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Выберем из него множество, содержащее r элементов, т. е. сделаем *выборку* объема r. Выборки могут отличаться друг от друга как составом, так и порядком расположения элементов. Если допустить, что среди элементов выборки есть одинаковые, то объем выборки в отдельных случаях может превышать объем исходного множества.

Примером таких выборок служат телефонные номера. Пусть номер состоит из 12 цифр, а телефонный диск содержит 10 цифр; тогда при наборе номера осуществляется выборка 12 элементов из множества, содержащего 10 элементов. Так как диск после набора каждой цифры возвращается в исходное положение, то цифры телефонного номера могут повторяться. Это означает, что выборка может содержать одинаковые элементы.

Число различных выборок объема r, элементы которых могут повторяться, из исходного множества, содержащего n различных элементов, равно n^r. Если элементы выборки не повторяются, то ее объем не может превысить объем исходного множества. Число различных выборок объема r с неповторяющимися элементами из исходного множества объема n равно

$$A_n^r = n(n-1)\ldots(n-r+1); \tag{1}$$

A_n^r указывает число различных *размещений* из n элементов по r позициям. Если $n = r$, то различные выборки отличаются только порядком элементов. Такие выборки называются *перестановками* из n элементов. Число различных перестановок

$$P_n = n(n-1)\ldots 1 = n! \tag{2}$$

В некоторых задачах порядок элементов в выборке несуществен. Например, при выборе трех человек в президиум собрания, состоящего из 200 человек, или при покупке в магазине пяти наименований продуктов из имеющихся там 100 наименований продуктов. В этом случае выборки одного состава (т. е. выборки, элементы которых совпадают) считаются неразличимыми. Число выборок различного состава объема r из множества объема n равно:

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{P_r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}; \qquad (3)$$

C_n^r называется числом *сочетаний* из n элементов по r.

Пример 1.1. Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?

Решение. Исходное множество в этой задаче состоит из двух элементов: точки и тире. Так как используется пять символов, то выборка содержит пять элементов, которые могут повториться. Таким образом, число различных выборок, каждая из которых представляет какую-нибудь букву, равно $2^5 = 32$.

Ответ. 32 буквы.

1.1*. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров?

1.2*. Сколько существует различных телефонных номеров, если считать, что каждый номер содержит не более семи цифр (телефонный номер может начинаться с нуля)?

1.3. Пусть буквы некоторой азбуки образуются как последовательности точек, тире и пробелов. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 5 символов?

1.4. В некотором государстве нет двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения государства (наибольшее число зубов 32)?

1.5. Пусть $p_1, \dots, p_m$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число $q = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, где $k_1, \dots, k_m$ — некоторые натуральные числа (делители 1 и q включаются)?

1.6. Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр?

1.7*. Сколько существует различных исходов эксперимента, связанного с n бросаниями монеты? (Исходы двух экспериментов считаются различными, если очередность выпадения гербов в этих экспериментах не совпадает с очередностью выпадения цифр.)

1.8. Сколько существует таких перестановок семи учеников, при которых три определенных ученика находятся рядом друг с другом?

1.9. На книжной полке стоит собрание сочинений в 30 томах. Сколькими различными способами их можно переставить, чтобы:

в) тома 1 и 2 стояли рядом;

б) тома 3 и 4 рядом не стояли?

1.10*. Сколько различных аккордов можно взять на десяти выбранных клавишах рояля, если каждый аккорд содержит от трех до десяти звуков?

1.11*. Собрание из 40 человек избирает председателя, секретаря и 5 членов некоторой комиссии. Сколько различных комиссий может быть составлено?

Если требуется определить число различных выборок, составленных из нескольких разнородных групп элементов, то удобно считать, что элементы каждой группы выбираются из своего исходного множества, т. е. что число различных исходных множеств совпадает с числом различных групп, элементы которых представлены в выборке. Так, например, пусть требуется составить сборную команду восьми областей, состоящую из 24 спортсменов, в которую от каждой области войдет 3 спортсмена. Эта выборка содержит 24 элемента, которые набираются из восьми исходных множеств, причем из каждого отдельного множества выбирается 3 элемента.

Пример 1.2. В урне m белых и n черных шаров. Сколькими способами можно выбрать из урны r шаров, из которых белых будет k штук? (Считается, что шары каждого цвета различны, например, пронумерованы.)

Решение. k белых шаров из m белых шаров можно выбрать C_m^k числом способов, а оставшиеся $r-k$ черных шаров из группы в n штук — числом способов C_n^{r-m}. При этом каждому способу выбора k белых шаров соответствует C_n^{r-k} различных способов выбора черных. Следовательно, общее число различных выборок равно произведению $C_m^k C_n^{r-k}$.

Ответ. $C_m^k C_n^{r-k}$.

1.12. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

1.13. В колоде 36 карт, из них 4 туза. Сколькими способами можно сделать 6 карт так, чтобы среди них было 2 туза?

1.14. Комплексная бригада состоит из 2-х маляров, 3-х штукатуров и 1-го столяра. Сколько различных бригад можно создать из рабочего коллектива, в котором 15 маляров, 10 штукатуров и 5 столяров?

1.15. В лотерее «Спортлото» разыгрываются 6 из 48 видов спорта. Главный выигрыш падает на ту карточку, где угаданы правильно все 6 номеров. (Каждый вид спорта указан под некоторым номером.) Меньшие призы достаются тем, кто угадал 5, 4 и даже 3 номера из 6. Сколько может быть различных карточек, где угаданы: а) 5, б) 4, в) 3 из 6 номеров, если на каждой карточке произвольно зачеркиваются 6 номеров? (Карточки, из которых вычеркиваются одни и те же номера, считаются одинаковыми.)

1.16. Сколько окружностей можно провести через 10 точек, из которых никакие четыре не лежат на одной окружности и никакие три не лежат на одной прямой, если каждая окружность проходит через три точки?

1.17*. Из колоды, содержащей 52 карты (из них 4 туза), вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт будет хотя бы один туз?

1.18. Сколькими способами из колоды в 52 карты (из них 4 туза и 4 короля) можно вынуть 6 карт, содержащих туза и короля одной масти?

1.19. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить 4 смешанные пары?

1.20*. Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в каждом числе содержалась одна цифра 1?

1.21. Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 так, чтобы в каждом числе содержалась цифра 1? (Цифры в числе не должны повторяться.)

§ 2. Перестановки и сочетания с заданным числом повторений

Рассмотрим выборки, отдельные элементы которых повторяются заданное число раз. Пусть выборка состоит из m элементов, среди которых некоторый элемент (будем для определенности считать его первым) повторяется n_1 раз, другой (второй) — n_2 раз и т. д., k-й элемент повторяется n_k раз. Очевидно, что

$$n_1+n_2+\ldots+n_k=m.$$

Набор натуральных чисел $(n_1, \ldots, n_k)$ будем называть *составом выборки*. Состав выборки определяет, из скольких различных групп элементов состоит выборка и сколько одинаковых элементов каждой группы в ней присутствует. Так, например, выборка состава (1, 2, 4) состоит из трех групп элементов, при-

чем из первой группы в выборке присутствует 1 элемент, из второй — 2, а из третьей — 4 одинаковых элемента.

Число различных выборок одного состава называется числом *перестановок* из m элементов с заданным числом повторений $n_1, \ldots, n_k$. Это число вычисляется по формуле

$$p_m(n_1, \ldots, n_k)=\frac{m!}{n_1!\ldots n_k!}. \qquad (1)$$

Пример 2.1. Требуется составить расписание отправления поездов на различные дни недели. При этом необходимо, чтобы: 3 дня отправлялись по 2 поезда в день, 2 дня — по 1 поезду в день, 2 дня — по 3 поезда в день. Сколько можно составить различных расписаний?

Решение. Количество поездов, отправляемых в день (числа 1, 2, 3), — это три группы одинаковых элементов, из которых должна быть составлена выборка. При этом в расписании на неделю число 1 повторяется 2 раза, число 2 повторяется 3 раза и число 3 повторяется 2 раза. Число различных расписаний равно

$$p(2,\ 3,\ 2)=\frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=210.$$

Число различных составов выборки объема m, образованной из k групп одинаковых элементов, равно *)

$$\overline{C}_k^m=C_{k+m-1}^m=\frac{(k+m-1)!}{m!\,(k-1)!}. \qquad (2)$$

Пример 2.2. R шаров следует разместить по k ящикам. Сколькими способами это можно сделать? (Считается, что вместимость ящика достаточна для всех шаров.)

Решение. Для удобства будем считать, что имеется k ящиков, в каждом из которых число шаров может меняться от 0 до R. Тогда, считая, что каждый ящик соответствует группе однородных элементов, имеем k различных групп, из которых набирается выборка с повторением объема R. Различные способы размещения шаров соответствуют различным составам указанной выше выборки, т. е.

$$C_{R+k-1}^R=\frac{(R+k-1)!}{R!\,(k-1)!}.$$

*) Формулу (2) можно получить, если подсчитать число перестановок с повторениями из $m+k-1$ элементов, где m — число элементов исходной выборки, а $k-1$ — число границ, отделяющих группы одинаковых элементов.

2.1. Сколько различных комбинаций букв можно получить из букв слова «МИССИСИПИ»?

2.2*. Сколько различных наборов по 8 пирожных в каждом можно составить, используя 4 сорта пирожных?

2.3*. Лифт с семью пассажирами останавливается на 10 этажах. На каждом этаже может выйти определенное число пассажиров (от нуля до семи). Сколько может быть различных способов освобождения лифта? (Способы различаются только числом людей, вышедших на данном этаже.)

2.4*. При игре в бридж между четырьмя игроками распределяется колода карт в 52 листа по 13 карт каждому игроку. Сколько существует различных способов раздать карты?

2.5*. Сколькими способами при бросании 12 игральных костей каждое из значений 2, 3, 4, 5, 6 выпадает дважды?

2.6*. Имеются m белых и n черных шаров, причем $m > n$. Сколькими способами можно все шары разложить в ряд так, чтобы никакие два черных шара не лежали рядом?

2.7*. При бросании монеты будем считать успехом выпадение герба и неудачей выпадение цифры. Сколько различных испытаний могло привести к 52 успехам при 100 подбрасываниях монеты? (Испытанием считается серия опытов из 100 бросаний; два испытания считаются различными, если не совпадают результаты хотя бы двух бросаний.)

2.8*. 12 ученикам выданы 2 варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить учеников в два ряда так, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был один и тот же вариант?

2.9*. На книжной полке стоят книги по математике и по логике — всего 20 книг. Доказать, что наибольшее количество вариантов комплекта, содержащего 5 книг по математике и 5 книг по логике, возможно в том случае, когда число книг на полке по каждому предмету равно 10.

§ 3. Бином Ньютона

Натуральная степень суммы двух величин вычисляется по формуле

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + C_n^n b^n. \quad (1)$$

Правая часть формулы называется *разложением степени бинома*. Коэффициенты $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ называются *биномиальными коэффициентами*. Общий вид слагаемых в правой части формулы

(1) обычно записывается в виде *)

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad (2)$$

Число всех слагаемых равно $n+1$.

Пример 3.1. Найти член разложения $\left(x + \frac{1}{x^4}\right)^{10}$, не содержащий x (т. е. содержащий x в нулевой степени).

Решение. Согласно формуле общего члена (2) имеем

$$T_k = C_{10}^k x^{10-k} \left(\frac{1}{x^4}\right)^k.$$

По условию число k должно удовлетворять уравнению

$$10 - k - 4k = 0. \quad (*)$$

Единственным корнем уравнения $(*)$ является $k = 2$. Таким образом, искомым будет второй член разложения:

$$T_2 = C_{10}^2 x^8 \frac{1}{x^8} = C_{10}^2 = 45.$$

Ответ. 45.

Пример 3.2. Найти шестой член разложения $(y^{1/2} + x^{1/3})^n$, если биномиальный коэффициент третьего от конца члена равен 45.

Решение. Найдем сначала степень бинома. Согласно условию задачи число n удовлетворяет уравнению

$$C_n^{n-2} = C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} = 45,$$

корнями которого являются $n_1 = 10$, $n_2 = -9$. Так как $n_2 = -9$ не является натуральным числом, то степенью бинома будет $n = 10$, следовательно, шестой член разложения представляется в виде

$$T_6 = C_{10}^6 (y^{1/2})^4 (x^{1/2})^6 = C_{10}^4 y^2 x^3 = 210 y^2 x^3.$$

Ответ. $210y^2x^3$.

3.1*. Найти сумму биномиальных коэффициентов, если степень бинома равна 10.

3.2. Найти номер члена разложения $(x + x^{-2})^{12}$, не содержащего x.

---

*) Используют также формулу

$$T_k = C_n^k a^{n-k} b^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} a^{n-k} b^k.$$

3.3*. Найти член разложения бинома $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^{-3}}\right)^n$, содержащий $x^{6,5}$, если девятый член разложения имеет наибольший коэффициент.

3.4. Найти член разложения $\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x^2}\right)^8$, который содержит x^2.

3.5*. Доказать, что сумма всех коэффициентов разложения $(2y-x)^k$ при любом натуральном k равна 1.

3.6. Биномиальные коэффициенты второго и девятого членов разложения $(5x^{-3/2}-x^{1/3})^n$ равны. Найти член разложения, не содержащий x.

3.7.** Найти наибольший член разложения $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^{100}$.

3.8. Найти номер наибольшего члена разложения

$$\left(\frac{9}{10}+\frac{1}{10}\right)^{100}.$$

3.9*. Сумма биномиальных коэффициентов разложения равна 1024. Найти член разложения $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$, содержащий x в 11-й степени.

3.10*. Доказать, что если степень бинома n — нечетное число, то сумма биномиальных коэффициентов членов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах.

3.11. В разложении бинома

$$\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{3}}-\frac{b}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^n$$

определить член, содержащий a^3, если сумма биномиальных коэффициентов членов, стоящих на нечетных местах, равна 2048.

3.12. Найти наибольший член разложения $(\sqrt{5}+\sqrt{2})^{20}$.

3.13. Третье слагаемое разложения $\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^m$ не содержит x. При каких x это слагаемое равно второму слагаемому разложения $(1+x^3)^{30}$?

3.14*. При каких положительных значениях x наибольшим слагаемым в разложении $(5+3x)^{10}$ является четвертое?

3.15*. Найти x, при котором пятидесятый член разложения $(x+y)^{100}$ имеет наибольшее значение, если известно, что $(x+y)=1$, $x>0$, $y>0$.

3.16. Найти x, при котором k-й член разложения $(x+y)^n$ имеет наибольшее значение, если $x+y=1$ и $x>0$, $y>0$.

Пример 3.3. В разложении бинома

$$(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})^5$$

найти члены, не содержащие иррациональности.

Решение. Воспользуемся формулой общего члена разложения

$$T_k=C_5^k(\sqrt[3]{3})^{5-k}(\sqrt{2})^k=C_5^k\cdot 3^{\frac{5-k}{3}}2^{\frac{k}{2}}.$$

Полученное выражение будет рациональным, если $\frac{5-k}{3}$ и $\frac{k}{2}$ — целые числа. Очевидно, что число k следует искать среди четных чисел, меньших 5. Непосредственной проверкой убеждаемся, что единственное значение, которое оно может принимать, равно двум. Следовательно, в разложении бинома есть только один член удовлетворяющий сформулированному условию:

$$T_2=C_5^2\cdot 3\cdot 2=6\cdot\frac{5\cdot 4}{2}=60.$$

Ответ. 60.

3.17. Найти члены, не содержащие иррациональности в разложении $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$.

3.18*. Сколько рациональных членов содержится в разложении $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}$?

3.19.** В разложении бинома $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$ первые три коэффициента образуют арифметическую прогрессию. Найти все рациональные члены разложения.

3.20*. Доказать, что

$$1-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\ldots+(-1)^nC_n^n=0.$$

3.21. Сравнивая коэффициенты при x в обеих частях равенства

$$(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n},$$

доказать, что

$$C_n^kC_m^0+C_n^{k-1}C_m^1+\ldots+C_n^0C_m^k=C_{m+n}^k.$$

3.22. Воспользовавшись результатом предыдущей задачи, найти сумму квадратов биномиальных коэффициентов. Доказать, что сумма квадратов биномиальных коэффициентов равна C_{2n}^n.

3.23*. Доказать, что справедливо равенство

$$1-10C_{2n}^{1}+10^{2}C_{2n}^{2}-10^{3}C_{2n}^{3}+\ldots-10^{2n-1}C_{2n}^{1}+10^{2n}=(81)^{n}.$$

Некоторые формулы комбинаторики можно получить, дифференцируя или интегрируя обе части разложения для $(1+x)^n$, которое справедливо при всех x.

Пример 3.4. Доказать, что справедливо равенство

$$nC_n^0+(n-1)C_n^1+\ldots+C_n^{n-1}=n\cdot 2^{n-1}.$$

Решение. Дифференцируя биномиальное разложение для $(1+x)^n$, имеем

$$\left(x^n+C_n^1x^{n-1}+\ldots+C_n^n\right)'=nx^{n-1}+(n-1)C_n^1x^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1}.$$

С другой стороны, справедливо равенство

$$[(1+x)^n]'=n(1+x)^{n-1}.$$

Подставляя в тождество

$$n(1+x)^{n-1}=nx^{n-1}+(n-1)C_n^1x^{n-2}+\ldots+C_n^{n-1}$$

значение $x=1$, получаем требуемое равенство:

$$n\cdot 2^{n-1}=nC_n^0+(n-1)C_n^1+\ldots+C_n^{n-1}.$$

3.24. Доказать, что

$$n(n-1)C_n^0+(n-1)(n-2)C_n^1+\ldots+2C_n^{n-2}.$$

3.25*. Доказать, что

$$\frac{C_n^0}{n+1}+\frac{C_n^1}{n}+\frac{C_n^2}{n-1}+\ldots+\frac{C_n^n}{1}=\frac{2}{n+1}\left(2^n-\frac{1}{2}\right).$$

3.26*. Доказать, что

$$nC_n^0-(n-1)C_n^1+(n-2)C_n^2-(n-3)C_n^3+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}=0.$$

3.27*. Доказать, что

$$\frac{C_n^1}{n}-\frac{C_n^2}{n-1}+\ldots-\frac{(-1)^nC_n^n}{2}=\begin{cases}0, & n=2l,\\ \dfrac{2}{n+1}, & n=2l+1.\end{cases}$$

3.28*. Упростить выражение $P_1+2P_2+\ldots+nP_n$.

3.29*. Доказать, что

$$C_n^m+C_{n-1}^m+\ldots+C_{n-10}^m=C_{n+1}^{m+1}-C_{n-10}^{m+1}.$$

3.30. Доказать неравенство $C_{2n+x}^nC_{2n-x}^n\leqslant\left(C_{2n}^n\right)^2$.

§ 4. Вычисление вероятностей событий с помощью формул комбинаторики

Пусть в лотерее, где разыгрывается 10 билетов, принимает участие несколько человек. На каждом билете пишется имя одного из участников, после чего все билеты тщательно перемешиваются. Затем наугад выбирают один билет, и тот, чье имя записано на билете, получает приз. Спрашивается, каковы шансы получить приз некоторому участнику лотереи? Если имя этого участника написано только на одном билете, то у него один шанс из десяти. Если на двух, то два из десяти, и т. д.

Извлечение любого билета с именем этого участника считается благоприятным исходом. Число таких исходов, очевидно, совпадает с числом билетов, на которых написано его имя. Шансы данного участника на выигрыш будут определяться долей благоприятных исходов среди всех равновозможных исходов эксперимента. Для того чтобы найти эту долю, требуется число благоприятных исходов разделить на число всех исходов эксперимента.

При многократном проведении эксперимента его результаты показывают, что отношение чисел исходов, при которых данный участник выигрывает, к числу всех исходов эксперимента оказывается близким к доле тех билетов, на которых написано имя участника, среди всех билетов, разыгрываемых в лотерее. Поэтому вероятностью выигрыша естественно считать отношение числа благоприятных исходов к числу всех возможных исходов эксперимента.

Подойдем теперь к понятию вероятности более формально. Для этого введем следующее определение: будем называть *элементарным событием* любой из равновозможных исходов эксперимента (в приведенном выше примере элементарным исходом будет извлечение одного из билетов). Множество всех равновозможных исходов назовем *пространством элементарных событий*, а каждое элементарное событие — *точкой* этого пространства (в приведенном выше примере пространство элементарных событий состоит из 10 точек).

Совокупность элементарных событий, объединяющая все те исходы, при которых происходит событие A, называют *множеством элементарных событий, благоприятных событию* B. *Вероятностью* события A называют отношение числа благоприятных ему элементарных событий к числу всех возможных элементарных событий. Если число исходов, благоприятных событию A, равно m, а число всех точек, составляющих пространство элементарных событий, равно n, то вероятность $P(A)$ события A

выразится дробью

$$P(A) = m/n. \qquad (1)$$

В задачах, где число всех возможных элементарных событий конечно, число элементарных событий, благоприятных событию A, может быть найдено непосредственно.

Пример 4.1. В классе, состоящем из 20 учеников, 15 человек занимаются в математическом кружке. Какова вероятность, что наудачу выбранный ученик окажется членом математического кружка?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный ученик является членом математического кружка. Тогда число элементарных событий, благоприятных событию A, равно 15. Число всех элементарных событий в данном случае равно 20. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(A) = 15/20 = 3/4.$$

Ответ. 3/4.

Пример 4.2. Бросают две игральные кости. Какое событие более вероятно: сумма очков на выпавших гранях равна 11 или сумма очков на выпавших гранях равна 4?

Решение. Поставим в соответствие исходу эксперимента упорядоченную пару чисел (x, y), где x означает число очков, выпавших на первой кости, а y — на второй. Пространство всех элементарных событий состоит из множества пар (x, y), где x и y принимают значения от 1 до 6. Число таких пар равно 36. Событию A, состоящему в том, что сумма очков, выпавших на двух костях, равна 11, благоприятны два элементарных события, которым соответствуют пары (6, 5) и (5, 6). Событию B, состоящему в том, что сумма очков, выпавшая на двух костях, равна 4, благоприятны три элементарных события, которым соответствуют пары (1, 3), (3, 1), (2, 2).

Вероятности событий A и B равны соответственно

$$P(A) = 2/36 = 1/18 \quad \text{и} \quad P(B) = 3/36 = 1/12,$$

и, следовательно, событие B более вероятно.

4.1. Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря соответствует первому числу месяца? (Год считается невисокосным.)

4.2. Какова вероятность того, что наудачу выбранное число от одного до двенадцати окажется делителем числа двенадцать? (Единица считается делителем любого числа.)

4.3*. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число делится на 3?

4.4. Найти вероятность того, что наудачу выбранный член последовательности $U_n = n^2 + 1$ $(n = 1, 2, \ldots, 10)$ делится на 5.

4.5. В урне 10 белых шаров и 3 красных. Какова вероятность вынуть из урны красный шар?

4.6.** Монету бросают три раза. Какое из событий более вероятно: событие A — все три раза выпала цифра, или событие B — два раза выпала цифра и один раз герб? Подсчитать вероятности этих событий.

4.7. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях равна 7?

4.8. Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях четная?

4.9. При перевозке 100 деталей, из которых 10 были забракованы, утеряна 1 стандартная деталь. Найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь оказалась стандартной.

4.10. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что наудачу извлеченная деталь оказалась бракованной.

4.11*. В семье трое детей. Какова вероятность, что все они мальчики? (Предполагается, что вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы.)

В некоторых случаях для непосредственного подсчета вероятности события A удобно использовать формулы комбинаторики.

Пример 4.3. Найти вероятность того, что все учащиеся в группе, состоящей из 40 человек, родились в разные дни года.

Решение. Все возможные исходы эксперимента представляются различными выборками по 40 из исходного множества объема 365. При этом выборка может содержать одинаковые элементы (так как любой день может быть днем рождения нескольких человек). Следовательно, пространство элементарных событий содержит $(40)^{365}$ различных выборок. Благоприятным событием будут соответствовать выборки, не содержащие одинаковых элементов. Таких выборок A_{365}^{40}. Таким образом, искомая вероятность равна $P(A) = A_{365}^{40}/40^{365}$.

Используя формулы числа размещений, сочетаний, перестановок, решить следующие задачи:

4.12. В урне n белых и m красных шаров. Какова вероятность того, что наудачу взятые два шара окажутся красными?

4.13. Набирая номер телефона, абонент забыл три последние цифры и, помня только, что они различны, набрал их наудачу. Какова вероятность, что он набрал нужные цифры?

4.14. К концу дня в магазине осталось 60 арбузов, из которых 50 спелых. Покупатель выбирает два арбуза. Какова вероятность, что оба арбуза спелые?

4.15. В урне n белых, m черных, k красных шаров. Наудачу вынимаются три шара. Какова вероятность, что все они будут разного цвета?

4.16. В экзаменационный билет входят 4 вопроса программы, насчитывающей 45 вопросов. Абитуриент не знает 15 вопросов программы. Какова вероятность, что он вытянет билет, где все вопросы ему известны?

4.17. На карточках написаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма цифр, написанных на этих карточках, будет равна 10?

Решить задачи, используя формулу числа перестановок с заданным числом повторений.

4.18*. Какова вероятность, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы а, а, а, н, н, с, получится слово «ананас»?

4.19. На один ряд, состоящий из 7 мест, случайным образом садятся семь учеников. Найти вероятность того, что три определенных ученика окажутся рядом.

4.20. На книжной полке случайным образом расставлены 4 книги по алгебре и 3 по геометрии. Какова вероятность того, что книги по каждому предмету стоят рядом?

4.21*. Найти вероятность того, что при игре в бридж (четырем игрокам из колоды карт в 52 листа раздаются по 13 карт) каждый игрок получит по одному тузу.

4.22. Известно, что при 10-кратном бросании монеты 5 раз выпали гербы и 5 раз цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первых пяти бросаниях?

Пример 4.4. Из 15 строительных рабочих 10—штукатуры, а 5 — маляры. Наудачу отбирается бригада из 5 рабочих. Какова вероятность того, что среди них будет 3 маляра и 2 штукатура?

Решение. Пространство элементарных событий состоит из всех выборок различного состава объема 5 из множества объема 15. Число таких выборок равно C_{15}^5. Благоприятным событиям соответствуют выборки, содержащие трех маляров и двух штукатуров. Трех маляров из пяти можно выбрать C_5^3 способами, а двух штукатуров (совершенно независимо от предыдущего выбора) C_{10}^2 способами.

Следовательно, число выборок, соответствующих благоприятным событиям, равно произведению $C_5^3C_{10}^2$. Таким образом, искомая вероятность определяется выражением

$$P(A)=C_5^3C_{10}^2/C_{15}^5.$$

Ответ. $C_5^3C_{10}^2/C_{15}^5$.

В общем случае вероятность получить выборку объема $k+r$, где k элементов принадлежат одной группе, состоящей из n элементов, а r — другой, состоящей из m элементов, определяется формулой

$$P(A)=C_m^rC_n^k/C_{m+n}^{r+k}. \qquad (2)$$

4.23. В ящике имеются 15 деталей, 5 из которых окрашены. Наудачу извлекаются 5 деталей. Найти вероятность того, что 4 из них окрашены, а одна — нет.

4.24. В партии из N деталей n стандартных. Наудачу отбираются m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных k стандартных.

4.25. Какова вероятность главного выигрыша в «Спортлото» (угадать 6 номеров из 48)? Какова вероятность угадать 5; 4; 3 номера из 48?

4.26. Какова вероятность получения 1 туза, туза и короля при сдаче 6 карт из колоды в 52 листа?

4.27. Имеются 6 билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов 2 окажутся на места первого ряда?

4.28. В соревнованиях по футболу участвуют 20 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 10 команд. Какова вероятность того, что 2 наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

§ 5. Задачи на вычисления вероятностей, решаемые геометрическими методами

Существуют задачи, в которых непосредственный подсчет элементарных событий, основанный на их равновозможности и конечности их числа, непригоден. Рассмотрим пример. Пусть линия электропередач, соединяющая пункты A и B, в результате бури оборвалась. Какова вероятность того, что обрыв произошел на участке, заключенном между пунктами C и D, принадлежащими отрезку AB? Множество элементарных событий в данном случае бесконечно, так как обрыв равновозможен в любой точке отрезка AB. При этом естественно предполагать, что вероятность обрыва на любом участке пропорциональна длине этого участка. Так как вероятность обрыва на всем участке равна единице (обрыв уже произошел), то вероятность обрыва на участке CD выразится соотношением

$$P(A)=CD/AB.$$

Введем следующее допущение. Пусть исходы испытания, число которых бесконечно, распределены равномерно в некоторой области S. Это значит, что вероятность события E, состоящего в том, что исход испытания оказался заключенным в некоторой части области S, пропорционален величине этой части и не зависит от ее расположения и формы.

Таким образом,

$$P(E) = m(s)/m(S), \qquad (1)$$

где $P(E)$ — вероятность события, заключающегося в том, что наудачу выбранная точка из области S окажется в области s, $m(s)$ и $m(S)$ — величины соответствующих областей.

Пример 5.1. Абонент ждет телефонного вызова в течение одного часа. Какова вероятность, что вызов произойдет в последние 20 минут этого часа?

Решение. Пусть событие E состоит в том, что вызов произошел в последние 20 минут. Изобразим пространство элементарных событий в виде отрезка длины 60. Тогда элементарные события, благоприятные E, заключены в последнюю треть отрезка. Следовательно,

$$P(A) = 1/3.$$

5.1. Минное поле заграждения устроено так, что мины поставлены вдоль некоторой прямой с интервалами между минами 100 м. Какова вероятность того, что корабль шириной 20 м, проходящий минное поле заграждения под прямым углом, подорвется на мине?

5.2. В круге радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что наудачу брошенная в большой круг точка попадет также и в меньший круг. (Предполагается, что вероятность попадания в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.)

Если случайное событие, вероятность которого следует найти, состоит в попадании точки в некоторую часть плоской фигуры и при этом границы фигуры и ее части являются графиками известных функций, то вычисление площадей, входящих в выражение (1), сводится к вычислению определенных интегралов.

Пример 5.2. Наудачу выбираются два действительных числа x и y, причем $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Найти вероятность того, что $y^2 \leqslant x$.

Решение. Поставим в соответствие паре чисел x и y точку на плоскости с координатами (x, y). Пространство элементарных событий будет в этом случае квадратом, двумя сторонами которого являются единичные отрезки осей координат. Фигура, множество точек которой соответствует исходам, благоприятным событию $y^2 \leqslant x$, ограничена графиками функций $y = 0$, $x = 1$, $y^2 = x$. Ее площадь вычисляется по формуле

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Так как площадь единичного квадрата равна единице, то

$$P(A) = 2/3.$$

Ответ. 2/3.

5.3. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \leqslant 3$, $|y| \leqslant 5$. Какова вероятность того, что дробь x/y окажется положительной?

5.4. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Какова вероятность того, что $x^2 < y$?

5.5. Два действительных числа x и y выбираются наудачу так, что $|x| \leqslant 1$ и $|y| \leqslant 1$. Какова вероятность того, что $|x| < |y|$?

5.6*. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что $xy \leqslant 1$, а $y/x \leqslant 2$.

5.7*. Наудачу взяты два положительных числа x и y, не превышающие единицы. Какова вероятность того, что сумма их не превышает единицы, если сумма их квадратов больше 1/4?

5.8*. Парабола касается нижней стороны квадрата и проходит через верхние его вершины. Какова вероятность того, что точка, наудачу брошенная в квадрат, попадет в область, заключенную между верхней стороной квадрата и параболой?

5.9. Парабола касается полукруга и проходит через границы его диаметра. Какова вероятность того, что точка, наудачу брошенная в полукруг, попадает в область, ограниченную дугой полукруга и параболой?

5.10. Пусть на отрезке [0; 1] задана такая функция $f(x)$, что $f'(x) > 0$ при $x \in [0; 1]$, причем $f(0) = 0$, $f(1) = 1$. Доказать, что при бросании точки в квадрат, стороны которого — промежуток [0; 1] оси Ox и промежуток [0; 1] оси Oy, наибольшая вероятность попасть в область, ограниченную кривыми $y = f(x)$, $y = f(a)$, $y = 0$, $y = 1$, будет достигаться при $a = 1/2$.

5.11*. Область ограничена линиями $x = 0$, $x = \pi/2$, $y = \sin x$, $y = \sin a$. Точка бросается в прямоугольник, сторонами которого являются промежуток $[0; \pi/2]$ оси Ox и промежуток [0; 1] оси Oy. При каком значении a вероятность попадания точки в эту область наименьшая?

Для решения ряда задач геометрическим методом удобно предварительно ввести декартову систему координат.

Пример 5.3. Два товарища договорились о встрече в определенном месте между 11 и 12 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый придет в произвольный момент между 11 и 12 часами.

Решение. Поскольку момент прихода каждого из товарищей случаен, то выбрав отрезок единичной длины, поставим в соответствие моменту прихода первого товарища произвольную, случайно выбранную точку этого отрезка, а моменту прихода второго товарища — случайно выбранную точку второго отрезка единичной длины. Отложим эти отрезки на осях координат, первый — на оси Ox, второй — на оси Oy. Тогда пространство элементарных событий будет представлять собой квадрат единичной площади, вписанный в первый квадрант координатной плоскости, каждая точка с координатами (x, y) которого представляет собой пару моментов времени прихода товарищей.

Элементарные события (x, y), благоприятные событию, состоящему в том, что товарищи встретятся, должны удовлетворять условию

$$|x - y| \leqslant 1/4. \qquad (*)$$

Геометрическим образом, соответствующим искомому событию, будет пересечение полосы (*) и единичного квадрата, состоящего из точек, координаты (x, y) которых удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $0 \leqslant y \leqslant 1$. Площадь фигуры, полученной в результате пересечения множества (*) и квадрата, равна искомой вероятности, так как площадь единичного квадрата равна единице.

Ответ. 7/16.

5.12. В течение 20 минут ученик A в случайный момент звонит по телефону ученику B и ждет 2 минуты, после чего кладет трубку. В течение тех же 20 минут в случайный момент времени ученик B приходит домой, где остается в течение 5 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что разговор состоится?

5.13*. На единичный отрезок оси абсцисс наудачу бросают две точки B и C. Найти вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше, чем расстояние от начала координат до ближайшей точки.

5.14. Некто живет в городе B, соединенном железной дорогой с городами A и C. Между городами A и C курсируют поезда, которые все останавливаются в городе B. Расписание составлено так, что поезда каждого направления проходят через город B с интервалами в 1 час. Некто приходит на вокзал в случайный момент времени и садится на первый подошедший поезд. Как должно быть составлено расписание, чтобы вероятность уехать в город A была в 5 раз больше, чем вероятность уехать в город C?

5.15*. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстояние $2a$. На плоскость наудачу бросают иглу длиной $2l$ $(l < a)$. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую (*задача Бюффона*).

§ 6. Вычисление вероятностей сложных событий

События подразделяются на достоверные, невозможные и случайные: *достоверные* в результате опыта происходят всегда; *невозможные* не происходят никогда; *случайные* могут либо произойти, либо нет. Достоверным будет, например, событие, состоящее в том, что из урны, содержащей только белые шары, вынимают белый шар, а невозможным будет событие, состоящее в том, что белый шар вынимают из урны, содержащей только черные шары. Если в урне есть и белые и черные шары, то извлечение шара какого-либо определенного цвета является случайным событием.

Достоверное событие совпадает со всем пространством элементарных событий Ω, а случайное событие A является некоторым подмножеством в этом пространстве. Невозможное событие $\varnothing$ не содержит ни одного элементарного события.

Суммой двух событий A и B назовем событие C, состоящее в том, что произошло или событие A, или событие B. Сумма двух событий обозначается

$$C = A + B. \qquad (1)$$

Поясним понятие суммы двух событий на следующем примере. Пусть мальчик купил билеты двух лотерей: «Спринт» и «Старт». Рассмотрим случайное событие C, состоящее в том, что мальчик выигрывает хотя бы в одной лотерее. Наступление этого события связано с наступлением хотя бы одного из следующих событий: событие A — среди билетов, купленных мальчиком, есть выигрышные билеты лотереи «Спринт»; B — есть выигрышные билеты лотереи «Старт».

Произведением двух событий A и B назовем событие C, состоящее в том, что произошли оба эти события. Произведение двух событий обозначается

$$C = A \cdot B. \qquad (2)$$

События A и B называются *несовместными*, если их произведение представляет собой невозможное событие:

$$A \cdot B = \varnothing.$$

Поясним понятие произведения двух событий на следующем примере.

Среди машин, потерпевших аварию, есть «Жигули» и «Волги». Часть машин при аварии перевернулась. Событие A, состоящее в том, что наудачу выбранная неперевернувшаяся автомашина «Волга», будет произведением двух событий: B — машина не перевернулась и C — машина является «Волгой», т. е. $A = B \cdot C$.

Определение вероятности сложного события A, являющегося комбинацией более простых событий $A_1, \ldots, A_k$, вероятности которых известны, основаны на формулах сложения и умножения вероятностей. Поясним смысл этих формул примерами.

Проведем эксперимент, связанный с бросанием двух костей, и вычислим вероятность события C, состоящего в том, что сумма очков на выпавших гранях не превосходит числа 3. Пространство элементарных событий, возникающих в результате этого эксперимента, можно представить упорядоченными парами целых чисел, изменяющихся от 1 до 6. Таких пар будет 36. Среди этих событий благоприятными событию C будут следующие: (1, 1), (1, 2), (2, 1). Таким образом, согласно определению, введенному в § 4, заключаем, что вероятность события C есть

$$P(C) = 3/36 = 1/12.$$

Рассмотрим теперь событие C как комбинацию более простых событий. Для этого заметим, что событие C происходит, если происходит событие A — сумма очков на выпавших гранях равна 2, или событие B — сумма очков на выпавших гранях равна 3. Таким образом, событие C есть сумма событий A и B: $C = A + B$. Из исходного пространства элементарных событий событию A благоприятна только пара (1, 1), а событию B — пары (1, 2) и (2, 1). Следовательно, вероятности событий A и B равны соответственно

$$P(A) = 1/36, \quad P(B) = 1/18.$$

Таким образом, в данном случае справедливо равенство

$$P(C) = P(A) + P(B).$$

Заметим, что события A и B в этом примере являются несовместными (сумма очков на выпавших гранях не может одновременно быть равной 2 и 3).

Вычислим вероятность события C, состоящего в том, что из колоды карт в 52 листа наудачу взятая карта или является тузом, или имеет червонную часть. Пространство элементарных событий в этом примере состоит из 52 элементов. Элементарные события, благоприятные событию C, заключаются в том, что взятая карта имеет червонную масть (в колоде 13 карт одной масти) или является тузом (в колоде 4 туза). С учетом того, что один из тузов червонный и, следовательно, благоприятным оказываются 16 элементарных событий, получаем

$$P(C) = 16/52 = 4/13.$$

Представим теперь C в виде комбинации более простых событий: события A — взятая наудачу карта оказалась червонной, и события B — взятая наудачу карта оказалась тузом. Тогда по определению суммы двух событий $C = A + B$. Вероятности событий A и B соответственно равны

$$P(A) = 1/4, \quad P(B) = 1/13.$$

Нам понадобится также вероятность произведения событий A и B, т. е. события $D = A \cdot B$, которое заключается в том, что наудачу взятой картой оказывается червонный туз. Очевидно, что вероятность события D равна

$$P(D) = 1/52.$$

Нетрудно убедиться, что в данном случае справедливо равенство

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(D).$$

Рассмотренные примеры обобщает следующая формула:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), \tag{3}$$

т. е. вероятность суммы двух событий A и B равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их произведения.

В том случае, если события A и B несовместны, формула (3) принимает вид

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{4}$$

Рассмотрим эксперимент, связанный с бросанием двух костей, и вычислим вероятность события C, состоящего в том, что число очков, выпавших на первой кости, больше 3, а на второй — больше 4. Элементарные события, благоприятные событию C, — упорядоченные пары чисел: (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 5), (6, 6). Таким образом,

$$P(C) = 6/36 = 1/6.$$

Представим теперь событие C в виде комбинации более простых событий: события A, состоящего в том, что на первой кости выпало больше трех очков, и события B — на второй кости выпало больше четырех очков. Тогда по определению произведения событий событие C представляется произведением событий A и B: $C = A \cdot B$.

Вычислим вероятности событий A и B. Прежде всего заметим, что пространства элементарных событий, возникающие при бросании каждой кости отдельно, состоят из шести равновозможных исходов. Элементарные события, благоприятные событию A, состоят в выпадении на первой кости 4, 5 или 6 очков. Следовательно, $P(B) = 1/2$.

Элементарные события, благоприятные событию B, состоят в выпадении на второй кости 5 или 6 очков. Следовательно, $P(B) = 1/3$. Нетрудно проверить, что в данном случае выполняется соотношение

$$P(C) = P(A) \cdot P(B). \qquad (5)$$

События A и B, для которых выполняется (5), будем называть *независимыми*. Таким образом, вероятность произведения двух событий в том случае, если они независимы, можно вычислить по формуле (5). Если для событий A и B условие (5) не выполняется, то такие события называются *зависимыми*. В этом случае можно говорить о так называемой условной вероятности наступления события A при условии, что событие B произошло.

Допустим, требуется вычислить вероятность события A, состоящего в том, что сумма очков при бросании двух костей не превысит четырех, если известно, что на одной кости выпала единица (событие B). Так как событие B произошло, то, считая его достоверным, можно рассмотреть новое пространство элементарных событий, состоящее из 11 событий, благоприятных событию B:

$$(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6),$$
$$(2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1).$$

В этом новом пространстве элементарных событий событию A благоприятны 5 элементарных событий: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1). Таким образом, вероятность события A в этом пространстве элементарных событий равна 5/11. Полученную величину будем называть *условной вероятностью* события A при условии, что произошло событие B, и обозначать $P(A/B)$.

Рассмотрим теперь исходное пространство элементарных событий, возникающее при бросании двух костей, и вычислим вероятность события $C = A \cdot B$, состоящего в том, что сумма очков, выпавших на костях, не превосходит четырех и что на одной из костей выпала единица. Элементарные события, благоприятные событию C, представляются следующими парами чисел: (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (3, 1). Таким образом, $P(C) = 5/36$. Одиннадцать элеменарных событий, благоприятных событию B, были рассмотрены выше. Следовательно, $P(B) = 11/36$. Нетрудно убедиться в справедливости соотношения

$$P(C) = P(A/B) \cdot P(B).$$

Рассмотренные примеры обобщает следующая формула умножения вероятностей:

$$P(AB) = P(A)\,P(B/A) = P(B)\,P(A/B), \qquad (6)$$

т. е. вероятность произведения двух событий A и B равна произведению вероятности одного из этих событий на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие произошло.

Для случая трех событий формула, обобщающая формулу (6), имеет вид

$$P(ABC) = P(A/BC)\,P(BC) = P(A/BC)\,P(B/C)\,P(C). \qquad (7)$$

Пример 6.1. Из урны, содержащей n белых и m черных шаров, вынимаются два шара. Какова вероятность того, что они разных цветов?

Решение. Представим событие C, состоящее в том, что вынутые шары разных цветов, в виде $C = A + B$, где событие A состоит в том, что первый шар белый, а второй черный; событие B — в том, что первый шаг черный, а второй белый. Так как события A и B несовместны, то, согласно (4),

$$P(C) = P(A) + P(B). \qquad (*)$$

Вероятности событий A и B вычислим, используя формулу (6). Представим событие A в виде $A =$ Б, Ч, где буквы Б и Ч, записанные в данной последовательности, означают, что первым был вынут белый шар, а вторым — черный. Тогда

$$P(A) = P(\text{Б})\,P(\text{Ч/Б}).$$

Вероятность события Б представляет собой отношение числа белых шаров к числу всех шаров, находящихся в урне. Условная вероятность того, что вторым вынут черный шар при условии, что первым был вынут белый, представляет собой отношение первоначального числа черных шаров к уменьшившемуся на единицу числу всех шаров, оставшихся в урне. Таким образом,

$$P(A) = \frac{n}{n+m} \cdot \frac{m}{n+m-1}.$$

Аналогично

$$P(B) = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{n}{n+m-1}.$$

Подставляя полученные выражения в формулу (*), получаем

$$P(C) = \frac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}.$$

Ответ. $\dfrac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}$.

Используя формулы умножения и сложения вероятностей, решить следующие задачи.

6.1. В урне находятся n белых и m черных шаров. Вынимаются два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые; оба шара черные?

6.2*. Решить задачу 6.1 при условии, что вынутые шары возвращаются обратно, а их цвет записывается.

6.3. Из колоды карт в 52 листа вынимают 4 карты. Какова вероятность того, что все они разных мастей (имеются 4 масти по 13 карт в каждой)?

6.4. Несколько раз бросают игральную кость. Какова вероятность того, что одно очко появится впервые при третьем бросании?

6.5. 20 машин были доставлены на станцию технического обслуживания. При этом 5 из них имели неисправности в ходовой части, 8 имели неисправности в моторе, а 10 были полностью исправны. Какова вероятность, что машина с неисправной ходовой частью имеет также неисправный мотор?

6.6. Готовясь к вступительному экзамену по математике, абитурент должен подготовить 20 вопросов по элементам математического анализа и 25 по геометрии. Однако он успел подготовить только 15 вопросов по элементам математического анализа и 20 по геометрии. Билет содержит 3 вопроса, 2 из которых по элементам математического анализа и 1 по геометрии. Какова вероятность, что:

а) студент сдаст экзамен на «отлично» (отвечает на все три вопроса); б) на «хорошо» (отвечает на любые два вопроса)?

Дополнением случайного события A (или *противоположным событием*) назовем событие C, состоящее в том, что в результате эксперимента событие A не произошло. Дополнение к событию A обозначается $\bar{A}$. Вероятности событий A и $\bar{A}$ связаны формулой

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1. \tag{8}$$

Если сложное событие A представляется в виде

$$A = A_1 + \ldots + A_k, \tag{9}$$

где A_i — события, вероятности которых известны, то вычисление вероятности $P(A)$ иногда удобно производить, используя формулу

$$\bar{A} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_k, \tag{10}$$

связывающую дополнения рассматриваемых событий. Так, в случае, если A_i независимы, получаем

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\bar{A}_1) \ldots P(\bar{A}_k) = \\ = 1 - [1 - P(A_1)] \ldots [1 - P(A_k)]. \tag{11}$$

Если все события A_i равновероятны, то формула (11) приобретает более простой вид:

$$P(A) = 1 - (1-p)^k, \tag{12}$$

где p — вероятность события A_i.

Пример 6.2. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность разрушения, если на мост сбрасывают три бомбы с вероятностями попадания 0,3; 0,4; 0,7 соответственно.

Решение. Вычислим вероятность события $\bar{A}$, состоящего в том, что мост не будет разрушен. Обозначим $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ события, состоящие в том, что в мост не попала соответственно первая, вторая и третья бомбы. Тогда $\bar{A} = \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3$. Так как из независимости A_i следует независимость $\bar{A}_i$, то

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1)\,P(\bar{A}_2)\,P(\bar{A}_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}084.$$

Следовательно, вероятность разрушения моста

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}916.$$

Ответ. 0,916.

6.7. В урне находятся n белых, m черных и k красных шаров. Наудачу вынимают три шара. Какова вероятность, что хотя бы два шара будут одного цвета?

6.8. На стеллаже 15 учебников, 5 из них в переплете. Наудачу выбираются 3 учебника. Какова вероятность, что хотя бы один из них будет в переплете?

6.9. В лотерее разыгрывается n билетов, из которых l выигрышных. Некто покупает k билетов. Какова вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрывает?

6.10. При одном обзоре радиолокационной станцией объект обнаруживается с вероятностью p. Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других циклов. Какова вероятность того, что при n циклах объект будет обнаружен?

6.11*. По некоторой цели производится n выстрелов. Каждый выстрел поражает цель с вероятностью p. Сколько выстрелов надо произвести, чтобы вероятность поражения цели была не меньше P?

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из нескольких несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на условную вероятность события A при условии, что данное событие наступило:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n). \quad (13)$$

Равенство (13) называется формулой *полной вероятности*.

Пример 6.3. В первой команде 6 мастеров спорта и 4 перворазрядника, а во второй — 6 перворазрядников и 4 мастера спорта. Сборная, составленная из игроков первой и второй команд, содержит 10 человек: 6 человек из первой команды и 4 — из второй. Из сборной команды наудачу выбирается один спортсмен. Какова вероятность того, что он мастер спорта?

Решение. Пусть событие B_i $(i = 1, 2)$ состоит в том, что наудачу выбранный спортсмен — член i-й команды. Тогда вероятности событий B_i равны соответственно $P(B_1) = 3/5$, $P(B_2) = 2/5$. Пусть событие A состоит в том, что наудачу выбранный спортсмен — мастер спорта. Тогда условные вероятности события A при условии, что выполнено событие B_i (т. е. известно, из какой команды спортсмен), равны соответственно $P(A/B_1) = 3/5$, $P(A/B_2) = 2/5$. Используя формулу полной вероятности, получаем

$$P(A) = \frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{13}{25}.$$

Ответ. 13/25.

6.12. Экзамен происходит по следующей схеме: если некоторый билет уже был вытянут, то экзаменатор откладывает его, т. е. последующие экзаменующиеся не могут вытянуть этот билет. Ученик выучил k билетов $(k < n)$. В каком случае вероятность того, что ученик вытянет выученный билет, больше — когда он идет отвечать первым или последним?

6.13*. В урне лежат два шара, цвета которых неизвестны (каждый шар может быть или белым, или черным). Положим в урну белый шар. Какова вероятность теперь вынуть из урны белый шар?

6.14. Из пяти винтовок, из которых 3 снайперские и 2 обычные, наудачу выбирается одна, и из нее производится выстрел. Найти вероятность попадания, если вероятность попадания из снайперской винтовки — 0,95, а из обычной — 0,7.

6.15. Имеются две урны. В первой лежат m белых и n черных шаров, а во второй — k белых и l черных шаров соответственно. Из первой урны во вторую перекладывают один шар. Какова вероятность после этого вынуть:

а) белый шар из первой урны;

б) белый шар из второй урны?

6.16*. Имеются две партии однородных изделий с разным составом стандартных и дефектных: в первой партии всего N изделий, из них n дефектных, во второй партии M изделий, из них m дефектных. Из первой партии берется K изделий, из второй L, и образуется новая партия. Какова вероятность того, что изделие, выбранное наудачу из новой партии, окажется дефектным?

6.17*. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что хотя бы одно изделие из трех выбранных наудачу из вновь образованной партии окажется дефектным?

ГЛАВА 16
ЭЛЕМЕНТЫ ЛОГИКИ. СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Высказывания

Под *высказыванием* понимают утверждение, про которое имеет смысл говорить, истинно оно или ложно.

Из заданных высказываний при помощи так называемых логических связок, которым в обычной речи соответствуют частица «не», союзы «и», «или», сложноподчиненный оборот «если..., то...», выражение «в том и только в том случае», образуются новые составные высказывания. Если истинному высказыванию поставить в соответствие 1, а ложному 0, то логические связки можно формально определить с помощью так называемых *таблиц истинности.*

1. *Отрицание* (читают «не p» и пишут $\bar{p}$). Когда p истинно, тогда $\bar{p}$ ложно, и наоборот.

2. *Конъюнкция* или *логическое умножение* двух высказываний (читают «p и q» и пишут $p \wedge q$). Конъюнкция истинна только в случае, когда оба высказывания истинны.

3. *Дизъюнкция* или *логическое сложение* двух высказываний (читают «p или q» и пишут $p \vee q$). Дизъюнкция истинна в том случае, когда истинно хотя бы одно из двух высказываний.

4. *Импликация* (читают «если p, то q» и пишут $p \to q$). Здесь два высказывания в отличие от случаев 2 и 3 не перестановочны: высказывание p называют *условием*, а высказывание q — *следствием.* Импликация ложна только в том случае, когда условие истинно, а следствие ложно.

5. *Эквиваленция* или *двойная импликация* (читают «p эквивалентно q» и пишут $p \leftrightarrow q$). Эквиваленция истинна в том случае, когда или оба высказывания истинны, или оба высказывания ложны.

Таблица истинности элементарных высказываний имеет вид

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \to q$	$\bar{p}$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	0

Новые высказывания образовываются с помощью логических операций. Операции могут быть использованы многократно. Порядок, в котором проводятся операции, указывают с помощью скобок.

Если из p следует q и из q следует p, то высказывания p и q называют *равносильными.* Равносильные высказывания соединяют знаком $\Leftrightarrow$ либо знаком равенства.

Таблицы истинности для равносильных высказываний совпадают.

Пример 1.1. Доказать равносильность высказываний

$$p \to q \quad \text{и} \quad (p \wedge q) \vee \bar{p}.$$

Решение. Таблица истинности для $p \to q$ представлена выше. Составим таблицу истинности для высказывания $(p \wedge q) \vee \bar{p}$:

p	q	$p \wedge q$	$\bar{p}$	$p \wedge q \vee \bar{p}$
0	0	0	1	1
0	1	0	1	1
1	0	0	0	0
1	1	1	0	1
I		II		III

В последней строке таблицы римскими цифрами обозначены номера шагов, которыми составляется таблица истинности. На I шаге заполняются столбцы истинности для высказываний p и q. На II шаге — для высказываний $p \wedge q$ и $\bar{p}$. При этом используется таблица истинности элементарных высказываний, приведенная выше. На III шаге, рассматривая $p \wedge q$ и $\bar{p}$ как простейшие высказывания, заполним столбец дизъюнкции этих высказываний $(p \wedge q) \vee \bar{p}$. Полученный столбец истинности совпадает со столбцом истинности высказывания $p \to q$.

Таким образом, равносильность высказываний $p \to q$ и $(p \wedge q) \vee \bar{p}$ установлена.

Сравнив таблицы истинности, доказать:

1.1. $\overline{p \vee q} = \bar{p} \wedge \bar{q}$.
1.2. $\overline{p \wedge q} = \bar{p} \vee \bar{q}$.
1.3. $p \leftrightarrow q = (p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$.
1.4. $(p \vee \bar{q}) \wedge q = q$.
1.5. $p \vee (p \wedge q) = p$.

1.6. Высказывание p означает, что у вас есть собака, а высказывание q означает, что у вас есть кошка. Сформулируйте, что означают следующие составные высказывания:

1) $\bar{p} \vee q$;
2) $\bar{p} \wedge \bar{q}$;
3) $(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q})$;
4) $\bar{p} \to q$.

1.7. Пусть высказывание $p|q$ означает, что p и q не могут быть оба истинными. Напишите таблицу истинности для $p|q$.

1.8. Напишите высказывание $p|q$ (см. задачу 1.7), используя логические связки конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

1.9. Докажите равносильность высказываний $(p|\bar{q}) \mid (p|q)$ и $p \wedge q$.

1.10. Пусть p означает «идет дождь», а q означает «дует ветер». Запишите в символической форме высказывания:
1) если идет дождь, то дует ветер;
2) если дует ветер, то идет дождь;
3) ветер дует в том и только в том случае, когда идет дождь;
4) если дует ветер, то нет дождя;
5) неверно, что ветер дует тогда и только тогда, когда нет дождя.

1.11. Запишите в символической форме сложное высказывание, состоящее из простых высказываний p, q, r, истинное тогда и только тогда, когда истинна только одна (безразлично какая!) из компонент.

1.12. По мишени произведено три выстрела. Что означает следующее высказывание, записанное в символической форме:

1) $p_1 \vee p_2 \vee p_3$;
2) $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$;
3) $(\bar{p}_1 \vee \bar{p}_2) \wedge p_3$,

где p_i означает высказывание: «мишень поражена при i-м выстреле?

Легко проверить равносильность следующих высказываний (здесь I — истина, L — ложь):

$$p \vee q = q \vee p, \qquad (1)$$
$$p \wedge q = q \wedge p, \qquad (2)$$
$$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r, \qquad (3)$$
$$p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r, \qquad (4)$$
$$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r), \qquad (5)$$
$$p \wedge p = p, \qquad (6)$$
$$p \vee p = p, \qquad (7)$$
$$p \vee \bar{p} = I, \qquad (8)$$
$$p \wedge \bar{p} = L, \qquad (9)$$
$$p \wedge I = p, \qquad (10)$$
$$p \vee I = I, \qquad (11)$$
$$p \wedge L = L, \qquad (12)$$
$$p \vee L = p. \qquad (13)$$

Используя формулы (1)—(13), можно решать довольно сложные логические задачи.

Пример 1.2. Виктор, Роман, Юрий и Сергей заняли на математической олимпиаде первые четыре места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:
1) Сергей — первый, Роман — второй;
2) Сергей — второй, Виктор — третий;
3) Юрий — второй, Виктор — четвертый.
Как распределились места, если в каждом ответе только одно утверждение истинно?

Решение. Если в каждом ответе одно из утверждений истинно, то и дизъюнкция этих утверждений тоже истинна. Так, скажем, истинно высказывание: «или Сергей первый, или Роман — второй». Запишем это высказывание в следующем символическом виде: $С_{I} \vee Р_{II}$. Аналогично, высказывания остальных ответов имеют вид $С_{II} \vee В_{III}$ и $Ю_{II} \vee В_{IV}$ соответственно. Конъюнкция истинных высказываний — истинна. Следовательно, истинным будет составное высказывание

$$(С_{I} \vee Р_{I}) \wedge (С_{II} \vee В_{III}) \wedge (Ю_{II} \vee В_{IV}). \qquad (*)$$

Используя свойства (1)—(13), произведем упрощение высказывания (*). Для этого представим в виде дизъюнкции простейших конъюнкций первую конъюнкцию:

$$(С_{I} \vee Р_{II}) \wedge (С_{II} \vee В_{III}) = [(С_{I} \vee Р_{II}) \wedge С_{II}] \vee \vee [(С_{I} \vee Р_{II}) \wedge В_{III}] = [(С_{I} \wedge С_{II}) \vee (Р_{II} \wedge С_{II})] \vee \vee [(С_{I} \wedge В_{III}) \vee (Р_{II} \wedge В_{III})].$$

Высказывание, стоящее в первых квадратных скобках, ложно, так как является дизъюнкцией двух ложных высказываний

$С_I \wedge С_{II}$ и $Р_{II} \wedge С_{II}$ — первое состоит в том, что Сергей занял одновременно I и II места, а второе — в том, что второе место одновременно заняли Роман и Сергей. Таким образом, первая конъюнкция приобретает вид

$$(С_I \vee Р_{II}) \wedge (С_{II} \vee В_{III}) = (С_I \wedge В_{III}) \vee (Р_{II} \wedge В_{III}).$$

Рассмотрим теперь оставшуюся конъюнкцию

$$[(С_I \wedge В_{III}) \vee (Р_{II} \wedge В_{III})] \wedge (Ю_{II} \vee В_{IV}).$$

Используя, по-прежнему, правила (1)—(13), имеем

$$\{[(С_I \wedge В_{III}) \vee (Р_{II} \wedge В_{III})] \wedge Ю_{II}\} \vee \\ \vee \{[(С_I \wedge В_{III}) \vee (Р_{II} \wedge В_{III})] \wedge В_{IV}\} = \\ = (С_I \wedge В_{III} \wedge Ю_{II}) \vee (Р_{II} \wedge В_{III} \wedge Ю_{II}) \vee (С_I \wedge В_{III} \wedge В_{IV}) \vee \\ \vee (Р_{II} \wedge В_{III} \wedge В_{IV}) = (С_I \wedge В_{III} \wedge Ю_{II}).$$

Второе, третье и четвертое высказывания, участвующие в этой дизъюнкции, ложны, так как являются конъюнкциями или одинаковых букв с разными номерами, или разных букв с одинаковыми номерами, чего быть не может. Следовательно, истинной является конъюнкция

$$С_I \wedge В_{III} \wedge Ю_{II}.$$

О т в е т. Первое место занял Сергей, второе — Юрий, третье — Виктор и четвертое — Роман.

1.13. По обвинению в ограблении перед судом предстали A, B и C. Установлено следующее:

1) если A не виновен или B виновен, то C виновен;

2) если A не виновен, то C не виновен.

Виновен ли A?

1.14. Определить, кто из четырех подозреваемых участвовал в ограблении, если известно:

1) если A участвовал, то и B участвовал;

2) если B участвовал, то или C участвовал, или A не участвовал;

3) если D не участвовал, то A участвовал, а C не участвовал;

4) если D участвовал, то A участвовал.

1.15. Экзамен сдавали три студента A, B и C. Известно, что:

1) если A не сдал или B сдал, то C сдал;

2) если A не сдал, то C не сдал.

Можно ли на основании этих данных установить, кто сдал экзамен?

В начале параграфа было показано, как строить таблицу истинности любого составного высказывания. Интерес представляет и обратная задача: по заданной таблице истинности найти одно или несколько высказываний, которым оно соответствует. Оказывается, обратная задача не только имеет решение, но его можно получить, используя лишь связки $\wedge$, $\vee$, $^{-}$.

П р и м е р 1.3. Найти высказывание, состоящее из двух простейших p и q, имеющее следующую таблицу истинности:

p	q	?
1	0	0
1	1	0
0	1	0
0	0	1

$\bar{p}$	$\bar{q}$	$\bar{p} \wedge \bar{q}$
0	1	0
0	0	0
1	0	0
1	1	1

Р е ш е н и е. Единица в последнем столбце таблицы присутствует только в последней строке. Следовательно, истинным будет высказывание $\bar{p} \wedge \bar{q}$. Проверим это утверждение. Для этого составим таблицу истинности $\bar{p} \wedge \bar{q}$. Действительно, полученная таблица совпадает с исходной. Следовательно, найденное высказывание искомое.

1.16. Постройте три составных высказывания a, b, c, имеющих следующие таблицы истинности:

p	q	r	a	b	c
1	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0
0	1	1	0	0	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1

1.17. Какие высказывания a, b, c, d имеют следующие таблицы истинности:

p	q	a	b	c	d
1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0

Как это следует из примера 3, а также из решения задач 1.16 и 1.17, алгоритм построения составного высказывания заключается в дизъюнкции тех конъюнкций простых высказываний, которым соответствует единица в последнем столбце таблицы истинности. Причем в отдельную конъюнкцию входит либо высказывание, либо его отрицание в зависимости от того, соответствуют ли ему в таблице единица или нуль.

Попробуем использовать этот метод в следующей «жизненной» ситуации.

Пример 1.4. Имеются два города A и B. В городе A живут люди, всегда говорящие правду, а в городе B живут лжецы, всегда говорящие неправду. Жители обоих городов свободно ходят в гости друг к другу, поэтому в каждом городе можно встретить жителей любого из этих городов. Какой вопрос следует задать путешественнику первому встречному, чтобы по единственному ответу («да» или «нет») выяснить, в каком городе он находится?

Решение. Пусть p означает высказывание «вы говорите правду», а q — высказывание «это город A». Мы хотим задать единственный вопрос, на который ответ «да» означал бы, что q истинно, а ответ «нет» — что q ложно, независимо от правдивости первого встречного.

Если человек говорит правду, то он скажет «да», если наше высказывание истинно, и «нет» — если оно ложно; лжец поступит наоборот. Таблица истинности высказывания (ожидаемого ответа) имеет следующий вид:

p	q	Ожидаемый ответ	
1	1	да	1
1	0	нет	0
0	1	да	0
0	0	нет	1

Эта таблица истинности соответствует эквивалентности (т. е. $(p \leftrightarrow q)$) или высказыванию

$$(p \wedge q) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q}).$$

Таким образом, вопрос должен выяснять истинность эквивалентности прописки встречного и его правдивости: «Верно ли, что это город A и вы его житель, или это город B и вы его житель?» Так как этот вопрос направлен на выяснение соответствия прописки встречного человека и данного города, то

он может быть сформулирован короче: «Вы житель этого города?»

1.18. Один логик попал к дикарям и был заключен в темницу, имеющую два выхода. Вождь дикарей предложил пленнику следующий шанс на спасение: «Один выход ведет на верную смерть, другой — на свободу. Ты можешь избрать любой. Сделать выбор тебе помогут два моих воина. Они останутся здесь, чтобы ответить на один твой вопрос — любой, какой ты пожелаешь им задать. Но я предупреждаю тебя, что один воин всегда говорит правду, а второй всегда лжет». И вождь ушел. Через некоторое время логик, задав вопрос одному из воинов, вышел на свободу. Какой вопрос он задал?

Пример 1.5. Староста, комсорг, профорг хотят использовать электрическую схему, регистрирующую результаты тайного голосования большинством голосов. Как она должна выглядеть?

Решение. Пусть p — высказывание «староста голосует за», q — высказывание «комсорг голосует за», r — высказывание «профорг голосует за». Составим таблицу истинности интересующего нас высказывания:

p	q	r	Искомое высказывание	
1	1	1	1	$p \wedge q \wedge r$
1	1	0	1	$p \wedge q \wedge \bar{r}$
1	0	1	1	$p \wedge \bar{q} \wedge r$
1	0	0	0	
0	1	1	1	$\bar{p} \wedge q \wedge r$
0	1	0	0	
0	0	1	0	
0	0	0	0	

Единицы в последнем столбце поставлены в тех строках, где число единиц больше числа нулей.

Искомое высказывание имеет вид

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r).$$

Для его реализации в виде электрической цепи достаточно договориться, что истинность высказывания соответствует тому, что цепь проводит ток (см. рис. 16.1). Лампочка загорится в том и только в том случае, если большинство проголосовало «за».

1.19. В условиях примера 1.5 реализовать электрическую схему, зажигающую лампочку, если хотя бы один участник проголосовал «за».

1.20. Какое высказывание реализует схема на рис. 16.2?

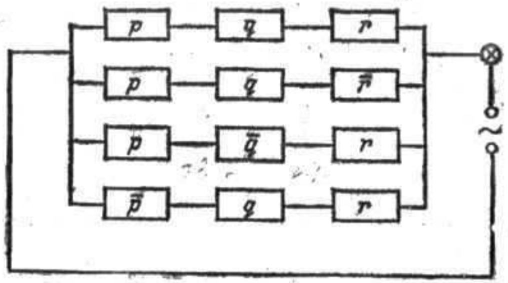


Рис. 16.1

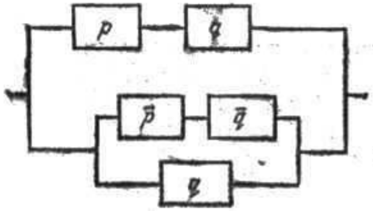


Рис. 16.2

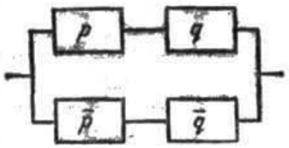


Рис. 16.3

1.21. Придумайте схему более простую, чем в задаче 1.20, но реализующую то же самое высказывание.

1.22. Какое высказывание реализует схема на рис. 16.3?

§ 2. Предложения, зависящие от переменной

Пусть предложение зависит от переменной, принадлежащей некоторому множеству. Это предложение, вообще говоря, не является высказыванием. Предполагается, однако, что для каждого значения переменной предложение есть высказывание и, следовательно, оно может быть либо истинным, либо ложным. Множество A, таким образом, разбивается на два подмножества. Одно содержит те и только те значения переменной, при которых предложение истинно, а другое — при которых оно ложно.

Например, для предложения $x^2-1<0$ $(x\in\mathbf{R})$ множеством истинности является промежуток $(-1;1)$, а множеством, где оно ложно, — дополнение этого промежутка до всего $\mathbf{R}$, т. е. объединение промежутков $(-\infty;-1][1;\infty)$.

Два предложения $p(x)$ и $q(x)$, определенные на одном и том же множестве, называются *равносильными*, если их множества истинности совпадают. Например, два предложения $x^2-1<0$ и $(x-1)(x+1)<0$ равносильны на множестве R.

Для предложений, зависящих от переменных, так же, как и для высказываний, можно ввести логические операции.

Так, например, если предложения $p(x)$ и $q(x)$ определены на одном множестве U, то предложение $p(x)\vee q(x)$, являющееся их дизъюнкцией, определено на том же множестве и в качестве множества истинности имеет объединение множеств истинности $p(x)$ и $q(x)$.

Удобной иллюстрацией логических связок являются так называемые *схемы Вэна* (см. рис. 16.4). Область определения всех предложений, участвующих в связках, — единичный квадрат. Множества истинности предложений заштрихованы. На рис. 16.4, *а* представлено множество истинности дизъюнкции $p(x)\vee q(x)$; на рис. 16.4, *б* — множество истинности конъюнкции $p(x)\wedge q(x)$; на рис. 16.4, *в* — множество истинности импликации $p(x)\to q(x)$, на рис. 16.4, *г* — множество истинности отрицания $\bar p(x)$.

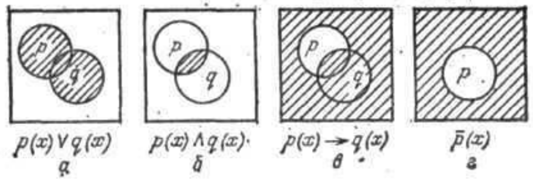


Рис. 16.4

Пример 2.1. Пусть

$$A(x)=\{x+3<0\} \quad \text{и} \quad B(x)=\{x-2\geqslant 0\}$$

— два предложения, зависящие от переменной x $(x\in\mathbf{R})$. Найти множества истинности для предложений:

а) $A(x)\vee B(x)$;

б) $A(x)\wedge B(x)$;

в) $A(x)\wedge \bar B(x)$;

г) $A(x)\to B(x)$;

д) $A(x)\to \bar B(x)$.

Решение. а) Для предложения $A(x)\vee B(x)$ множеством истинности является множество тех и только тех значений x, для которых верно хотя бы одно из неравенств

$$x+3<0 \quad \text{или} \quad x-2\geqslant 0,$$

т. е. объединение промежутков $(-\infty;-3)\cup[2;\infty)$.

б) Для предложения $A(x)\wedge B(x)$ множеством истинности является множество тех и только тех значений x, для которых справедливы оба этих неравенства. Другими словами, это множество является решением системы

$$\begin{matrix} x+3<0, \\ x-2\geqslant 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x<-3, \\ x\geqslant 2 \end{matrix} \Leftrightarrow \varnothing.$$

в) Для предложения $A(x)\wedge \bar{B}(x)$ множеством истинности является множество тех и только тех значений x, для которых справедливы два неравенства $x+3<0$ и $x-2<0$, т. е. это множество решений системы

$$\begin{matrix} x+3<0, \\ x-2<0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x<-3, \\ x<2 \end{matrix} \Leftrightarrow (-\infty; -3).$$

г) Для предложения $A(x)\to B(x)$ («если $x+3<0$, то $x-2\geqslant 0$») множество истинности не содержит ни одного элемента.

д) Для предложения $A(x)\to \bar{B}(x)$ («если $x+3<0$, то $x-2<0$») множеством истинности является вся числовая ось.

2.1. Пусть $A(x)=\{x-2>0\}$, $B(x)=\{x+2\geqslant 0\}$ — два предложения, зависящие от переменной x $(x\in\mathbb{R})$. Указать множества истинности предложений:

а) $A(x)\vee B(x)$; г) $B(x)\to A(x)$;
б) $A(x)\wedge B(x)$; д) $A(x)\cdot\bar{B}(x)$;
в) $A(x)\to B(x)$; е) $\bar{B}(x)\to\bar{A}(x)$.

2.2. Пусть $A(x)=\{x^2+x+1\geqslant 0\}$, $B(x)=\{x+2\geqslant 0\}$ — два предложения, зависящие от переменной x $(x\in\mathbb{R})$. Указать множества истинности предложений:

а) $A(x)\vee B(x)$; г) $B(x)\to A(x)$;
б) $A(x)\wedge B(x)$; д) $A(x)\cdot\bar{B}(x)$;
в) $A(x)\to B(x)$; е) $\bar{B}(x)\to\bar{A}(x)$.

2.3. Определить множество истинности предложения $A=\left\{\frac{1}{n+1}<\frac{1}{3}\right\}$, определенного для всех $n\in\mathbb{N}$.

2.4. При каких значениях параметра a множество истинности предложения

$$x-2\frac{a-1}{a}\leqslant\frac{2}{3a}(x+1)$$

представляет собой промежуток: а) $[2;\infty)$; б) $(-\infty, 2]$?

2.5. Найти множество истинности предложения

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x-5}\geqslant\sqrt{5-2x}.$$

2.6. Пусть $A(x,y)=\{(a+1)x+8y=4a\}$, $B(x,y)=\{ax+(a+3)y=3a-1\}$ — два предложения, определенные для всех пар действительных чисел (x,y). При каком значении параметра a предложение $A(x,y)\wedge B(x,y)$ имеет множество истинности:

1) состоящее только из одного элемента (x,y);
2) состоящее более чем из одного элемента (x,y);
3) не содержащее ни одного элемента?

2.7. Пусть $A(x)=\{ax-1\leqslant 0$, $B(x)=\{x-4a\geqslant 0\}$ — два предложения, определенные при всех действительных значениях x. При каких значениях a множество истинности предложения $A(x)\wedge B(x)$ не пусто?

С предложениями, зависящими от переменной, близко связаны два часто встречающихся утверждения.

1. Предложение $A(x)$ $(x\in M)$ истинно для всех элементов множества M.

2. Найдется хотя бы один элемент множества M, для которого $A(x)$ $(x\in M)$ истинно.

Эти утверждения настолько часто встречаются в математике, что получили специальную краткую символическую запись: знак общности $\forall$ и знак существования $\exists$. Знак $\forall$ заменяет слова: «для всех», «всякий», «любой», «каждый». Знак $\exists$ употребляется вместо слов: «хотя бы один», «найдется», «существует». Утверждения 1 и 2 с помощью этих знаков имеют вид

1. $(\forall x\in M)\,A(x)$;
2. $(\exists x\in M)\,A(x)$.

В первом случае утверждение заключается в том, что множество истинности $A(x)$ совпадает с M. Во втором случае утверждение заключается в том, что множество истинности $A(x)$ не пусто. Оба утверждения представляют собой высказывания и могут быть истинны или ложны *).

Например, предложение с переменной

$$A(x)=\{x-3>0\},\qquad x\in\mathbb{R},$$

рассматриваемое над множеством действительных чисел, допускает два высказывания

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,A(x)\quad\text{и}\quad(\exists x\in\mathbb{R})\,A(x).$$

Первое из них ложно, второе истинно.

---

*) Знак $\forall$ называют *квантором общности*, а знак $\exists$ — *квантором существования*.

Если в качестве M взять интервал $(3; \infty)$, то оба высказывания $(\forall x \in M)\, A(x)$ и $(\exists x \in M)\, A(x)$ истинны.

Пример 2.1. Выяснить истинность следующих высказываний:

$$(\forall x \in R)\,(\exists y \in R) \qquad (x + y = 3),$$
$$(\exists y \in R)\,(\forall x \in R) \qquad (x + y = 3).$$

Решение. Прочитаем первое высказывание: «для любого действительного числа x существует действительное число y такое, что справедливо равенство $x + y = 3$». Это высказывание истинно, так как для каждого x в качестве y достаточно взять значение $3 - x$.

Прочитаем второе высказывание: «существует такое действительное число y, что для всех действительных чисел x справедливо равенство $x + y = 3$». Очевидно, что нет ни одного такого числа y, которое сразу для всех x обеспечивало бы равенство $x + y = 3$. Следовательно, второе высказывание ложно.

Сформулировать и выяснить истинность следующих высказываний.

2.8. $(\exists x \in \mathbf{R}),\ (\exists y \in \mathbf{R}) \qquad (x + y = 3)$.

2.9. $(\forall x \in \mathbf{R}),\ (\forall y \in \mathbf{R}) \qquad (x + y = 3)$.

2.10. $(\forall x \in \mathbf{R}),\ (\forall y \in \mathbf{R}),\ (x < y) \Rightarrow (\exists z \in \mathbf{R}) \quad (x < z < y)$

2.11. $(\forall x \in \mathbf{R}) \quad (x^2 + 1 > 0)$.

2.12. $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad ((x+1)(x-1) > 0 \Rightarrow (x^2 - 1) > 0)$.

2.13. $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad (x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x - 1 > 0)$.

2.14. $(\forall x \in \mathbf{R}) \qquad (x - 1 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0)$.

2.15. $(\exists x \in \mathbf{R}) \qquad (\sqrt{x^2} < x)$.

2.16. $(\exists x \in \mathbf{R}) \qquad (\sqrt{x^2} \geqslant x)$.

2.17. $(\forall x \in \mathbf{R}),\ (\forall y \in \mathbf{R}) \qquad (\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y)$.

Для того чтобы убедиться в ложности высказывания $(\forall x \in M)\, A(x)$, достаточно найти хотя бы один элемент $x \in M$, для которого высказывание $A(x)$ ложно. Таким образом,

$$\overline{(\forall x \in M)\, A(x)} = (\exists x \in M)\, \overline{A}(x), \tag{1}$$

и наоборот, для того чтобы убедиться в ложности высказывания $(\exists x \in M)\, A(x)$, необходимо проверить, что для всех $x \in M$ справедливо $A(x)$, т. е.

$$\overline{(\exists x \in M)\, A(x)} = (\forall x \in M)\, \overline{A}(x). \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) позволяют формально строить отрицания для утверждений, снабженных кванторами общности и существования.

Пример 2.2. Сформулировать с помощью логических символов два утверждения. Первое: число a является пределом числовой последовательности u_n. Второе: число a не является пределом числовой последовательности u_n.

Решение. Вспомним словесную формулировку утверждения

$$\lim_{n \to \infty} u_n = a.$$

Число a является пределом числовой последовательности, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое N, что для всех $n > N$ справедливо неравенство $|u_n - a| < \varepsilon$ (т. е. если $n > N$, то $|u_n - a| < \varepsilon$). С помощью логической символики получаем

$$(\forall \varepsilon > 0),\quad (\exists N \in \mathbf{N}),\quad (\forall n \in \mathbf{N}) \quad (n > N \to |u_n - a| < \varepsilon).$$

Для построения утверждения

$$\lim_{n \to \infty} u_n \neq a$$

с помощью логической символики воспользуемся свойствами операции отрицания:

$$\overline{(\forall \varepsilon > 0),\ (\exists N \in \mathbf{N}),\ (\forall n \in \mathbf{N}) \quad (n > N \to |u_n - a| < \varepsilon)} =$$
$$= (\exists \varepsilon > 0),\ (\forall N \in \mathbf{N}),\ (\exists n \in \mathbf{N}) \quad \overline{(n > N \to |u_n - a| < \varepsilon)} =$$
$$= (\exists \varepsilon > 0),\ (\forall N \in \mathbf{N}),\ (\exists n \in \mathbf{N}) \quad ((n > N) \wedge (|u_n - a| \geqslant \varepsilon)). \tag{*}$$

Замена квантора общности на квантор существования при построении отрицания следует из правил (1), (2). Из этих же правил следует знак отрицания над последним высказыванием, означающим импликацию $A \to B$, где высказывания A и B суть

$$A = \{n > N\}, \quad \text{а} \quad B = \{|u_n - a| < \varepsilon\}.$$

Но отрицание импликации $A \to B$ представляет собой конъюнкцию $A \wedge \overline{B}$. Действительно,

$$\overline{A \to B} = \overline{(A \wedge B) \vee \overline{A}} = \overline{(A \wedge B)} \wedge A = \overline{A} \vee \overline{B} \wedge A = A \wedge \overline{B}.$$

Словесная формулировка $\lim\limits_{n \to \infty} u_n \neq a$, таким образом, имеет вид: «число a не является пределом последовательности u_n, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $N \in \mathbf{N}$ найдется номер $n \in \mathbf{N}$ такой, что истинны одновременно два высказывания $n > N$ и $|u_n - a| \geqslant \varepsilon$».

2.18. Используя логическую символику, записать высказывания и их отрицания:

а) «последовательность ограничена»;

б) «последовательность монотонно возрастает».

2.19. Используя логическую символику, сформулировать высказывание $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

2.20. Число M называется *точной верхней гранью* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если выполняются два условия $f(x)\leqslant M$ для всех $x\in[a;b]$ и для любого $\varepsilon>0$ найдется $x\in[a;b]$ такой, что $f(x)>M-\varepsilon$. Если M — точная верхняя грань $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, то пишут $M=\sup\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$.

а) Используя логическую символику, сформулировать высказывание $M=\sup\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$.

б) Используя логическую символику, сформулировать обратное утверждение $M\neq\sup\limits_{x\in[a;\,b]} f(x)$.

Дать словесную формулировку.

§ 3. Метод математической индукции

В различных разделах математики часто приходится доказывать истинность некоторого предложения $\alpha(n)$, зависящего от натурального n сразу для всех значений переменной $n\in\mathbf{N}$. Метод основан на следующем принципе. Если α — некоторое утверждение, имеющее смысл для всех $n\in\mathbf{N}$, то для того, чтобы установить его истинность для всех $n\in\mathbf{N}$, поступают следующим образом: проверяют истинность $\alpha(1)$ и истинность импликации $\alpha(k)\to\alpha(k+1)$, где k — произвольное натуральное число.

Покажем, что если выполнены $\alpha(1)$ и $\alpha(k)\to\alpha(k+1)$, то $\alpha(3)$ истинно.

Действительно, так как $\alpha(1)$ истинно, то в силу истинности импликации $\alpha(k)\to\alpha(k+1)$ для любого $k\in\mathbf{N}$, положив $k=1$, получим истинность $\alpha(2)$, а положив в высказывании $(\alpha(k)\to\alpha(k+1))$ $k=2$, получим истинность $\alpha(3)$.

На языке логической символики принцип математической индукции может быть записан следующим образом:

$$(\alpha(1)\wedge(\alpha(k)\to\alpha(k+1)))\to(\forall n\in N)(\alpha(n))$$

или

$$(\alpha(1)\wedge((\forall k\in\mathbf{N})(\alpha(k)\to\alpha(k+1)))\to(\forall n\in\mathbf{N})(\alpha(n)).$$

Пример 3.1. Доказать, что при любом n выражение

$$n(2n^2-3n+1)$$

делится на 6.

Решение. Высказывание $\alpha(n)$, сформулированное в задаче, определено для любого $n\in\mathbf{N}$. Согласно принципу математической индукции, проверим $\alpha(1)$. При $n=1$ получаем

$$1(2-3+1)=0,$$

0 делится на 6, следовательно, $\alpha(1)$ истинно.

Предположим, что истинно высказывание $\alpha(k)$, т. е. $k(2k^2-3k+1)$ делится на 6. Заметим, что истинность $\alpha(k+1)$ будет следовать из истинности $\alpha(k)$ и равенства

$$(k+1)(2(k+1)^2-3(k+1)+1)-k(2k^2-3k+1)=6l,\quad (*)$$

где l — некоторое натуральное число.

Раскрывая скобки в (*) и группируя члены, имеем

$$2[(k+1)^3-k^3]-3[(k+1)^2-k^2]+(k+1-k)=$$
$$=2[(k+1)^2+k(k+1)+k^2]-3[k+1+k]+1=$$
$$=6k^2+6k+2-6k-3+1=6k^2.\quad (**)$$

Таким образом, для любого натурального k импликация $\alpha(k)\to\alpha(k+1)$ истинна. Другими словами, доказана истинность составного высказывания

$$\alpha(1)\wedge(\forall k\in\mathbf{N})(\alpha(k)\to\alpha(k+1)),$$

которое является условием истинности импликации

$$\alpha(1)\wedge(\forall k\in\mathbf{N})(\alpha(k)\to\alpha(k+1))\to(\forall n\in\mathbf{N})(\alpha(n)).\quad (***)$$

Так как условие истинно и истинно все составное высказывание (***), то истинно и следствие. Утверждение доказано.

Доказать, что при любом $n\in\mathbf{N}$:

3.1. $6^{2n-2}+3^{n+1}+3^{n-1}$ делится на 11.

3.2. $11^{n+1}+12^{2n-1}$ делится на 133.

3.3. n^5-n кратно 5.

3.4. $5\cdot2^{3n-2}+3^{3n-1}$ кратно 19.

3.5. n^7-n кратно 7.

3.6. $2^{2^n}+1$ оканчивается цифрой 7, при $n>1$.

3.7. Доказать, что если n четно, то $20^n+16^n-3^n-1$ делится на 323.

3.8. Доказать, что число

$$(10^n+10^{n-1}+\ldots+1)(10^{n+1}+5)+1$$

есть точный квадрат.

Пример 3.2. Доказать методом математической индукции формулу

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\quad (*)$$

Решение. Высказывание $\alpha(n)$ о том, что формула (*) имеет место, определено при любом натуральном n.

Высказывание $\alpha(1)$ истинно, так как

$$1^2 = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}.$$

Предположим, что $\alpha(k)$ истинно, т. е. имеет место формула

$$1^2+2^2+\ldots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}.$$

Выясним, будет ли при этом условии истинно $\alpha(k+1)$, т. е. будет ли верна формула

$$1^2+2^2+\ldots+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2(k+1)+1)}{6}. \qquad (**)$$

При условии истинности $\alpha(k)$ левую часть (**) можно представить в виде

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2. \qquad (***)$$

Преобразуем (***):

$$\frac{(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]}{6}=\frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}.$$

Заметим, что произведение $(k+2)(2(k+1)+1)$, входящее в правую часть (**), равно $2k^2+7k+6$.

Таким образом, из истинности $\alpha(k)$ следует истинность $\alpha(k+1)$, т. е. для любого натурального k доказана импликация $\alpha(k)\to\alpha(k+1)$.

Заключительная часть доказательства проводится так же, как в примере 3.1.

Доказать, что для любого натурального n справедливы равенства:

3.9. $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$.

3.10. $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\dfrac{n(4n^2-1)}{3}$.

3.11. $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+(n-1)\cdot n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{3}$.

3.12. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

3.13. $1^3+2^3+\ldots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3.14. $1^5+2^5+\ldots+n^5=\dfrac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$.

С помощью метода математической индукции удобно доказывать справедливость некоторых неравенств.

Пример 3.3. Доказать, что при $a>-1$ справедливо неравенство

$$(1+a)^n\geqslant 1+nx.$$

Решение. Проверим, что $\alpha(1)$ истинно.

Действительно,

$$1+a=1+a.$$

Предположим, что истинно $\alpha(k)$, т. е.

$$(1+a)^k\geqslant 1+kx. \qquad (*)$$

Докажем теперь, что истинность $\alpha(k+1)$ следует из истинности $\alpha(k)$. Умножив обе части (*) на $1+a$, имеем

$$(1+a)^{k+1}\geqslant(1+ka)(1+a)$$

или

$$(1+a)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)a+ka^2.$$

Так как $ka^2\geqslant 0$, то справедливо неравенство

$$(1+a)^{k+1}\geqslant 1+(k+1)a.$$

Таким образом, доказана импликация $\alpha(k)\to\alpha(k+1)$.

Заключительная часть доказательства проводится так же, как в примере 3.1.

Доказать, что для любого $n\in\mathbb{N}$ справедливы неравенства:

3.15. Если $x_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, то

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\leqslant\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

3.16. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{5}{6}\ldots\dfrac{2n-1}{2n}<\dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

3.17. $\dfrac{n}{2}<1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{2^n-1}<n$.

3.18. Если $x_i>0\,(1\leqslant i\leqslant n)$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n\leqslant 1/2$, то

$$(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_n)\geqslant 1/2.$$

3.19. Доказать, что если $x_i>0\,(1\leqslant i\leqslant n)$ и $x_1+x_2+\ldots+x_n=a$, то

$$x_1\cdot x_2\ldots x_n\leqslant\left(\frac{a}{n}\right)^n.$$

3.20. $\dfrac{1}{\sqrt{1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$.

3.21. $\dfrac{4^n}{n+1}>\dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$.

3.22. Пользуясь тем, что $\ln(1+x) < x$, доказать неравенство

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \ln(n+1).$$

§ 4. Системы счисления

Здесь будут рассматриваться только так называемые *позиционные* системы счисления. Напомним, что целое число A называется *записанным* в (позиционной) системе счисления с основанием t (или, короче, в t-ичной системе счисления, где $t>1$, $t\in\mathbf{N}$), если оно представлено в виде

$$A = a_n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0,$$

где $0 \leqslant a_i < t$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ называют *t-ичными цифрами* числа A, а число t — *основанием* t-ичной системы счисления.

При $t=10$ получаем десятичную систему счисления.

Ясно, что $a_0 = A - (a_n t^n + \ldots + a_1 t)$ является остатком от деления A на t. Неполное частное при делении A на t имеет вид $a_n t^{n-1} + \ldots + a_1$. Если разделить его на t, то в остатке получим a_1. Поступая далее так же, получим последовательно все цифры числа A в t-ичной системе. Если число $A = a_n t^{-n} + a_{n-1}t^{-n-1} + \ldots + a_1\cdot t^{-1}$, то для получения цифр числа A требуется умножить его последовательно на t. При первом умножении $A\cdot t = a_n t^{-n+1} + a_{n-1}t^{-n+2} + \ldots + a_1$; a_1 — уже целое число. Чтобы найти a_2, следует умножить на t число $A\cdot t - a_1$; число a_2 будет целой частью этого числа. Поступая так далее, мы будем получать последовательно цифры дробного числа A в t-ичной записи.

Пример 4.1. Записать числа 506 и 0,506 в системе счисления с основанием 4.

Согласно изложенному выше алгоритму, имеем

$$\begin{array}{r|l}
506 & 4 \\ \cline{2-2}
\underline{2} & 126 \;|\; 4 \\
 & \quad\underline{2} \;|\; 31 \;|\; 4 \\
 & \qquad\quad \underline{3} \;|\; 7 \;|\; \underline{4} \\
 & \qquad\qquad\; \underline{3} \;|\; \underline{1}
\end{array}$$

Записывая подчеркнутые остатки в обратном порядке, получаем запись числа 506 в четверичной системе счисления

$$(506)_{10} = (13322)_4,$$

Для получения записи дробного числа 0,506 в четверичной системе счисления, согласно изложенному выше алгоритму, проделаем следующие вычисления:

$$0{,}506\cdot 4 = \underline{2}{,}024,\quad 0{,}024\cdot 4 = \underline{0}{,}096,\quad 0{,}096\cdot 4 = \underline{0}{,}384,$$
$$0{,}384\cdot 4 = \underline{1}{,}436,\quad 0{,}436\cdot 4 = \underline{1}{,}744,\quad 0{,}744\cdot 4 = \underline{2}{,}976$$

и т. д. Цифры получающегося числа — это последовательные целые части результатов умножения, т. е.

$$(0{,}506)_{10} \approx (0{,}200112\ \ldots)_4.$$

Пример 4.2. В классе 24 девочки и 32 мальчика, всего 100 человек. В какой системе счисления записаны числа?

Решение. Составим уравнение

$$2\cdot p^1 + 4\cdot p^0 + 3\cdot p^1 + 2\cdot p^0 = p^2,$$

где p — неизвестное основание системы счисления. Приводя подобные члены, получим уравнение

$$5p + 6 = p^2,$$

корни которого $p_1 = 6$, $p_2 = -1$.

Ответ. Числа записаны в шестеричной системе счисления.

Найти следующие числа в указанной системе счисления (числа, если это не указано, даны в десятичной системе счисления).

4.1. Представить число 10 000 в шестеричной системе.

4.2. Найти, чему равно число $(1\,14\,144)_6$ в десятичной системе.

4.3. Найти, чему равно $(101)_2$ в десятичной системе.

4.4. Найти, чему равно $(25)_7$ в десятичной системе.

4.5. В системе счисления с основанием 5 записано число 22 001. Найти его десятичный эквивалент. Какому числу будет соответствовать эта же запись, если система счисления десятичная?

Для чисел, записанных в десятичной системе, пользуются правилами умножения и сложения «столбиком», деления «углом». Эти же правила полностью применимы в любой позиционной системе счисления.

Сложение столбиком, как и в десятичной системе, всегда производится поразрядно, начиная с младшего разряда. При этом если в предыдущем разряде сумма превышает основание системы или будет равна ему, то надо сделать перенос в следующий разряд.

Пример 4.3. Сложить столбиком $(1357)_8$ и $(2463)_8$.

Решение.
$$\begin{array}{r} +\;(1357)_8 \\ (2463)_8 \\ \hline (4042)_8 \end{array}$$

Складывая в разряде единиц 7 и 3, получаем $10 = 8 + 2$, 2 записываем и 1 переносим в следующий разряд. Далее, $5 + 1 + 6 = 12$, $12 = 8 + 4$, 4 записываем и 1 переносим в следующий разряд; $4 + 4 = 8$, $8 = 1 \cdot 8 + 0$, 0 записываем, единицу переносим в следующий разряд.

Ответ. $(1357)_8 + (2463)_8 = (4042)_8$.

Для умножения следует сначала выписать таблицу умножения чисел, меньших основания системы.

Возьмем в качестве примера таблицу умножения шестеричной системы:

	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5
2	2	4	10	12	14
3	3	10	13	20	23
4	4	12	20	24	32
5	5	14	23	32	41

Все числа в таблице записаны в шестеричной системе счисления. На пересечении столбца и строки стоят числа, являющиеся произведением номеров строки и столбца. Пользуясь таблицей, легко перемножать числа столбиком.

Пример 4.4. Умножить $(142)_6$ на $(212)_6$.

Решение.
$$\begin{array}{r} (142)_6 \\ (212)_6 \\ \hline (324)_6 \\ (142)_6 \\ (324)_6 \\ \hline (34544)_6 \end{array}$$

Пример 4.5. Разделить «углом» $(120\,101)_3$ на $(102)_3$.

Решение.
$$\begin{array}{r|l} (120101)_3 & (102)_3 \\ \cline{2-2} (102)_3 & (1101)_3 \\ \cline{1-1} (111)_3 & \\ (102)_3 & \\ \cline{1-1} (201)_3 & \\ (102)_3 & \\ \cline{1-1} (22)_3 & \end{array}$$

Таким образом, $(120\,101)_3 = (11\,01)_3 (102)_3 + (22)_3$.

4.6. Сложить $(23\,651)_8$ и $(17\,043)_8$.

4.7. Сложить $(423)_6$, $(1341)_6$ и $(521)_6$.

4.8. Умножить $(352)_6$ на $(245)_6$.

4.9. Составить таблицу умножения двоичной системы.

4.10. Перемножить числа $(101)_2$ и $(100)_2$. Результат представить в десятичной системе.

4.11. Доказать, что число $(121)_n$ является полным квадратом, если $n > 2$.

4.12. Доказать, что число $(1331)_n$ является полным кубом, если $n > 3$.

4.13. В какой системе счисления справедливо равенство
$$31 - 13 = 13?$$

4.14. Найти частное от деления $(1111)_3$ на $(22)_3$.

4.15. В какой системе счисления справедливо равенство
$$101 \cdot 11 = 1111?$$

4.16*. Доказать, что если вес тела выражается целым числом и не превосходит 31 кг, то его можно определить с помощью не более пяти гирь при условии, что гири можно ставить только на одну чашку весов. Указать веса гирь.

4.17.** Доказать, что если вес тела выражается целым числом и не превосходит 40 кг, а взвешивание происходит на рычажных весах (т. е. гири могут быть установлены на любую чашку весов), то для определения веса тела понадобится не более четырех гирь. Определить веса этих гирь и описать алгоритм взвешивания.

4.18.** Пусть условия взвешивания такие же, как в задаче 4.17** и известно, что M_p — максимальный вес, который удается определить с помощью p имеющихся гирь. Доказать, что если M_{p+1} — максимальный вес, который удается определить с помощью $p + 1$ гири, то
$$M_{p+1} = 3M_p + 1.$$

4.19.** Доказать, что если M_p — максимальный вес груза, который может быть взвешен $m_1, \ldots, m_p$ гирями, то
$$M_p = (\underbrace{11\ \ldots\ 1}_{p})_3.$$

4.20.** Выяснить, какое минимальное число гирь и какого веса потребуется для взвешивания тела весом m ($m \leqslant n$) на рычажных весах. Указать алгоритм взвешивания.

4.21.** Пусть $r = p \cdot a$, где a — основание системы счисления, p — число разрядов. Если $r = 30$, то в какой системе счисления можно представить максимальное число?

С представлением числа в той или иной системе счисления связаны признаки делимости числа, которые формулируются на основе цифровой записи числа.

Пример 4.6. Вывести признак делимости на три в десятичной системе счисления.

Решение. Представим число $A=(a_na_{n-1}\ldots a_0)_{10}$ в виде

$$A=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}10^{n-1}+\ldots+a_0 10^0=$$
$$=a_n(10^n-1+1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1+1)+\ldots+a_0\cdot 10^0=$$
$$=a_n(10^n-1)+a_{n-1}(10^{n-1}-1)+\ldots+a(10-1)+$$
$$+a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0.$$

Все числа 10^k-1 делятся на 3, следовательно, A делится на 3 в том и только в том случае, если $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_1+a_0$ — сумма его цифр — делится на 3.

4.22. Доказать, что $A=(a_na_{n-1}\ldots a_0)_{10}$ делится на 9, если $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0$ делится на 9.

4.23. Доказать, что $A=(a_na_{n-1}\ldots a_0)_{12}$ делится на 6, если a_0 делится на 6.

4.24. Доказать, что $A=(a_na_{n-1}\ldots a_0)_{12}$ делится на 8, если $(a_1a_0)_{12}$ делится на 8.

4.25. Доказать, что $A=(a_na_{n-1}\ldots a_0)_{12}$ делится на 11, если $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0$ делится на 11.

4.26. Доказать, что $A=(a_na_{n-1}\ldots a_0)_p$ делится на $p-1$ в том и только в том случае, если $a_n+a_{n-1}+\ldots+a_0$ делится на $p-1$.

4.27. Известно, что число $A=(3630)_p$ делится на 7. Доказать, что p кратно 7.

4.28. Известно, что число $A=(1210)_p$ делится на 11. Доказать, что p кратно 11.

4.29. Доказать, что если основание системы счисления p — простое число, большее 3, то $(100)_p-1$ делится на $(100)_5-1$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

§ 1

1.1. $-2y$. **1.2.** 1. **1.3.** $2ab$. **1.4.** $4/(\sqrt{x}+\sqrt{y})$. **1.5.** $2(\sqrt{a}+\sqrt{b})$. **1.6.** $\dfrac{1}{\left(a^{\frac{1}{m}}-a^{\frac{1}{n}}\right)}$. **1.7.** $a(a+1)$. **1.8.** $\dfrac{1}{ab}$. **1.9.** $\dfrac{t+1}{t}$. **1.10.** $\sqrt{6x}$. **1.11.** $-\sqrt[3]{20x}$. **1.12.** $4p-\sqrt{4p^2-1}$. **1.13.** $x\in[-\sqrt{2},-1)\Rightarrow-\sqrt[6]{2}$, $x\in(-1;\sqrt{2}]\Rightarrow\sqrt[6]{2}$. **1.14.** 1. **1.15.** 1. **1.16.** $-\dfrac{1}{\sqrt{b+2}}$.

§ 2

2.1. $y\in(-\infty,1]\Rightarrow-(y^2+y\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})$; $y\in[1,\infty)\Rightarrow\dfrac{y^3}{y-\sqrt[3]{2}}$. **2.2.** $x\in(-\infty;1)\cup(1;3)\Rightarrow-(x^2+x+1)$; $x\in(3;\infty)\Rightarrow x^2+x+1$. **2.3.** $x\in(-\infty;0)\cup(3;\infty)\Rightarrow\dfrac{1}{x+2}$; $x\in(0;3)\Rightarrow-\dfrac{1}{x+2}$. **2.4.** $x\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{2};0\right)\cup(0;3)\Rightarrow\dfrac{3}{x(2x+3)}$; $x\in(3;\infty)\Rightarrow\dfrac{1}{x}$. **2.5.** $y\in(-\infty;-5)\Rightarrow-\dfrac{1}{y}$; $y\in(-5;0)\cup\left(0;\dfrac{5}{3}\right)\cup\left(\dfrac{5}{3};\infty\right)\Rightarrow\dfrac{y+5}{y(3y-5)}$. **2.6.** $x\in(0,1)\Rightarrow\dfrac{1}{x-x^2}$; $x\in(1;\infty)\Rightarrow\dfrac{1}{x^2-x}$. **2.7.** $z\in(-\infty;0)\Rightarrow\dfrac{z^2-z}{z^2+1}$; $z\in[0;1)\cup(1;\infty)\Rightarrow\dfrac{z}{z-1}$. **2.8.** 1. **2.9.** $\sqrt{1-x^2}$. **2.10.** $\sqrt{(a+b)^3}-\sqrt{(a-b)^3}$. **2.11.** $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$. **2.12.** $x\in[0;9)\Rightarrow3-2\sqrt{x}$; $x\in(9;\infty)\Rightarrow-3$. **2.13.** $x\in(-\infty;0)\Rightarrow-1/2$; $x\in(0;\infty)\Rightarrow\dfrac{1}{2}$.

2.14. $x\in[11;\ \infty)\Rightarrow 2\sqrt{x-2}$; $x\in[2;\ 11)\Rightarrow 6$. **2.15.** $x\in[1;\ 2)\Rightarrow$ $\Rightarrow 2\sqrt{x-1}$; $x\in[2;\ \infty)\Rightarrow 2$. **2.16.** $x\in(-\infty;\ 0)\Rightarrow 6$; $x\in[0;\ 6)\Rightarrow$ $\Rightarrow 6-2x$; $x\in[6;\ \infty)\Rightarrow -6$. **2.17.** $x\in[2;\ 4)\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{2}}{4-x}$; $x\in(4;\ \infty)\Rightarrow$ $\Rightarrow\dfrac{2\sqrt{x-2}}{x-4}$. **2.18.** $\sqrt{2}$. **2.19.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **2.20.** $a\in(0;\ 1)\Rightarrow\dfrac{1-a}{\sqrt{a}}$; $a\in(1;\ \infty)\Rightarrow\dfrac{a-1}{\sqrt{a}}$. **2.21.** $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{q+p}{q-p}}$. **2.22.** 0. **2.23.** 0,64. **2.24.** n^2/m^2. **2.25.** 1. **2.26.** 1. **2.27.** 2. **2.28.** 1. **2.29.** $2\sqrt{3m-n}$.

§ 3

3.14*. Указание. Привести выражение, стоящее в левой части тождества, к общему знаменателю и рассмотреть числитель дроби как многочлен второй степени относительно a. **3.16*.** Указание. См. указание к задаче 3.14*.

§ 4

4.7*. Указание. Найти единственное решение системы. **4.9*.** Указание. Поделить каждое из тождеств условия на правую часть.

§ 5

5.1. 1. **5.2.** $ab(a-b)^2$. **5.3.** a^2+a+1. **5.4*.** $\dfrac{1}{3}$. Указание. Использовать (4) для записи всех логарифмов по некоторому общему основанию. **5.5.** $(\log_2 x+1)^3$. **5.6.** $\dfrac{1}{\log_a b-1}$. **5.7.** 6. **5.8.** 3. **5.9.** $a(b+3)$. **5.10.** $\dfrac{a+b}{1-b}$. **5.11.** $a\cdot b\cdot c+1$. **5.12.** $\log_8 a=$ $=\dfrac{1}{1-\log_8 c}$. **5.13*.** $\dfrac{1}{\alpha^{-1}+\beta^{-1}+\gamma^{-1}+\delta^{-1}}$. Указание. Перейти к логарифмам по основанию x.

5.18*. Указание. Перейти в левой части выражения к логарифмам по основанию N. **5.19*.** Указание. При упрощении учесть, что корень четной степени понимается в арифметическом смысле. **5.20*.** Указание. См. указание к 5.18*. **5.21*.** Указание. См. указание к 5.18*. **5.22*.** Указание. Сравнить левую и правую части неравенства с 4. **5.23*.** Указание. См. указание к 5.22. **5.25*.** Указание. См. пример 5.6.

ГЛАВА 2

§ 1

1.1. 2; -4. **1.2.** -2; 1. **1.3*.** $\varnothing$. Указание. Обозначить $z=x^2-5x+6$. **1.4*.** $\dfrac{-5\pm\sqrt{85}}{2}$; $\dfrac{-5\pm\sqrt{5}}{2}$. Указание. Обозначить $z=x^2+5x$. **1.5*.** $-\dfrac{3}{2}$; 0; $\dfrac{-3\pm\sqrt{65}}{4}$. Указание. Обозначить $z=2x^2+3x$. **1.6.** ± 3; ± 2. **1.7.** $\pm\sqrt[4]{\dfrac{5}{2}}$. **1.8.** $\dfrac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+1)$; $\dfrac{1}{2}(-\sqrt[3]{5}+1)$. **1.9*.** Нет решений. Указание. Поделить обе части уравнения на x^4. **1.10.** 0; 5. **1.11.** $-\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **1.12.** -1. **1.13.** 1; $-\dfrac{5}{2}$. **1.14*.** $-\dfrac{2}{3}$; $-\dfrac{1}{2}$; 3. Указание. Использовать формулу бинома Ньютона. **1.15.** 1; $a+\sqrt{a}$; $a-\sqrt{a}$. **1.16.** 4; 3; 2; -5. **1.17.** $\dfrac{2a\pm\sqrt{26a^2\pm 2\sqrt{25a^4+4b^4}}}{2}$. **1.18.** -1; 12. **1.19.** $\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{6}$. **1.20.** -3; 4. **1.21.** -3; 2. **1.22.** $-5\pm\sqrt{89}$; $-5\pm\sqrt{3}$. **1.23*.** -1; 0. Указание. Ввести обозначение $y=x^2+x$. **1.24.** $\dfrac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$. **1.25.** -2; ± 1; $\dfrac{1}{2}$. **1.26.** 1; $-\dfrac{5}{3}$; $-\dfrac{3}{5}$. **1.27.** -2; $\dfrac{3}{2}$; $\dfrac{2}{3}$. **1.28.** $\dfrac{-4+\sqrt{6}\pm\sqrt{18-8\sqrt{6}}}{2}$; $\dfrac{-4-\sqrt{6}\pm\sqrt{18+8\sqrt{6}}}{2}$. **1.29.** 2. **1.30.** 1; -2. **1.31.** 5; -1. **1.32.** $\varnothing$. **1.33.** $\varnothing$. **1.34.** 0; $\pm\sqrt{3}$; 3. **1.35.** $\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$. **1.36.** -1; 3; $\pm\sqrt{3}$.

§ 2

2.1. $\dfrac{1}{2}$. **2.2.** -3; 5. **2.3.** 2. **2.4.** 5. **2.5.** $-\dfrac{1}{3}$. **2.6.** $\dfrac{1}{4}$; 5. **2.7*.** $a+b$; 0; $\dfrac{2ab}{a+b}$; $\dfrac{a^2+b^2}{a+b}$. Указание. Ввести вспомогательное неизвестное $z=\dfrac{a+b}{2}-x$. **2.8.** 1. **2.9.** 1; 3. **2.10.** 0. **2.11.** $3\pm\sqrt{20}$. **2.12.** 0; -2; $\dfrac{-2\pm\sqrt{66}}{2}$. **2.13.** 2; $\dfrac{1}{2}$. **2.14.** 0; -2.

2.15. 3; $\frac{2}{3}$. **2.16.** 4/5; 3. **2.17.** 5; 0,5. **2.18.** 3/4; 2. **2.19.** $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$. **2.20.** 2; $-1/6$; $\frac{19 \pm \sqrt{1333}}{54}$.

§ 3

3.1. -1. **3.2.** $\frac{1}{3}$. **3.3.** [1; 2]. **3.4.** -8; 2. **3.5.** -4; -2; 0; 2; 4. **3.6.** 0. **3.7.** $(-\infty; 2] \cup [3; \infty)$. **3.8.** 0; ± 1. **3.9.** $1\frac{3}{4}$; $2\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{4}$.

§ 4

4.1. 8. **4.2.** 5. **4.3.** 8. **4.4.** -1; 3. **4.5.** Не имеет решений. **4.6.** $\frac{7 \pm \sqrt{153}}{16}$. **4.7.** 2. **4.8.** Не имеет решений. **4.9.** -1; 2. **4.10.** 3. **4.11.** Не имеет решений. **4.12.** -5; 4. **4.13.** $\frac{17}{16}$. **4.14.** Не имеет решений. **4.15.** $\frac{7 + \sqrt{41}}{2}$. **4.16.** -61; 30. **4.17.** 2. **4.18.** 8; $8 \pm 4\sqrt{3}$. **4.19.** -6; -5; $-\frac{11}{2}$. **4.20.** -1. **4.21.** -2. **4.22.** 0. **4.23.** 4; 3. **4.24.** 0. **4.25.** 9. **4.26.** 1; $-\frac{1}{3}$. **4.27.** ± 4. **4.28.** -1. **4.29.** $\frac{-Bp \pm \sqrt{B^2p^2 + A[(p^2 + c - c_1)^2 - 4p^2c]}}{2Ap}$. **4.30.** ± 21. Указание. Освободиться от иррациональности в знаменателе. **4.31.** $\frac{2}{7}$; 5. **4.32*.** 3. Указание. Воспользоваться тем, что $\sqrt{x-2}\,\sqrt{4-x} = \sqrt{6x - x^2 - 8}$. **4.33.** -17; 23. **4.34.** -7; 2. **4.35.** $\frac{-1}{511}$; 2. **4.36.** ± 7. **4.37*.** Указание. Обозначить $y = \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{x-4}}{2}$. **4.38*.** 1. Указание. Использовать неравенство $\frac{1}{a} + a \geqslant 2$, справедливое при $a > 0$. **4.39.** 1024. **4.40.** 3; 5. **4.41.** $\pm 2\sqrt{2}$. **4.42.** -5; 2. **4.43.** -2; 0. **4.44*.** $\frac{66}{119}$. Указание. Заметить, что произведение слагаемых левой части уравнения равно 66. **4.45.** $\frac{3 - \sqrt{73}}{4}$; 0; $\frac{3}{2}$; $\frac{3 + \sqrt{73}}{4}$. **4.46.** 15. **4.47*.** -3; 6. Указание. Ввести обозначение $y = x^2 - 3x + 7$. **4.48.** $\frac{3}{4}$. **4.49.** $[-1; 0]$. **4.50.** [0; 3]. **4.51.** 2. **4.52.** $\pm \frac{\sqrt{5}}{2}$. **4.53.** Нет решений. **4.54.** 5. **4.55.** [1; 2,5]; 13. **4.56.** [5; 10]. **4.57.** 4. **4.58.** ± 2. **4.59.** 0. **4.60.** $\frac{1}{2}$; 5. **4.61.** -1. **4.62*.** -6; 1. Указание. Ввести вспомогательные неизвестные $u = \sqrt{x-2}$, $v = \sqrt{x+7}$. **4.63*.** ± 1. Указание. Вынести за скобку $\sqrt{x+1}$. **4.64.** Нет решений. **4.65.** 0. **4.66.** 1. **4.67.** 0; $\frac{63a}{65}$. **4.68.** $\frac{(2+\sqrt{3})^n + 1}{(2+\sqrt{3})^n - 1}$; $\frac{(2-\sqrt{3})^n + 1}{(2-\sqrt{3})^n - 1}$. **4.69.** 1. **4.70.** 26; 7. **4.71.** -6; 1.

§ 5

5.1. 4. **5.2.** 2. **5.3.** $\frac{3}{5}$. **5.4.** -3. **5.5.** $-\frac{1}{2}$. **5.6.** $-\frac{3}{2}$; 4. **5.7.** $\log_3 2$. **5.8.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **5.9.** -5; 93/11. **5.10.** 7/5. **5.11.** 81. **5.12.** 5/3. **5.13.** $-5/2$; 3. **5.14.** πn, $n \in \mathbf{Z}$. **5.15.** $-2 + \sqrt{4 - 2\log_3 5}$. **5.16.** $\pm\sqrt{2}$; ± 1. **5.17.** 2; -2. **5.18.** $\log_3(2 + \sqrt{5})$; $\log_3 \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. **5.19.** 3; $\log_6 8$. **5.20.** 9; 81. **5.21.** 1; $-\frac{1}{3}$. **5.22.** 1; -1; 0. **5.23.** $\frac{1}{2}$. **5.24.** 0. **5.25.** -1; 1. **5.26.** 1; $\log_4 3$. **5.27.** $\frac{4}{3}$; $\frac{\log_2 3 + 3}{3}$. **5.28.** 0. **5.29.** -2; 2. **5.30.** -2; 2. **5.31.** $\log_{3/4}\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)$. **5.32.** 1. **5.33.** 1; 3. **5.34.** $-\frac{1}{2}$. **5.35.** 2; 4; 11. **5.36.** $\frac{1}{3}$; 2; 4. **5.37.** 1; $a^{1/\pi}$. **5.38.** $\frac{1}{5}$; 25. **5.39.** 10; 10^{-4}. **5.40.** 100. **5.41.** 10; 1/10. **5.42.** 10; $10^{\log_2 3}$. **5.43*.** 2. Указание. Разделить обе части уравнения на 2^x и воспользоваться свойством монотонности показательных функций. **5.44*.** 3. Указание. См. указание к 5.43. **5.45*.** 1. Указание. Сравнить наибольшее значение функции, стоящей в левой части уравнения, с наименьшим в правой. **5.46*.** 1. Указание. Найти y_1 и y_2 — корни квадратного уравнения относительно переменной $y = 2^x$, уравнения $y_1(x) = 2^x$ и $y_2(x) = 2^x$ решить, используя свойство монотонности входящих в них функций. **5.47*.** 3. Указание. См. указание к 5.46. **5.48*.** 1. Указание. Сделать замену $y = x - 1$ и воспользоваться указанием к 5.46*. **5.49.** 4. **5.50.** $\pm\sqrt{2}$. **5.51.** Нет решений.

§ 6

6.1. $-8/3$. **6.2.** 3; 2. **6.3.** 2. **6.4.** 2. **6.5.** -1; 7. **6.6.** 3; $3 + \sqrt{2}$. **6.7.** 3. **6.8.** 7. **6.9.** 1, 3. **6.10.** -10. **6.11.** 2. **6.12.** 2; 3. **6.13.** 1. **6.14.** 1.

6.15. 3. **6.16.** 3. **6.17.** 1. **6.18.** $\pm 1/2$. **6.19.** 1; 3. **6.20.** 4; $\sqrt[3]{4}/2$. **6.21.** 1; 4; $1/\left(4\sqrt[5]{8}\right)$. **6.22.** 8; $1/\sqrt[3]{4}$. **6.23.** b^2+1; $b>0$ и $b\neq 1$. **6.24.** 1/2; 1/8. **6.25.** 1; 10^{-3}; 10^{-2}. **6.26.** 2^{-8}; 2^{27}. **6.27.** $3^{\sqrt[3]{9}}$; $3^{3\sqrt{4}}$. **6.28.** $\frac{1}{9}$; 81. **6.29.** $\frac{1}{9}$. **6.30.** 10. **6.31.** 10; 10^4. **6.32*.** -10; -1. Указание. Использовать тождество $\sqrt{x^2}=-x$, справедливое при $x<0$. **6.33.** $\log_3 10$; $\log_3 28-3$. **6.34.** 8. **6.35.** 10; 0,1. **6.36.** 1; 0,1; 0,01. **6.37.** 10^{-1}; $10^{\frac{(1+\sqrt{3})}{2}}$; $10^{\frac{1-\sqrt{3}}{2}}$. **6.38.** $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{15}$. **6.39.** $10^{\sqrt{\lg\left(\frac{13}{3}\right)}}$; $10^{-\sqrt{\lg\left(\frac{13}{3}\right)}}$; $10^{\sqrt{\lg\left(\frac{7}{3}\right)}}$; $10^{-\sqrt{\lg\left(\frac{7}{3}\right)}}$. **6.40.** 1; 2; $2^{-3/4}$. **6.41.** $3^{\pm\sqrt{3/2}}$; $3^{\pm 1/\sqrt{2}}$. **6.42.** $2^{-1/9}$. **6.43.** 1/81; 3. **6.44.** 1. **6.45.** 2. **6.46.** 1/4; 2.

§ 7

7.1. 4. **7.2.** 3. **7.3.** 2. **7.4.** 2. **7.5.** $1+\sqrt{1+\lg 2}$; $1-\sqrt{1+\lg 2}$. **7.6.** 0; 4. **7.7**.** 2; $-\frac{1}{\lg 5}$. Решение. Разделив обе части на $2^2\cdot 5^2$, получим $5^{x-2}\cdot 2^{\frac{3x}{x+1}-2}=1 \Leftrightarrow \left(5\cdot 2^{\frac{1}{1+x}}\right)^{x-2}=1 \Leftrightarrow 5\times\times 2^{\frac{1}{x+1}}=1$, или $x-2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\lg 5}$, или $x=2$. **7.8.** $\frac{2}{3}$. **7.9*.** $-1-\sqrt{\frac{1}{2}\lg\left(1+\sqrt{11}\right)}$; $-1+\sqrt{\frac{1}{2}\lg\left(1+\sqrt{11}\right)}$. Указание. Числа 10^{3x^2+7x}; 10^{x^2+5x}; $10^{-(x+x^2)}$ — последовательные члены геометрической прогрессии. **7.10.** 1; 8. **7.11.** $(\log_2 3-2)^{-1}$; $(1-\log_3 4)^{-1}$. **7.12.** (5; 0,5). **7.13.** 10; $10^{1/9}$. **7.14.** $\left[\frac{1}{6};\ \infty\right)$. **7.15.** 2; 7/3. **7.16.** 1. **7.17.** 5. **7.18.** 2. **7.19.** $(2k+1)\frac{\pi}{2}$; $-(4k+1)\frac{\pi}{4}$. **7.20.** $\pm\arccos\left(\log_{2+\sqrt{3}}2+k\pi\right)$. **7.21.** 0.

ГЛАВА 3

§ 1

1.1. (1, 2, 3). **1.2.** (8, 4, 2). **1.3.** (1, −2, −1). **1.4.** (1, −3, −2). **1.5.** $(abc,\ ab+ac+bc,\ a+b+c)$. **1.6.** $\left(-\frac{ab}{(b-1)(1-a)},\ \frac{b}{(a-1)(b-a)},\ \frac{a}{(b-1)(b-a)}\right)$. **1.7.** При $a\neq 0$, $a\neq -3$

система определена, при $a=-3$ система не определена, при $a=0$ система несовместна. **1.8.** При $a\neq 0$ система определена, при $a=0$ система не определена. **1.9.** При $a=0$ система не определена, при $a=2$ система несовместна, при остальных a — определена. **1.10.** При $a=0$, $a=1$ система несовместна, при $a=-1$, $a=2$ система не определена, при остальных a — определена. **1.11.** При $a+b\neq 0$ система определена, при $a+b=0$ не определена. **1.12.** При $a=0$, $b\neq 0$; $a=0$, $b=0$; $a\neq 0$, $b=0$ система не определена, при остальных значениях пары a, b система определена. **1.13.** Система не определена при $p=\frac{3b+14a}{16}$, $m=\frac{5b+2a}{64}$. **1.14.** Совместны. **1.15.** $a=1$, $b=-1$. **1.16.** (1, −1); (1, −2); (−1, −1); (−1, −2). **1.17.** $a=1$. **1.18.** $\left(0,\ 0,\ \frac{9}{4}\right)$; (2, −1, 1). **1.19.** $a=-4$. **1.20.** $a=3$.

§ 2

2.1. (1, 4); (4, 1). **2.2.** (0,6; 0,3); (0,4, 0,5). **2.3.** (3, 2); (2, 3). **2.4.** (14, −11); (11, −14). **2.5.** (4, 2); (2, 4). **2.6.** (1, 4); (−1, 6). **2.7.** (1, 2). **2.8.** (4, 1); (1, 4). **2.9.** (2, 1); (−2, −1). **2.10.** (4, 1); (1, 4); $\left(\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2},\ \frac{-5\mp\sqrt{41}}{2}\right)$, где знаки — оба верхних или оба нижних.

2.11. $\left(\pm\sqrt{\frac{ab\pm\sqrt{a^2b^2-4ab}}{2b}},\ \pm\sqrt{\frac{ab\mp\sqrt{a^2b^2-4ab}}{2a}}\right)$.

2.12. (1, 2); (2, 1). **2.13.** (3, 1); (1, 3). **2.14.** (1, 2); (2, 1). **2.15.** (1, 1). **2.16.** $(\pm 3,\ \pm 2)$; $(\pm 2,\ \pm 3)$. **2.17.** $(\pm 3,\ \pm 1)$; $(\pm 1,\ \pm 3)$. **2.18.** $(\pm 3,\ \pm 2)$; $(\pm 2,\ \pm 3)$. **2.19*.** (2, 1); (1, 2). Указание. Перейти к неизвестным $u=x+1$, $v=y+1$. **2.20*.** $(\pm 2,\ \pm 1)$; $(\pm 2,\ \pm 1)$. Указание. Первое уравнение представить в виде квадратного относительно переменной $z=(x+y)/(x-y)$. **2.21*.** (2, 3); $\left(-\frac{3}{4},\ -4\right)$. Указание. Разделить первое уравнение на второе. **2.22.** (5, 1); (1, 5); (3, 2); (2, 3). **2.23.** (2, 1); (−1, −2); $(1\pm\sqrt{2},\ 1\mp\sqrt{2})$. **2.24.** (−2, −4); $\left(\frac{5}{3},\ \frac{10}{3}\right)$. **2.25.** (1, 4); (−5, 4); (5, −4); (−1, −4). **2.26*.** (3, 5); (5, 3); (−3, −5); (−5, −3). Указание. Во второе уравнение, представленное в виде $x^4+y^4+2x^2y^2=931+x^2y^2$, подставить (x^2+y^2), выраженное из первого уравнения. **2.27*.** (2, 1); (1, 2); (−3, 0); (0, −3); (1, −2); (2, −1). Указание. Представить первое уравнение в виде $(x+y)^2+(xy-1)^2=10$. **2.28*.** (5, 2); (−2, −5). Указание. Разложить x^5-y^5 на множители. **2.29.** (2, −1, −1);

$(-1, -1, 2)$; $(-1, 2, -1)$. **2.30.** Все перестановки из чисел $\{1, 0, 0\}$. **2.31.** $(3, 1, 0)$. **2.32.** $(1, 1, 1)$. **2.33*.** $\left(2, -\frac{1}{2}, 4\right)$; $\left(-2, \frac{1}{2}, -4\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{15}{2}}, 2\sqrt{\frac{15}{2}}, \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$ и $\left(\sqrt{\frac{15}{2}}, -2\sqrt{\frac{15}{2}}, -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{15}}\right)$. Указание. Ввести новые переменные $u = xy$, $v = xz$, $w = yz$. Из первого и второго уравнений получившейся системы выразить u и w через v, третье уравнение после подстановки будет квадратным относительно v. **2.34.** $\{0, 0, 0\}$. **2.35.** $x = \frac{a(b^2+c^2)}{2bc}$; $y = \frac{b(a^2+c^2)}{2ac}$; $z = \frac{c(a^2+b^2)}{2ab}$.
2.36. $\pm\{2abc(ab-bc+ca)/[(ab+bc-ca)(-ab+bc+ca)]\}^{1/2}$, $\pm\{2abc(ab+bc-ac)/[(ab-bc+ca)(-ab+bc+ca)]\}^{1/2}$, $\pm\{2abc(-ab+bc+ca)/[(ab-bc+ca)(ab+bc-ca)]\}^{1/2}$.
2.37. $(1, 3, 9)$; $(9, 3, 1)$. **2.38.** $(0, 1, -1)$; $(-1, 2, -1)$; $(-1, 1, 0)$. **2.39.** $(3, -1, -1)$; $(0, 2, -1)$; $(0, -1, 2)$. **2.40.** Все перестановки из $\{1, 2, 3\}$. **2.41.** $(3, 6, 10)$ и $(6, 3, 10)$.

2.42. $$\left(\pm\frac{a}{\sqrt{a+b+c}}, \pm\frac{b}{\sqrt{a+b+c}}, \pm\frac{c}{\sqrt{a+b+c}}\right).$$

2.43. $$\left(\pm\frac{2}{\sqrt{(-a+b+c)(a+b-c)}},\right.$$

$$\left.\pm\frac{2}{\sqrt{(a-b+c)(-a+b+c)}}, \quad \pm\frac{2}{\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)}}\right)$$

и $(0, 0, 0)$. У одной из координат знак положительный, а у остальных — одинаковый. **2.44.** $(0, 0, 0)$; $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$; $(0, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$; $(\pm\sqrt{2}, 0, \pm\sqrt{2})$ и $(\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}, 0)$. **2.45.** $\left(1, 0, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-1, 0, \frac{1}{2}\right)$. **2.46.** $(\pm 1, \pm 2, \pm 5)$ — у одной из координат знак положительный, у остальных — одинаковый. **2.47.** $(0, 0, 0)$; $\left(-\frac{1}{2}, -1, 2\right)$. **2.48.** $(-5, -3, 0)$; $(3, 1, -2)$. **2.49.** $(2, -1)$. **2.50.** $(2, 3)$; $\left(\frac{13}{3}, -\frac{5}{3}\right)$. **2.51.** $\left(\frac{25}{3}, \frac{16}{3}\right)$. **2.52.** $(4, 4)$. **2.53.** $(2, 3)$; $(-2, -3)$; $(2, -3)$; $(-2, 3)$. **2.54.** $(1, 1)$. **2.55.** $(25, 9)$; $\left(\frac{49}{4}, \frac{81}{4}\right)$. **2.56.** $(5, 4)$. **2.57.** $\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}, \pm\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$. **2.58*.** $(0, 0)$; $(3, 2)$; $(-2, -3)$. **Указание.** $2xy = x^2 + y^2 - (x-y)^2$. **2.59.** $(3, -1, 2)$;

2.60. $(\pm 7, \pm 13)$; $(\pm 6{,}5, \pm 14)$. **2.61.** $(\pm 1, \mp 1, -2)$; $(\pm 1, 2, \pm 1)$; $(2, \pm 1, \pm 1)$. **2.62.** $\left(\pm\frac{3}{\sqrt{7}}, \mp\frac{1}{\sqrt{7}}, \pm\frac{5}{7}\right)$, $(\pm 1, \mp 1, \pm 2)$.

§ 3

3.1. $(5, 5)$. **3.2.** $(4, 2)$. **3.3.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$. **3.4.** $(6, 6)$. **3.5.** $(3, 9)$, $(9, 3)$. **3.6*.** $(1, 4)$. Указание. 4^x, $2^{(x-y)/2}$, 2^{3-y} — последовательные члены геометрической прогрессии. **3.7.** $(2, 2)$. **3.8.** $(2, 1)$. **3.9.** $(1, 9)$; $(16, 1)$. **3.10.** $(-2, 7)$. **3.11.** $(1, 1)$. **3.12.** $(2, 4)$. **3.13.** $(1, -1)$; $(5, 3)$. **3.14.** $(16, 3)$; $\left(\frac{1}{64}, -2\right)$. **3.15.** $(27, 4)$; $\left(\frac{1}{81}, -3\right)$. **3.16.** $(4, 1)$. **3.17.** $(6, 2)$. **3.18.** $(9, 16)$. **3.19*.** $(4, 1)$; $(-4, -1)$. Указание. Первое уравнение квадратное относительно $z = 2^{\sqrt{xy}}$, а второе — относительно $u = \frac{x+y}{x-y}$. **3.20*.** $(\sqrt{3}, 1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$. Указание. Ввести обозначения $z = x^2 + y$, $u = 2^{y-x^2}$ и использовать $6^{x^2-y} = 3^{x^2-y}/2^{y-x^2}$. **3.21.** $(2, 2, 1)$.

§ 4

4.1. $(3, 9)$. Указание. Прологарифмировать первое уравнение по основанию x. **4.2.** $\left(\frac{2}{3}, \frac{27}{8}, \frac{32}{3}\right)$. **4.3.** $(4, 2)$; $(-4, 2)$. **4.4*.** $(1, 1)$; $\left(\frac{16}{81}, \frac{4}{9}\right)$. Указание. Логарифмированием обоих уравнений по основанию 10 свести систему к рациональной относительно неизвестных $u = \frac{\lg x}{\lg y}$, $v = \sqrt[4]{x} + \sqrt{y}$. **4.5.** $\left(100, \frac{1}{100}\right)$; $(100, 100)$; $\left(\frac{1}{100}, 100\right)$; $\left(\frac{1}{100}, \frac{1}{100}\right)$. Указание. В первом уравнении перейти к десятичным логарифмам. **4.6.** $(2, 6)$; $(6, 2)$. **4.7.** $(1, 1, 1)$; $(4, 2, \sqrt{2})$. **4.8.** (a^4, a, a^7); $\left(\frac{1}{a^4}, a, \frac{1}{a^7}\right)$.

ГЛАВА 4

§ 1

1.1. $(-\infty; -2) \cup (2; \infty)$. **1.2.** $\left(-\frac{9}{2}; -2\right) \cup (3; +\infty)$. **1.3.** $[-1; 3]$. **1.4.** $(-\infty; -2) \cup (-1; 0]$. **1.5.** $(-8; 1]$. **1.6.** $(-\infty; -1) \cup (3; 7)$. **1.7.** $[-1; 2]$. **1.8.** $(-\infty; -2) \cup (1; 2) \cup (3; \infty)$. **1.9.** $(1; 2]$. **1.10.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 4\right)$. **1.11.** $(-\infty; 1) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right) \cup (3; \infty)$.

1.12. $\left[-5; \frac{-9-\sqrt{61}}{8}\right)$. **1.13.** $\left(\frac{\sqrt{13}-5}{2}; 1\right]$. **1.14.** $(-\infty; -5] \cup \left[1; \frac{8+\sqrt{22}}{3}\right)$. **1.15.** $[-46; 3)$. **1.16.** $\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 1\right]$. **1.17.** $[-6; 0) \cup (3; 4]$. **1.18.** $[-5; -1) \cup (1; \infty)$. **1.19.** $[-1; \infty)$. **1.20.** Нет решений. **1.21.** $\left(-1; \frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)$, $(2; \infty)$. **1.22.** $\left(-\infty; \frac{\sqrt{37}-13}{6}\right]$. **1.23.** $x \in \mathbf{R}$. **1.24.** $(5; \infty)$. **1.25.** $(-2; -1] \cup \left[-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$. **1.26.** $x \in \mathbf{R}$. **1.27.** $\left[\frac{7}{6}; \frac{3}{2}\right]$. **1.28.** $[1-\sqrt{17}; \sqrt{5}-1]$. **1.29.** $(\sqrt{2}-1; \sqrt{2}+1)$. **1.30.** $\left(-\frac{3+\sqrt{65}}{2}; 3\right)$. **1.31.** $(-\infty; -2-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{3}; \infty)$. **1.32.** $(-\infty; -1-\sqrt{3}] \cup [1-\sqrt{5}; +\infty)$. **1.33.** $[-1; 2) \cup (8; 5+\sqrt{18}]$. **1.34.** $(3/4; 1) \cup (1; \infty)$, **1.35.** $[-1; \infty)$. **1.36.** $(-\infty; 2) \cup (3; \infty)$.

§ 2

2.1. $(-\infty; \log_2(-1+\sqrt{7})]$. **2.2.** $(-2; \infty)$. **2.3.** $(-\infty; -1]$. **2.4.** $\left(-\infty; -\sqrt{2\log_2\frac{\sqrt{5}+1}{2}}\right] \cup \left[\sqrt{2\log_2\frac{\sqrt{5}+1}{2}}; \infty\right)$. **2.5.** $[-\sqrt{\log_3 4}; \sqrt{\log_3 4}]$. **2.6.** $[-4; -2) \cup (0; \infty)$. **2.7.** $[-10; 5]$. **2.8.** $[0; 1]$. **2.9.** $[\log_{13} 5; 1]$. **2.10.** $(-\sqrt{7}; -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}; \sqrt{7})$. **2.11.** $[2; 18)$. **2.12.** $(-\log_2 9; \infty)$. **2.13.** $(-\infty; \log_5 3)$. **2.14.** $\left(\frac{1}{2}\log_5 6; \log_6 5\right)$. **2.15.** $[-1; 3)$. **2.16.** $(2; \infty)$. **2.17.** $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; \infty\right)$. **2.18.** $[0; 4]$. **2.19.** $(-\infty; 0) \cup (\log_3 2; 1)$.

§ 3

3.1. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. **3.2.** $(3; \infty)$. **3.3.** $\left[-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; 1\right]$. **3.4.** $(-\infty; -1)$. **3.5.** $\left[\frac{1}{4}; 2\right]$. **3.6.** $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. **3.7.** $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$. **3.8.** $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{23}{16}\right)$. **3.9.** $(4; 7)$. **3.10.** $(1; \infty)$. **3.11.** $(3; 7)$. **3.12.** $(10^{-2}; 10)$. **3.13.** $[-2; 6) \cup \left[\frac{20}{3}; 7\right)$. **3.14.** $\left(0; \frac{1}{3}\right] \cup [9; \infty)$. **3.15.** $(1; 2] \cup [3; 4)$. **3.16.** $(-7; 1)$. **3.17.** $(-5; -4) \cup (-3; -1)$. **3.18.** $(0; 1] \cup [2; \infty)$. **3.19.** $[1; \infty)$. **3.20.** $(-\infty; \log_3 2)$. **3.21.** $(-3/2; -1) \cup \left(\frac{\sqrt[3]{10}-3}{2}; \frac{\sqrt[3]{100}-3}{2}\right)$.

3.22. $(0; 2) \cup (4; \infty)$. **3.23.** $(0; 1) \cup (2; \infty)$. **3.24.** $\left(0; \frac{\sqrt{17}-3}{2}\right]$. **3.25.** $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$. **3.26.** $(1; 3) \cup (3; 5)$. **3.27.** $\left[\frac{\sqrt{5}-3}{2}; 1\right)$. **3.28.** $(2^{-15}; 2^{-9}] \cup [2^9; \infty)$. **3.29.** $(-2; -1) \cup [0; \infty)$. **3.30.** $(0; 1) \cup \left(\sqrt{6}-1; \frac{5}{2}\right)$. **3.31.** $(0; 1) \cup [4; 2^{1+\sqrt{3}}]$. **3.32.** $\left(-1; \frac{1}{2}\right] \cup \left[1; \frac{5}{2}\right)$. **3.33.** $[2^{-\sqrt{1/8}}; 1) \cup (1; \sqrt[3]{2})$. **3.34.** $\left(0; \frac{1}{2}\right] \cup (1; \infty)$. **3.35.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1\right)$. **3.36.** $\left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup \left(1; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; 2\right)$. **3.37.** $(-4; -3) \cup [1; \infty)$. **3.38.** $(1; 2)$. **3.39.** $\left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$. **3.40.** $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; 3\right]$. **3.41.** $(-\infty; -7) \cup (-5; -2] \cup [4; \infty)$. **3.42.** $(-6; -5) \cup (-3; -2)$. **3.43.** $(1-\sqrt{7}; -1) \cup (-1/3; 0) \cup (0; 1/3) \cup (2; 1+\sqrt{7})$. **3.45.** $(-\sqrt{8}; -1) \cup (1; (\sqrt{41})/5]$. **3.46.** $(0; 1] \cup (2; \infty)$. **3.47.** $(3; 5-\sqrt{3}) \cup (7; \infty)$. **3.48.** $(1000; \infty)$. **3.49.** $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; 1\right) \cup (9; \infty)$. **3.50.** $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}; 2\right)$. **3.51.** $(1; 2)$. **3.52.** $(0; 1) \cup (1; \sqrt[10]{10})$. **3.53.** $(3; \pi) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}; 5\right)$. **3.54.** $\left(2\pi k; \frac{\pi}{6}+2\pi k\right) \cup \left(2\pi k+\frac{5\pi}{6}; (2k+1)\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.55.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$. **3.56.** $\left(\pi k+\frac{\pi}{4}; \pi k+\frac{\pi}{3}\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.57.** $\left(2\pi k+\arcsin\frac{2}{3}; 2\pi k+\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2\pi k+\frac{\pi}{2}; (2k+1)\pi-\arcsin\frac{2}{3}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$. **3.58.** $\left(\frac{\pi}{2}; 2\right) \cup \left(-\frac{\pi}{6}; 1\right] \cup \left(2\pi k-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$. **3.59*.** $x=1$, $x=2$. Указание. Найти область определения неизвестного x и для каждого целого числа из области определения проверить выполнимость (или невыполнимость) данного неравенства. **3.60.** $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$. **3.61.** 6, 7, 8.

§ 4

4.1. $(-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$. **4.2.** $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **4.3.** $[-4; -1]$. **4.4.** $(0{,}7; 1)$. **4.5.** $(-1; 2)$. **4.6.** $[0; 1/3] \cup (3; 10/3]$. **4.7.** $(-\infty; -5/3) \cup (1; \infty)$. **4.8.** $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; \infty\right)$. **4.9.** $(-\infty; \infty)$.

4.10. $[0;\ 2)\cup(4;\ 6]$. **4.11.** $(-\infty;\ 0]\cup[\log_6 5;\ 1)$; **4.12.** $\left(2-\sqrt{2};\ \frac{3}{4}\right]\cup\left[\frac{13}{4};\ 2+\sqrt{2}\right)$. **4.13.** $\left(\frac{1}{2}\log_2 7;\ \log_2 3\right)$. **4.14.** $(-1;\ -2/\sqrt{5})\cup\left(\frac{2}{\sqrt{5}};\ 1\right)$. **4.15.** $\left(\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\right)$.

§ 5

5.1. $a<1\Rightarrow\varnothing$, $a=1\Rightarrow x=2$, $a>1\Rightarrow x=a+1$; $x=3a-1$. **5.2.** $2<a\leqslant 3\Rightarrow x\in[2n-5;\ 1]$; $-2\leqslant n\leqslant 2\Rightarrow x\in[-1;\ 1]$; $-3\leqslant a<-2\Rightarrow[-1;\ 2a+5]$; $|a|>3\Rightarrow x\in\varnothing$. **5.3.** При $a<0$ $x_{1,2}=\pm\frac{1}{2}(-1+\sqrt{1-4a})$, при $a=0$ $x=0$; при $a>0$ уравнение решений не имеет. **5.4.** а) При $a<0$ решений нет; при $a=0$ — три решения; при $0<a<1$ — четыре; при $a=1$ — два; при $a>1$ нет решений. б) При $a<0$ решений нет; при $a=0$ — два решения; при $0<a<4$ — четыре; при $a=4$ — три; при $a>4$ — два. **5.5.** При $|a|\leqslant\sqrt{2}$ неравенство решений не имеет. При $|a|>\sqrt{2}$: $a=\sqrt{a^2-1}+1<x<a+\sqrt{a^2-1}-1$. **5.6.** При $a\leqslant 0$ и $a\geqslant 4$ неравенство решений не имеет; при $0<a<2$: $-a\leqslant x\leqslant a$; при $a=2$: $-2<x<2$; при $2<a<4$: $-\frac{a}{2}\sqrt{a(4-a)}<x<\frac{a}{2}\times\sqrt{a(4-a)}$. **5.7.** $-\frac{13}{4}<a<3$. Указание. Записав неравенство в виде $3-x^2>|x-a|$, построить и исследовать графики функций, стоящих в левой и правой частях неравенства. **5.8.** При $0<a\leqslant 1$ $x=\log_2 a$. При $a\leqslant 0$ и $a>1$ уравнение решений не имеет. **5.9.** При $a\leqslant 1$ $x=\pm\log_{12}(1+\sqrt{1-a})$. При $a>1$ решений нет. **5.10.** $0<a<\frac{1}{\sqrt[3]{36}}$. **5.11.** $0<c\leqslant 8$. **5.12.** $\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<a<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}<a<\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$. **5.13.** $a<-2$. **5.14.** $-3<x<-1$. **5.15.** $x>3$. **5.16.** $(1;\ 0)$. **5.17.** $a>\frac{11}{9}$. **5.18.** $2\sqrt{2}\leqslant a<\frac{11}{3}$. **5.19.** $\frac{-7-\sqrt{45}}{2}\leqslant m\leqslant-4+2\sqrt{3}$. **5.20.** $m>1$. **5.21.** Ни при каких. **5.22.** $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$. **5.23.** $-3\leqslant a\leqslant 3$. **5.24.** $-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$. **5.25.** $a<-2$. **5.26.** $\frac{1}{2}<a<1$. **5.27.** При $a=0$ решений нет; при $a>0$ $x<-2+\log_3 a$; при $a<0$ $x<\log_3(-a)$. **5.28.** $\alpha\geqslant 2$. **5.29.** $\alpha\geqslant 1$. **5.30.** При $2\pi k-\frac{\pi}{6}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{6}+2\pi k$ и $\frac{5\pi}{6}+2\pi k\leqslant a\leqslant\frac{7\pi}{6}+2\pi k$ $x=-\arcsin\frac{2\cos a}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+(-1)^n\times\arcsin\frac{2}{\sqrt{1+4\cos^2 a}}+\pi n$ $(k,\ n\in\mathbf{Z})$. **5.31.** При $a<-\sqrt{2}$ или $a\geqslant\sqrt{2}$ $x=(-1)^k\arcsin 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}}+\pi k$; при $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant -1$ $x=(-1)^k\arcsin 10^{a\pm\sqrt{2(a^2-1)}}+\pi k$; при $-1<a<\sqrt{2}$ уравнение решений не имеет. **5.32.** $b<-2-\sqrt{8}$, $b>2$. **5.33.** $-3\leqslant a\leqslant -2$, $x=\pm\frac{1}{2}\arccos 2a+5+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. **5.34.** $a_{1,2}=\pm 2$. **5.35.** При $b<\frac{1}{2}$ $\left(b\neq\frac{1}{3},\ b\neq 0,\ b\neq -1\right)$ $x=\pi k+(-1)^k\arcsin\frac{b}{b-1}$. При $b\geqslant 1/2$ уравнение решений не имеет. **5.36.** При $a\leqslant 0$ уравнение решений не имеет; при $a>0$ $x=\pi k\pm\arcsin 2^{-\sqrt{\frac{\log_2 3}{2a}}}$, $k\in\mathbf{Z}$. **5.37.** При $a\geqslant 1$ $0<x<1$; при $a\leqslant\sin 1$ $0<x<\arcsin a$, $1<x<\pi/2$; при $\sin 1<a<1$ $0<x<1$, $\arcsin a<x<\pi/2$. **5.38.** $(0;\ 0)$; $(1;\ 0)$. **5.39.** $k=1$ $x=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{7})$, $y=\cos\frac{\pi}{4}\times(1+\sqrt{7})$. **5.40.** $a<-1$, $a=0$. **5.41.** При $a=-1$ $x=\left\{-1;\ \frac{15}{17};\ \frac{17}{15}\right\}$; при $a=-\frac{1}{5}$ $x=\left\{-\frac{1}{136};\ 0;\ \frac{1}{120}\right\}$. **5.42.** $\{0;\ 1\}$. **5.43.** При $a=1$ $x\geqslant 1$; при $a=-1$ $-3\leqslant x<1$; при $|a|>1$ $x=1$, $x=\frac{7+a}{a-1}$; при $|a|>1$ уравнение имеет два решения.

ГЛАВА 5

§ 1

1.33. При $\alpha\in\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$: $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$; при $\alpha\in\left[\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$: $\operatorname{ctg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$. **1.34.** При $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n$: $2\operatorname{tg}^3\alpha$.

§ 2

2.1. -1. **2.2.** $\frac{1}{64}$. **2.3.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **2.4.** $\frac{1}{4}$. **2.5.** 1. **2.6.** 4. **2.7.** $\frac{3}{2}$. **2.8*.** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Указание. Использовать равенство $\cos(3\cdot 18^\circ)=\sin(2\cdot 18^\circ)$. **2.9*.** $\frac{1}{8}\left(\sqrt{3}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}-\sqrt{5}+1\right)$. Указание. Использовать равенство $\sin 42^\circ=\sin(60^\circ-18^\circ)$.

2.10. 0,96. 2.11. 2. 2.12. a^4-4a^2+2. 2.13. $\frac{3n-n^3}{2}$. 2.14. $\frac{1-m}{1+m}$. 2.15. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$. 2.16. 3. 2.17. $\frac{4a}{a^2+b^2+2b}$. 2.18*. $-\sqrt{3}$. Указание. Рассматривая условия как систему тригонометрических уравнений, найти α и β как корни этой системы, принадлежащие указанным промежуткам. 2.19. $\frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{p+q}{p-q}$. 2.20. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$; $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{3}$. 2.21. -2; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 2. 2.22. $4x^3-3x-m=0$. 2.23. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=m$. 2.24. $\frac{2}{a}$. 2.25. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. 2.26. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 2.27. $\frac{77}{85}$. 2.28. $4\sqrt{5}$. 2.29*. $\pi-2$. Указание. $\sin 2=\sin(\pi-2)$ и $\pi-2\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$. 2.30. $\frac{1+2\cdot\sqrt{30}}{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}$. 2.31. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 2.32. $\frac{4\sqrt{2}+\sqrt{5}}{9}$. 2.33. $\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{13}}{13}$.

2.42**. Имеет. Решение. Обозначая $x=\cos y$, преобразуем аргумент второго слагаемого по формуле $\frac{1}{2}\cos y+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin y=\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)$. Для переменной y равенство приобретает вид $\arccos(\cos y)+\arccos\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)\right]=\frac{\pi}{3}$ или, после упрощения, $y+\left|y-\frac{\pi}{3}\right|=\frac{\pi}{3}$. Для $y\in\left[0;\ \frac{\pi}{3}\right]$ данное равенство превращается в тождество.

2.43*. Справедливо. Указание. См. решение задачи 2.42. 2.44. $\frac{1}{2}\left[n\cos\alpha-\frac{\cos[(n+2)\alpha]\cos n\alpha}{\sin\alpha}\right]$. 2.45. $\frac{\cos[(n+2)\alpha]\sin n\alpha}{\sin\alpha}$. 2.46. $\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2^n}-2\operatorname{ctg}2\alpha$. 2.47. $\frac{1}{2}$. 2.48. $\frac{n}{2}$. 2.49. $\frac{1}{2}$. 2.50. 0. 2.51. $\operatorname{tg}\frac{(n+1)\alpha}{2}$.

§ 3

Встречающиеся в ответах буквы n, l, m, k, если не оговорено противное, принимают любые целочисленные значения.

3.1. $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. 3.2. πn. 3.3. $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. 3.4. $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. 3.5*. $\left[\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right]$. Указание. Упростить выражение, выделив под

радикалами полные квадраты. 3.6. $\operatorname{arctg}\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\pi n$; $-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\pi n$. 3.7. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$; $\operatorname{arctg}\frac{7}{2}+k\pi$. 3.8. $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $\pi(2k+1)$. 3.9. $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. 3.10. $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\pi k$; $\frac{2\pi k}{5}$; $\frac{\pi}{11}(2k+1)$. 3.11. $\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$. 3.12. $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+k\pi$. 3.13. $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. 3.14. $\pi(2k+1)$; $\frac{\pi}{2}(4k-1)$. 3.15. $\frac{\pi}{12}(6k\pm1)$. 3.16. $\frac{\pi k}{2}$. 3.17*. При $a\in\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$ $x=\frac{k\pi}{2}\pm\frac{1}{2}\arcsin\left(2\sqrt{\frac{a-1}{2a-3}}\right)$, при остальных значениях a решений нет. Указание. Значения a, при которых существуют решения уравнения, определяются из условия $|\sin x|\leqslant 1$. 3.18. $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{7}$. 3.19. $-\frac{\pi}{108}+\frac{\pi k}{9}$; $\frac{7\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}$. 3.20. $-\frac{\pi}{20}-\frac{2\pi n}{5}$; $\frac{3\pi}{100}+\frac{2\pi n}{25}$. 3.21. $\frac{21}{16}\pi$; $\frac{11\pi}{8}$. 3.22. $\frac{\pi}{12}+\pi n$; $\frac{5\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}$. 3.23. Нет решений. 3.24. $\frac{\pi}{2}+2\pi n$. 3.25. $\operatorname{arctg}\frac{3}{2}+\pi k$; $\pi k-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 3.26. πk; $\pm\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$. 3.27. $\frac{\pi}{2}(4k+1)$. 3.28. $\frac{\pi}{4}+2k\pi$. 3.29. $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 3.30. $\frac{3\pi}{4}+\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}+\pi n$. 3.31*. При $a\in(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ -2(\sqrt{2}-1))\cup[2(\sqrt{2}+1);\ \infty)$ $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\pm\arccos\frac{a+2}{a\sqrt{2}}$. Указание. Представить в виде уравнения относительно переменной $t=\sin x+\cos x$. Значения a, при которых уравнение имеет решение, найти из условия $|t|\leqslant\sqrt{2}$. 3.32. $\frac{k\pi}{3}$. 3.33. При $a\neq0$ $x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{1+16a^2}-1}{4a}$, при $a=0$ $x=k\pi\pm\frac{\pi}{4}$. 3.34. $\frac{2k+1}{8}\pi$. 3.35. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. 3.36. πn. 3.37. $\frac{\pi}{16}(2k+1)$; $\frac{\pi}{3}(3k\pm1)$. 3.38. $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi k}{9}$. 3.39. $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $\frac{\pi}{5}(2k+1)$; $\frac{\pi}{7}(2k+1)$. 3.40. $\frac{\pi}{8}(2k+1)$. 3.41. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{2}+\pi n$. 3.42. $\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{2}$. 3.43. $\operatorname{arctg}3+\pi k$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi k$. 3.44. $\frac{\pi}{4}(8k+1)$.

3.45. $\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\frac{\pi}{12}+2k\pi$; $\frac{5\pi}{12}+2k\pi$. **3.46.** $2k\pi$; $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. **3.47.** $\frac{\pi}{2}+k\pi$; $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $2k\pi$. **3.48.** $\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2}+k\pi$. **3.49.** $(-1)^n\times\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}+\pi n$. **3.50.** $\frac{\pi k}{3}$. **3.51.** $\frac{3\pi}{4}+\pi n$; $\frac{3}{16}\pi+\frac{\pi n}{4}$. **3.52.** $\frac{\pi n}{8}$; $\frac{\pi}{8}(2n+1)$. **3.53.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi$. **3.54.** $k\pi$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$. **3.55.** $-\frac{\pi}{4}+k\pi$; $\pm\frac{\pi}{3}+k\pi$. **3.56.** $\frac{\pi}{10}(2k+1)$; $\frac{\pi}{6}(2k+1)$. **3.57.** $\frac{\pi k}{2}-1$; $\frac{\pi}{10}(2k+1)-1$. **3.58.** $\frac{\pi k}{4}$. **3.59.** $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8}(2n+1)$. **3.60.** $\frac{2}{5}\pi n$; $\pi(2n+1)$; $\frac{\pi}{2}\times(2n+1)$. **3.61.** $\frac{\pi}{8}(2n+1)$; $\frac{\pi n}{3}$. **3.62.** $\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{8}(2n+1)$. **3.63.** $\frac{\pi n}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$. **3.64.** $\frac{\pi n}{3}$. **3.65.** $\frac{\pi}{4}(4n-1)$; πn. **3.66.** $\frac{\pi}{4}(2n+1)$; $2\pi n$; $\frac{\pi}{2}(4n+1)$. **3.67.** $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; $\pi n\pm\frac{1}{2}\arccos(\sin^2\alpha)$. **3.68.** $\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{\pi}{4}(2k+1)$; $\frac{\pi}{14}(2k+1)$. **3.69.** $\frac{\pi k}{8}$. **3.70.** $\frac{\pi}{16}(2k+1)$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}$. **3.71.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. **3.72.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $2\pi n$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$; $\frac{\pi}{4}(2n+1)$. **3.73.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **3.74.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{8}$. **3.75.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{24}+\frac{\pi n}{4}$. **3.76.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. **3.77.** πn; $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$; $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi n$. **3.78.** $-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$. 3.79. πn; $\frac{\pi}{20}+\frac{\pi n}{10}$. 3.80. $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **3.81.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$; $\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{6}$. 3.82. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$. 3.83. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **3.84.** $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$. **3.85.** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$. **3.86*.** $\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+2\pi k$. **Указание.** Ввести переменное $t=x+\frac{\pi}{4}$ и составить уравнение относительно $y=\sin t+\cos t$. **3.87.** $\frac{\pi n}{3}$. **3.88.** $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$. **3.89.** $\frac{\pi}{2}+\pi n$. **3.90.** $\frac{\pi n}{5}$; $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$. **3.91.** $(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{16}+\frac{\pi n}{4}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **3.92.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **3.93.** $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi n}{7}$; $\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$.

3.94. πn; $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. **3.95.** $\pm\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{3}-1)+\pi k$. **3.96.** $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$. **3.97.** $\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3}$, $n\neq 3l$. **3.98.** $\frac{4\pi}{3}+2\pi n$. **3.99.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi k$; $-\frac{\pi}{6}+2\pi k$. **3.100.** $\frac{\pi}{4}+k\pi$. **3.101.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$; $(-1)^k\frac{\pi}{30}+\frac{\pi k}{5}$. **3.102.** $\frac{\pi k}{8}$; $\frac{2\pi k}{9}$. **3.103.** $\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi k}{2}$; $-\frac{\pi}{4}+\pi k$. **3.104.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$. 3.105. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$. **3.106.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; $\frac{3}{8}\pi+\frac{\pi k}{2}$. **3.107.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$; $(-1)^k\times\frac{\pi}{6}+\pi k$. **3.108.** $(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$; $\frac{\pi}{2}+\pi k$. **3.109.** $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k$; $\frac{\pi}{6}+\pi k$. **3.110.** $-\frac{\pi}{4}+\pi k$; πk. **3.111.** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$; πk. **3.112.** $\frac{\pi}{4}\times(-1+(-1)^n)+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}(1+(-1)^n)+\pi n$. **3.113.** $\frac{1}{2}+\frac{7}{4}\pi$. **3.114.** $-\frac{3}{4}\pi$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{2}$. **3.115.** $\frac{\pi}{2}$; π; 2π; $\frac{5\pi}{2}$. **3.116.** $\pm\frac{\pi}{2}$; $\frac{2\pi}{11}k$, $k=0;\ \pm1;\ \pm2;\ \pm3$. **3.117*.** $\frac{-5\pm\sqrt{25+2\pi(2k+1)}}{2}$, $k=-2,-1,0,1,2,3,\ldots$ **Указание.** Возможные значения k следует получать из условия существования действительных корней. **3.118*.** $\frac{(4m+1)\pi\pm\sqrt{(4m+1)^2\pi^2-240}}{12}$; $\frac{-(4n+1)\pi\pm\sqrt{(4n+1)^2\pi^2+240}}{12}$, n — любое число, m — любое число, кроме ±1 и 0. Указание. См. указание к задаче 3.117*. **3.119*.** $\frac{1+(4k+1)\pi\pm\sqrt{1+2(4k+1)\pi}}{2}$, k — любое целое неотрицательное число. **Указание.** См. указание к задаче 3.117*.

3.120.** Решение. Исходное уравнение можно записать в виде

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x+\sin x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x-\sin x}{2}\right)=0.$$

Решая уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x+\sin x}{2}\right)=0$ методом дополнительного угла, имеем $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\frac{\pi}{2}(4k+1)$. Оценивая левую и правую части последнего уравнения, заключаем, что для всех $k \in \mathbf{Z}$ оно не имеет решений. Аналогично доказывается, что не имеет решений и уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\cos x-\sin x}{2}\right)=0$.

3.121*. $2k\pi \pm \varphi$; $\frac{\pi}{2}(4k\pm 1)\mp\varphi$; $\varphi=\frac{1}{2}\arcsin\frac{9}{16}$; знаки оба верхние или оба нижние. Указание. См. решение 3.120**. **3.122*.** $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(k+\frac{1}{4}\right)+\pi n$; $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{4}{4l+1}+\pi n$, $l\neq -1$, $l\neq 0$. Указание. См. решение 3.120**. **3.123.** $-\frac{5\pi}{4}+\frac{3}{2}$; $-\pi+1$; $-\frac{3\pi}{4}+\frac{3}{2}$; $-\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}$; 1; $\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}$. **3.124.** $-\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **3.125.** а) 0; $\frac{\pi}{6}$; π; б) πn; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$. **3.126.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{2}}+\pi n$. **3.127**.** $\frac{3\pi}{4}+2\pi n$. Решение. Уравнение эквивалентно уравнению $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, корни которого $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$ и $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n$; 2π — наименьшее общее кратное периодов уравнения и неравенства, следовательно, проверке подлежат значения $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$. Подставляя $\frac{\pi}{4}$ в неравенство, получаем числовое неравенство $2^{\frac{\cos\frac{7\pi}{4}}{\cos 3+\sin 3}}>2^{\cos\frac{\pi}{2}}$. Так как $2^{\cos\frac{\pi}{2}}=1$, $\cos\frac{7\pi}{4}>0$, $\cos 3+\sin 3=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-3\right)<0$, то полученное числовое неравенство несправедливо. Аналогично убеждаемся, что $\frac{3\pi}{4}$ удовлетворяет неравенству. **3.128*.** $\frac{3\pi}{8}+\pi k$. Указание. См. решение 3.127**. **3.129*.** $\frac{5\pi}{8}+\pi k$. Указание. См. указание к 3.128*. **3.130*.** $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$. Указание. См. указание к 3.128*. **3.131.** $\frac{\pi}{2}(4k+1)$. **3.132.** $\left(\frac{\pi}{2}(4k+1);\ \frac{\pi}{2}(4n+1)\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}(4k-1);\ \frac{\pi}{2}(4n-1)\right)$. **3.133.** $\frac{\pi}{4}(4k+1)$. **3.134**.** $\left(\frac{\pi}{3}(6m+1); \frac{\pi}{3}(6k+1)\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}(6m-1); \frac{\pi}{3}(6k-1)\right)$. Решение. Относительно переменных $u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ и

$v=\operatorname{tg}\frac{y}{2}$ исходное уравнение приобретает вид

$$\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{1-v^2}{1+v^2}-\frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}+\frac{4uv}{(1+u^2)(1+v^2)}=\frac{3}{2}$$

или, после упрощения, $u^2+v^2-8uv+9u^2v^2+1=0$; последнее равносильно уравнению $(u-v)^2+(3uv-1)^2=0$. Возвращаясь к исходным неизвестным, имеем

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3},$$

или

$$\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad \operatorname{tg}\frac{y}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

3.135. $\left(\frac{\pi}{2}(4k+1); \frac{\pi}{2}(4l+1)\right)$. **3.136.** $\left(\frac{\pi}{2}(4k-1); \frac{\pi}{2}(4l-1); \frac{\pi}{2}(4m-1)\right)$. **3.137.** $\frac{\pi}{4}(8k+1)$. **3.138.** $\left(\frac{\pi}{2}+m\pi;\ \frac{\pi}{2}+l\pi\right)$. **3.139*.** Указание. См. решение примера 3.9. **3.140.** $(-1; 2)$; $(-1; -2)$. **3.141.** $\frac{5\pi}{4}+\pi n$; $-\frac{\pi}{4}-\pi n$; $n=0, 1, 2, \ldots$ **3.142.** $\left\{-\frac{7}{2}; -3; -1; 1; 3; \frac{7}{2}\right\}$. **3.143.** $x\in\mathbf{R}\setminus\left\{-\sqrt[4]{3};\ -1;\ 1;\ \sqrt[4]{3};\ \frac{-1-\sqrt{1+21n}}{21}\ (20\leqslant n\leqslant 33);\ \frac{-1+\sqrt{1+21n}}{21}\ (24\leqslant n\leqslant 39)\right\}$.

§ 4

4.1. $\left(\frac{\pi n}{2}-\pi k-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi n}{2}+\pi k+\frac{\pi}{4}\right)$. **4.2.** $\left(\pi m\pm\frac{\varphi+\psi}{2},\ \pi n\pm\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$; $\left(\pi m+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\varphi-\psi}{2},\ \pi n+\frac{\pi}{2}\pm\frac{\varphi+\psi}{2}\right)$, в каждом из решений знаки или оба верхние, или оба нижние, $\varphi=\arcsin 0{,}535$, $\psi=\arcsin 0{,}185$. **4.3.** $\left(\pi k+\pi n+\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi k}{2}-\pi n+\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\pi k+\pi n-\frac{\pi}{3},\ \pi k-\pi n-\frac{\pi}{3}\right)$. **4.4.** $\left(\frac{7\pi}{24}+\pi k+\pi n,\ \frac{\pi}{24}+\pi k-\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{24}+\pi k+\pi n,\ \frac{7\pi}{24}+\pi k-\pi n\right)$; $\left(-\frac{\pi}{24}+\pi k+\pi n,\ -\frac{7\pi}{24}+\pi k-\pi n\right)$; $\left(-\frac{7\pi}{24}+\pi k-\pi n,\ -\frac{\pi}{24}+\pi k+\pi n\right)$. **4.5.** $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi l,\ \frac{\pi}{6}+2\pi p\right)$; $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi l,\ -\frac{\pi}{2}+2\pi p\right)$. **4.6.** $(2\pi m,\ 2\pi n)$; $\left(\frac{2\pi}{3}(3m\pm 1),\ \frac{2\pi}{3}(3n\mp 1)\right)$; $\left(\pi m+\pi\pm\varphi,\ \pi+\frac{\pi}{6}\pm\varphi\right)$; $\left(\pi-\frac{\pi}{6}\pm\varphi,\ \pi-\frac{\pi}{6}\mp\varphi\right)$,

$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{3}-\sqrt{11}}{4}$. **4.7.** $\left(2\pi k+\frac{\pi}{4}, \frac{4\pi l}{3}+\frac{\pi}{6}\right); \left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k, \frac{4\pi l}{3}-\frac{\pi}{2}\right); \left(-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \frac{4\pi l}{3}-\frac{\pi}{6}\right); \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi k, \frac{4\pi l}{3}-\frac{\pi}{6}\right)$.

4.8. $(2\pi k\pm\varphi, 2\pi l\pm\psi); (2\pi k+\pi\pm\varphi, 2\pi l+\pi\mp\psi)$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{500}}{5}$, $\psi=\arcsin\frac{\sqrt[4]{500}}{5}$, **и берутся или оба верхних, или оба нижних** знака. **4.9.** $(2\pi n, 2\pi k+\pi)$. **4.10.** $(\pi k, 2\pi n)$; $\left(\arccos\frac{1}{7}+2\pi k, -\frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$; $\left(-\arccos\frac{1}{7}+2\pi k, \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right)$. **4.11.** $\left((-1)^n\times\left(-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)+\pi n, -\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$; $\left((-1)^n\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+(-1)^n\pi k+\pi n, \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k\right)$. **4.12.** $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k, \pi n\right)$; $\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi+n\pi, -\frac{\pi}{4}+\pi n\right)$; $\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}2+2k\pi+n\pi, -\operatorname{arctg}2+\pi n\right)$. **4.13.** $\left((-1)^{n+1}\frac{\pi}{8}-\frac{n\pi}{2}, -\frac{1}{5}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\pi k}{5}\right)$. **4.14.** $\left((-1)^k\frac{\pi}{9}+\frac{\pi k}{3}, \left(-\frac{1}{7}\right)\times\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi n}{7}\right)$. **4.15.** $\left(\pm\frac{3\pi}{4}+2\pi n, (-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m\right)$. **4.16.** $\left((-1)^n\frac{\pi}{3}+\pi n, \pm\frac{\pi}{4}+2\pi m\right)$. **4.17.** $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n, (-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$. **4.18.** $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k, \sqrt{2}\right)$. **4.19.** $\left(\pm\frac{\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}\right)$. **4.20.** $\left(\frac{\pi}{4}(2n+1), \pi(2p+1)\right)$. **4.21.** $\left(\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2}{5}+\frac{(-1)^n}{2}\times\arcsin\frac{4}{5}+(k+n)\frac{\pi}{2}, \frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2}{5}-\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{4}{5}+(k-n)\frac{\pi}{2}\right)$. **4.22.** $\left(\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$; $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$; $\left(\frac{7\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$; $\left(\frac{11\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$. **4.23.** $\left(\frac{\pi}{4}(2k+1), \frac{\pi}{2}+l\pi, \frac{\pi}{2}+m\pi\right)$. **4.24.** $\left(\varphi+\pi n, \frac{\pi}{3}-\varphi-\pi n\right)$, где $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{-7\pm\sqrt{193}}{8\sqrt{3}}$. **4.25.** $\left(\frac{\pi}{6}(6k+(-1)^k)\right)$, $\left(\frac{\pi}{3}(6l+3\pm1)\right)$. **4.26*.** $\left(\frac{\pi}{4}+\pi k, \operatorname{arctg}2+\pi l, \operatorname{arctg}3+\pi m\right)$; $\left(\pi k+\operatorname{arctg}2, \frac{\pi}{4}+\pi l, \pi m+\operatorname{arctg}3\right)$, где $k+l+m=0$. Указание. Вычислив значение тангенса от обеих частей первого уравнения, свести систему к рациональной относительно $\operatorname{tg}x$, $\operatorname{tg}y$, $\operatorname{tg}z$. **4.27*.** $\left(\operatorname{arctg}2\sqrt{5}\pm\pi k, \operatorname{arctg}\sqrt{5}\pm\pi l, \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{3}\pm\pi m\right)$, если знаки — верхние, то $k+l+m=0$, и $k+l+m=2$, если знаки — нижние. Указание. См. указание к 4.26*. **4.28.** $\left(\frac{4\pi}{36}+k\pi, \frac{5\pi}{36}+k\pi\right)$; $\left(\pi n-\frac{11\pi}{36}, \pi n-\frac{13\pi}{36}\right)$. **4.29.** $\left(\frac{5\pi}{24}-\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{24}-\frac{k\pi}{2}\right)$. **4.30.** $\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{(-1)^k}{2}\times\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{6}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\frac{2-3\sqrt{3}}{6}+\frac{k\pi}{2}\right)$.

4.31. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $(1, 0)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$; $(0, -1)$. **4.32.** $a=2\pi l$: $\left(\pm\frac{\pi}{3}+k\pi+l\pi, \mp\frac{\pi}{3}-k\pi+\pi l\right)$; $a=\pi(2l+1)$: $\left(\pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi(2l+1)}{2}+k\pi, \frac{\pi(2l+1)}{2}-k\pi\mp\frac{\pi}{6}\right)$; $a\neq\pi m$: решений нет.

§ 5

5.1. $-3\operatorname{tg}1$. **5.2.** $-\frac{3}{2}$. **5.3.** $-\frac{1}{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.4.** $\sqrt{3}$. **5.5*.** При $a\in[0;\pi]$: $\cos a$; при $a\in[-2\pi;0)$: $\cos\frac{1}{2}a$; при $a\in(-\infty;2\pi)\cup(\pi;\infty)$ нет решений. Указание. При решении квадратного уравнения относительно переменной $z=\arccos x$ учесть, что $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$. **5.6.** $\sqrt{2}$. **5.7.** $-\frac{3}{5}$. **5.8.** $\frac{1}{2}$. **5.9.** 1. **5.10.** 0; 1. **5.11.** Нет решений. **5.12.** −2. **5.13.** 0; $\frac{\sqrt{2}}{2}$; $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.14.** 0; −1; 1. **5.15.** $\frac{1}{2}$. **5.16.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.17.** 0; $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$. **5.18.** $-\frac{1}{2}$; 0; $\frac{1}{2}$. **5.19.** $\frac{1}{2}$; 1. **5.20.** [0; 1]. **5.21.** [−1; 0]. **5.22.** (0; 1]. **5.23.** $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. **5.24.** [0; 1]. **5.25.** [−1; 1]. **5.26.** [0; ∞). **5.27.** (−1; 1). **5.28.** (0; 1). **5.29*.** При $a\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ $x=2a\sqrt{1-a^2}$, при остальных значениях a нет решений. Указание. Область допустимых значений a находится из условия $|2\arcsin a|\leqslant\frac{\pi}{2}$. **5.30*.** При $a\in\left[0; \frac{1}{2}\right]$ $x=\sqrt{1-4a^2}$, при остальных значениях a нет решений. Указание. См. указание к 5.29*.

§ 6

6.1. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right)$. 6.2. $\left(\operatorname{arctg} 2+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.
6.3. $(\pi n;\ \operatorname{arcctg}(-3)+\pi n)$. 6.4. $\left[1-\frac{2}{3}\pi+2\pi n;\ 1-\frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$.
6.5. $\left[0;\sqrt{\frac{\pi}{6}}\right]\cup\left[\sqrt{\frac{7\pi}{6}+2\pi k};\ \sqrt{\frac{13\pi}{6}+2\pi k}\right]\cup\left[-\sqrt{\frac{\pi}{6}};\ 0\right]\cup$ $\cup\left[-\sqrt{\frac{13\pi}{6}+2\pi k};\ -\sqrt{\frac{7\pi}{6}+2\pi k}\right]$, $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
6.6. $\left(\frac{5\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4}+2\pi n\right)$. 6.7*. Нет решений. Указание. Использовать неравенство $|\sin x|\leqslant 1$. 6.8. $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$.
6.9. $\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4}+\pi n;\ \pi(n+1)\right)$. 6.10. $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\operatorname{arctg}2+\pi n\right)\cup\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$. 6.11. $\left(-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n;\ \pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{2}{3}\right)$. 6.12. $\left(\frac{\pi}{6}(12k+1);\ \frac{\pi}{6}(12k+3)\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}(4k+2);\ \frac{\pi}{2}(4k+3)\right)$. 6.13. $\left(\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$.
6.14. $\left(\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{11\pi}{6}+2\pi k\right)$. 6.15. $(\pi+2\pi k;\ \pi+\varphi+2\pi k]\cup$ $\cup[2\pi k-\varphi;\ 2\pi k)$, $\varphi=\arcsin\frac{1}{3}$. 6.16. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\cup$ $\cup\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$. 6.17. $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{6}+2\pi k\right]$ и $\frac{\pi}{2}+2k\pi$. 6.18. $\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3};\ \frac{7\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{11\pi}{18}+\frac{2\pi n}{3}\right)$. 6.19. $\left(\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$.
6.20. $\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8};\ \frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi n}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$.
6.21. $\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{5\pi}{24};\ \frac{\pi}{2}(n+1)+\frac{\pi}{24}\right)$. 6.22. $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi k\right)$ и $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$. 6.23. $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \pi n\right)\cup\left(\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$.
6.24. $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\ \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right)\cup(-\pi+2\pi n;\ 2\pi n)$.

§ 7

7.1. $[-1;\ 1]$. 7.2. $[-1;\ 1]$. 7.3. $\left[\frac{1}{4};\ 1\right]$. 7.4. $\left[-1;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
7.5. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \infty\right)$. 7.6. $(-\infty;\ \operatorname{ctg}2)$. 7.7. $(-\infty;\ \operatorname{tg}1)$. 7.8. $\varnothing$.

7.9. R. 7.10. $\left[-1;\ \cos\frac{1}{2}\right]$. 7.11. $\left(-1;\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 7.12. $[-1;\ 0)$.
7.13. $(1;\ \infty)$. 7.14. $\left[0;\ \frac{1}{2}\right)$. 7.15. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ 1\right)\cup\left(-1;\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

§ 8

8.8*. Ввести вспомогательный угол и использовать неравенство $|\sin x|\leqslant 1$. 8.9**. Решение. Представим выражение, подлежащее оценке, в виде

$$\frac{a}{2}(1-\cos 2x)+\frac{b}{2}\sin 2x+\frac{c}{2}(1+\cos 2x)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{a+c}{2}+\frac{1}{2}[(c-a)\cos 2x+b\sin 2x].$$

Далее следует использовать неравенство, доказанное в 8.8*. 8.10*. Указание. Представить левую часть в виде функций половинного аргумента. 8.11*. Указание. Использовать прием, примененный в примере 8.2. 8.12*. Указание. См. указание к 8.11*. 8.14**. Решение. Исходное неравенство эквивалентно неравенству

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{2}\leqslant\frac{3}{4}.$$

Так как $\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$, то, с учетом условия и используя формулы приведения, получаем

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\cos\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Так как $\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, то задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}$. Выделяя полный квадрат, получаем $1+\frac{1}{2}-2\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\right)^2\leqslant\frac{3}{2}$. Таким образом, $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leqslant\frac{3}{2}$, откуда следует справедливость исходного неравенства. 8.20*. Указание. Оценить разность $\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$, используя представление $1-\cos x=$ $=2\sin^2\frac{x}{2}$. 8.21*. Указание. Использовать результат предыдущей задачи и примера 8.3. 8.22*. Указание. См. указание к задаче 8.20*.

ГЛАВА 6

§ 1

1.1. $\cos 0 + i\sin 0$. **1.2.** $3(\cos\pi + i\sin\pi)$. **1.3.** $\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. **1.4.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$. **1.5.** $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$. **1.6.** $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$. **1.7.** $5\left[\cos\left(-\arccos\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)\right]$. **1.8.** $5\left[\cos\left(\pi + \arccos\frac{3}{5}\right) + i\sin\left(\pi + \arccos\frac{3}{5}\right)\right]$. **1.9.** $\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. **1.10.** $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$. **1.11.** $-\frac{1}{2^{50}}$. **1.12.** $\pm(1+i)$. **1.13.** $\pm 2(1-i)$. **1.14.** $\sqrt{5}\left[\cos\left(\pi k + \frac{\arcsin(-4/5)}{2}\right) + i\sin\left(\pi k + \frac{\arccos(-4/5)}{2}\right)\right]$, $k = 0, 1$. **1.15.** $\pm\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$. **1.16.** $\pm\frac{1}{2}[\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1)i]$, $\pm[\sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i]$. **1.17.** $\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{5\pi}{8} + i\sin\frac{5\pi}{8}$, $\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}$, $\cos\frac{13\pi}{8} + i\sin\frac{13\pi}{8}$. **1.18.** $\sqrt[7]{5}\left[\cos\frac{2\pi k + \arccos\frac{3}{5}}{7} + i\sin\frac{2\pi k + \arccos\frac{3}{5}}{7}\right]$. **1.19.** $\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

§ 2

2.1. Окружность единичного радиуса с центром в начале координат. **2.2.** Положительная полуось Ox, включающая точку O. **2.3.** Луч, выходящий из начала координат (без точки O), составляющий с осью Ox угол $\pi/3$. **2.4.** Внутренняя часть кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1 и 4 с центром в начале координат. **2.5.** Множество всех внешних точек окружности единичного радиуса с центром в точке $(1/2; 0)$. **2.6.** Множество всех точек, лежащих внутри окружности радиуса $\sqrt{99}$ с центром в начале координат. **2.7.** Ось Oy. **2.8.** Прямая $y = 2x + 3/2$. **2.9.** Полуплоскость, лежащая выше прямой $y = -1/2$. **2.10.** Множество всех точек, лежащих внутри кольца, ограниченного концентрическими окружностями радиусов 1 и 4 (включая окружности) с центром в точке $(0, -1)$. **2.11.** Прямая $y = -x$. **2.12.** Множество всех точек прямоугольника

$|q| \leqslant 1$, $|p| \leqslant 2$. **2.13.** 1) Прямые, задаваемые уравнением $ay + bx = 0$. 2) Прямые, задаваемые уравнением $y = -b$. **2.14.** Множество всех точек, лежащих вне окружности с центром в точке (1, 0) и радиусом 10. **2.15.** Ось Ox и точки с координатами, удовлетворяющими условиям $x = -\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} < y < \frac{\sqrt{3}}{2}$. **2.16.** Прямая $y = -x$. **2.17.** $z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$. **2.18.** $z = z_1 + z_2 - z_3$, $z = z_1 + z_2 - z_3$, $z = z_2 + z_3 - z_1$. **2.19*.** У к а з а н и е. Использовать коллинеарность векторов $z_3 - z_1$ и $z_2 - z_1$. **2.20.** Угол z_1Oz_2 прямой.

§ 3

3.1. $1 - i$, $\frac{4 - 2i}{5}$. **3.2.** $0, -1, \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3i}}{2}$. **3.3.** $2 - \frac{3i}{2}$. **3.4.** $0, \cos\frac{2\pi k}{5} + i\sin\frac{2\pi k}{5}$ $(k = 0, 1, 2, 3, 4)$. **3.5.** (2, 1); $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **3.6.** (6, 1). **3.8.** -1. **3.9.** $z_1 = 1$, $z_2 = i$, $z_3 = -i$. **3.10.** а) (i, i); $(-i, -i)$; б) (i, i); $(-i, -i)$. **3.11.** $|a + bi| = 1$, $a + bi \neq -1$. **3.12.** Все действительные и все чисто мнимые числа. **3.13.** При $a = 1$ $z = -1 - i$. При $1 < a \leqslant \sqrt{2}$ $z = \frac{-a^2 \pm \sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1} - i$. При $a > \sqrt{2}$ уравнение решений не имеет. **3.14*.** $a > 2$. У к а з а н и е. Исследовать взаимное расположение окружностей $|z + \sqrt{2}| = a^2 - 3a + 2$ и $|z + i\sqrt{2}| = a^2$. **3.15.** $-\frac{21}{10} < a < -\frac{5}{6}$. **3.16.** $z = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\right)$.

§ 4

4.1. $\left(\alpha - \frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \alpha + \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$; $\left(\alpha + \frac{\pi}{3} + 2\pi n;\ \alpha - \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$. **4.2.** $\left(\alpha + \pi(k + n);\ \frac{\pi}{3} + \pi(k - n)\right)$; $\left(\frac{\pi}{3} + \pi(k - n);\ \alpha + \pi(k + n)\right)$. **4.3.** $\left(2k\pi;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right)$; $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ 2k\pi\right)$. **4.4.** $\left(\alpha - \frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ -\alpha - \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right)$; $\left(\alpha + \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} - \alpha + 2\pi n\right)$. **4.5.** (19; 178); (179; 46). **4.6.** (168; 244). **4.7.** (1; 18). **4.8.** $\sin^3 x + 3\cos^2 x \sin x$. **4.9*.** $\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\varphi/2}$;

$\dfrac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}\sin\dfrac{n+1}{2}\varphi}{\sin\varphi/2}$. Указание. Если $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, то $z^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$. Воспользоваться формулой для суммы членов геометрической прогрессии $z+z^2+z^3+\ldots+z^n$. **4.11*.** Указание. Использовать утверждение задачи 4.10. **4.12.** $\dfrac{a^{n+1}\sin nx+a^n\sin(n+1)x-\sin x}{a^2-2a\cos x+1}$. **4.13*.** $2^n\cos^n\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{nx}{2}$. Указание. Рассмотреть бином $(1+z)^n$, где $z=\cos x+i\sin x$. **4.14.** $\operatorname{tg}5\alpha=\dfrac{5\operatorname{tg}\alpha-10\operatorname{tg}^3\alpha+\operatorname{tg}^5\alpha}{1-10\operatorname{tg}^2\alpha+5\operatorname{tg}^4\alpha}$.

ГЛАВА 7

§ 1

1.2. Последовательность монотонно возрастает. **1.3*.** Последовательность монотонно возрастает, начиная со второго члена. Указание. Сравнить отношение y_{n+1}/y_n с единицей. **1.4.** $c=0$, $d\neq 0$, $a/d>0$ или $c\neq 0$, $d/c>-1$, $ad>bc$. **1.5.** $y_1=0$ — наименьший член; наибольшего члена не существует. **1.6.** $y_3=4$ — наибольший член; наименьшего члена не существует. **1.7*.** $x_8=24$ — наименьший член; наибольшего члена не существует. Указание. Найти экстремальные точки для функции $f(x)=2x+\dfrac{512}{x^2}$. **1.8.** а) $n\geqslant 31$; б) $n\geqslant 301$. **1.9*.** Ни одного. Указание. Решить в целых положительных числах неравенство $2<|x^2-5x+6|<6$. **1.10*.** Начиная с $n=3$. Указание. Рассмотреть промежутки монотонности функции $f(x)=x^2-5x+6$. **1.11*.** Для целых чисел из промежутка $\left[1;\left[-\dfrac{1}{\ln q}\right]\right]$ последовательность монотонно возрастает, для целых чисел из промежутка $\left[\left[-\dfrac{1}{\ln q}\right]+1;\infty\right)$ последовательность монотонно убывает. Если $-1/\ln q$ — целое число, то последовательность монотонно убывает, начиная с члена, имеющего номер $-1/\ln q$. Указание. Рассмотреть промежутки монотонности функции $f(x)=xq^x$. **1.12.** Будет; $x_n\in[1/2;\ 2]$. **1.13.** Будет; $x_n\in[1;\ 4/3]$. **1.14*.** Будет; $x_n\in[0;\ 1/2]$. Указание. Убедиться в том, что $f(x)=x^2-2x+3$ возрастает на промежутке $[1,\ \infty)$. **1.15*.** Будет; $x_n\in[0;\ 1]$. Указание. Привести к общему знаменателю выражение в скобках.

§ 2

2.7*. Указание. Окружить a некоторым интервалом и сравнить по величине члены последовательности, не попавшие в этот интервал, и концы интервала. **2.8*.** Указание. Окружить точку a интервалом, не захватывающим q. **2.9*.** Нет. Указание. Окружить точки p и q непересекающимися интервалами. **2.11*.** Не имеет. Указание. Рассмотреть четные и нечетные значения n. **2.12*.** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Указание. Использовать неравенство $|\sin x|\leqslant 1$. **2.13.** а) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$; б) последовательность предела не имеет.

§ 3

3.1. $-1/2$. **3.2.** 1. **3.3.** 0. **3.4.** 0. **3.5.** -1. **3.6*.** 7/15. Указание. Разделить числитель и знаменатель на 3^{n+1} и воспользоваться формулой (3.4). **3.7*.** 0. Указание. Убедиться в том, что основание степени для любого n меньше 3/4. **3.8*.** 0. Указание. См. указание к 3.7*. **3.9*.** 0. Указание. Воспользоваться неравенством $|\sin n!|\leqslant 1$. **3.10.** 0. **3.11.** $-5/2$. **3.12.** 1/2. **3.13*.** 0. Указание. Домножить и разделить на $n^2-n\sqrt[3]{1-n^3}+\sqrt[3]{(1-n^3)^2}$. **3.14**.** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$. Решение. Докажем монотонность и ограниченность исходной последовательности. Ограниченность последовательности докажем по индукции. Так как $x_1=\sqrt{2}$, то $x_1<2$. Предположим, что $x_k\leqslant 2$, тогда из уравнения $x_{k+1}^2=x_k+2$ следует, что $x_{k+1}\leqslant 2$. Таким образом, $x_n\leqslant 2$. Легко заметить также, что $x_n>1$.

Рассмотрим неравенство

$$y^2\leqslant 2+y. \qquad (*)$$

Если члены последовательности удовлетворяют неравенству (*), то последовательность возрастает. Действительно, подставляя $y=x_n$ в (*), имеем

$$x_n^2\leqslant 2+x_n,$$

но $2+x_n=x_{n+1}^2$ и, следовательно, $x_n^2\leqslant x_{n+1}^2$. Множество решений неравенства (*) представляет собой промежуток $[1;\ 2]$. Так как из доказанного выше следует, что $1\leqslant x_n\leqslant 2$ для всех $n\in\mathrm{N}$, то они удовлетворяют неравенству (*).

Таким образом, последовательность возрастает и ограничена и, следовательно, имеет предел. Значение предела, согласно (5), должно удовлетворять уравнению $y^2-y-2=0$, откуда $y_1=1$, $y_2=2$. Легко проверить, что число 1 не является пределом последовательности. Следовательно, пределом является число 2.

3.15*. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. Указание. Преобразовать рекуррентное соотношение к виду $x_{n+1}=x_n+(x_n-a)^2$ и воспользоваться формулой (3.5). **3.16.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$. **3.17.** $1+\sqrt{1-a}$. **3.18*.** $\sqrt{1+a}-1$. Указание. Рассмотреть последовательности, состоящие из четных и нечетных членов исходной последовательности.

§ 4

4.1. 119/3. 4.2*. $(a_1=2,\ d=-3)$, $(a_1=-10,\ d=3)$. 1). Указание. Воспользоваться формулой (4.4). **4.4.** $a_n=$ $=p+q-n$. **4.5*.** Указание. Воспользоваться тем, что если числа u, v, w — три последовательных члена арифметической прогрессии, то $v-u=w-v$. 4.6. 2/3. 4.7. 20. 4.8. 167. **4.9.** 102. **4.10.** 29. **4.11.** 9. 4.12. 7. 4.13*. Указание. Рассмотреть сумму членов, равноотстоящих от концов, среди $a_1, \ldots, a_{m+n}$. **4.14*.** 82 350. Указание. Четное число, которое делится на 3, делится на 6. **4.15.** $d=2a_1$, $a_1\neq 0$ или $d=0$, $a_1\neq 0$. **4.16*.** 1275. Указание. Воспользоваться формулой $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$. **4.17*.** 1064. Указание. Воспользоваться указанием к 4.13*. **4.18.** 98. **4.19*.** $a_n=8n-4$. Указание. Воспользоваться формулой (4.6). **4.20*.** Указание. Выразить суммы a_1+a_{3n}, a_1+a_{2n}, a_1+a_n через S_{3n}, S_{2n}, S_n соответственно и воспользоваться соотношением $a_{3n}+a_n=2a_{2n}$. **4.21*.** Указание. Из условия получить зависимость между a_1 и d и использовать эту зависимость при доказательстве утверждения. **4.22*.** При $a\geqslant 12$. Указание. Рассмотреть множество значений функции $f(x)=25^x+25^{-x}+5^{1+x}+5^{1-x}$. **4.23.** $x=\log_2 5$. **4.25*.** Показать, что $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ не является рациональным числом. **4.26*.** Нет. Указание. См. указание к задаче 4.25*. **4.27*.** Да. Указание. Если длины сторон равны соответственно a, b, c, d, то необходимое и достаточное условие возможности вписать в четырехугольник окружность заключается в том, что $a+c=b+d$.

§ 5

5.2. $b_1=5$, $b_5=405$. **5.3.** (7, −14, 28, −56). **5.4.** $S_4=40$. **5.5.** (1, 3, 9). **5.6.** (1, 3, 9). **5.7.** (3, 6, 12); $\left(\frac{3}{2}(9+\sqrt{65}),\ -6,\ \frac{3}{2}(9-\sqrt{65})\right)$. 5.8. (2, 4, 8, 16); (16, 8, 4, 2). 5.9. (2, 4, 8) или (8, 4, 2). **5.10.** (1, 5, 25); (25, 5, 1). **5.11.** $q=2$. **5.12.** $\left(\dfrac{S_n}{S_n'}\right)^{n/2}$.

5.13. $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-1}}$; $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-2}}$; $\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})^{m-3}}$; ... **5.14.** $\dfrac{u_1^2(q^{2n}-1)}{q^2-1}$. **5.17*.** $S_n=\dfrac{x^{2n+2}-x^{4n+2}-x^{2n}+1}{(1+x^2)x^{2n}}+2n$. Указание. Возвести выражения в скобках в квадрат и сложить возникающие при этом геометрические прогрессии **5.18*.** $S_n=4-\dfrac{1}{2^{n-2}}-\dfrac{n}{2^{n-1}}$. Указание. Рассмотреть разность $S_n-\dfrac{S_n}{2}$. **5.19*.** $S_n=\dfrac{nx^{n+1}}{(x-1)}-\dfrac{x^{n+1}-x}{(x-1)^2}$. Указание. Домножить обе части равенства на x и из S_n вычесть xS_n. **5.20.** 28. **5.21.** $b_4=\dfrac{3}{16}$; $q=\dfrac{1}{4}$. **5.22*.** $\dfrac{3}{5}$. Указание. Воспользоваться методом, предложенным в примере 5.2. 5.23. $\left(6,\ 3,\ \dfrac{3}{2},\ \ldots\right)$. **5.24.** $\left(6,\ -\dfrac{1}{2}\right)$. 5.25. $\dfrac{S^2}{2S-1}$. **5.26*.** $x>0$, $x\neq\pm a$, $S=\dfrac{(a+x)^3}{4(a-x)ax}$. Указание. Для нахождения знаменателя прогрессии q разделить b_2 на b_1. Относительно x решить неравенство вида $|q(x)|<1$. **5.27.** $p=\dfrac{8a}{2-\sqrt{2}}$, $S=2a^2$. **5.28.** Условие имеет вид $a^{p-m}b^{m-k}c^{k-p}=1$. **5.29.** Числа 11, 12, 13 не могут быть членами одной геометрической прогрессии. **5.30.** 5. **5.31.** 3/2.

§ 6

6.1. (4, 8, 16); $\left(\dfrac{4}{25},\ -\dfrac{16}{25},\ \dfrac{64}{25}\right)$. **6.2.** (3, 6, 12); (27, 18, 12). **6.3*.** 931. Указание. Воспользоваться представлением числа в десятичной записи, т. е. представить искомое число в виде $a\cdot 10^2+b\cdot 10+c$, где a — число сотен, b — десятков, c — единиц. **6.4.** (32, 16, 8, 0); (2, 6, 18, 30). **6.5.** (2, 10, 18, ...); (2, 6, 18, ...). **6.6.** $b_7=27$. **6.7.** (24, 27, 30, ..., 54) и (24, 24, 24, ...). 6.8. $q=$ $=3/2$, $q=1$.

§ 7

7.1. Да; $x_n\in\left[0;\ 1\dfrac{1}{2}\right]$. **7.2.** Нет. **7.3*.** Да; $x_n\in[-8;\ 11]$. Указание. См. указание к задаче 1.4. **7.4*.** Девять членов. Указание. Воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии. **7.7*.** Указание. Воспользоваться свойством сторон треугольника. **7.8.** $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a^2/2$. **7.9.** 1/3. **7.10.** 0. **7.11*.** 630, 135, 765. Указание. Пусть x — число сотен, y — десятков и z — единиц. Тогда первое условие задачи приводит к уравнению $x\cdot 100 + y\cdot 10 + z = 45p$, где p — целое число. Так как x, y, z — последовательные члены арифметической прогрессии, то $2y = x + z$. Используя условия задачи, можно составить систему двух уравнений с четырьмя неизвестными:

$$x\cdot 100 + y\cdot 10 + z = 45p, \quad 2y = x + z,$$

которую необходимо решить в множестве целых неотрицательных чисел. **7.12**.** Решение. Согласно формуле (4.3), используя условия задачи, получаем

$$\frac{a_1 + a_n}{2} = np, \quad \frac{a_1 + a_k}{2} = kp.$$

Исключая из системы a_1, получаем $\frac{a_n - a_k}{2} = p(n-k)$. Используя формулу (4.2), имеем $d(n-k) = 2p(n-k)$, и, следовательно, $d = 2p$, $a_1 = p$. Используя опять формулу (4.3), получаем искомое выражение:

$$S_p = \frac{2p + 2p(p-1)}{2} p = p^3.$$

7.13*. Указание. Домножить и разделить каждое слагаемое на выражение, сопряженное знаменателю. **7.15*.** (8, 4, 2, 1, 1/2, 1/4). Указание. Из первых пяти уравнений следует, что числа x, y, z, s и t образуют геометрическую прогрессию. **7.16*.** Указание. Представить каждое число, входящее в доказываемое выражение, как сумму членов соответствующей геометрической прогрессии. **7.17*.** $A = 2$, $B = 32$. Указание. Использовать теорему Виета. **7.19*.** Указание. $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k} - \frac{1}{k-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k+2}$. **7.20*.** Указание. См. указание к 7.19*. **7.22.** $\frac{1}{9}\left(10\cdot\frac{10^n-1}{9} - n\right)$. **7.23.** а) $-\frac{n}{2}$, если n четное; $\frac{n+1}{2}$, если n нечетное; б) $-\frac{n(n+1)}{2}$, если n четное, $\frac{n(n+1)}{2}$, если n нечетное; в) $\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{12}$. **7.24.** 0. **7.25.** 0,5. **7.26.** $3\sqrt{3}/2$. Указание. Под знаком предела стоит сумма n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1/3$. **7.27.** 1,5. **7.28.** 1/3. **7.29.** 1,25. **7.30*.** 1. Указание. Использовать соотношение $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. **7.31*.** $\frac{1}{da_1}$. Указание. См. указание к 7.30. **7.32.** 1/4. **7.33**.** $\frac{\pi}{2}$. Решение. Заметим, что $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}$. Далее,

$$\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}} = \frac{2}{\sqrt{4\cos^2\frac{\pi}{8}}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

аналогично

$$\frac{2}{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ радикалов}}} = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}.$$

Таким образом, $a_n = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}\cdots\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}$. Домножим и поделим a_n на $2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Тогда получаем

$$a_n = \frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\ldots 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\ldots\cos\frac{\pi}{2^n}\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}} = \ldots \frac{2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\frac{\pi}{2}}.$$

Умножим и поделим последнее выражение на $\frac{\pi}{2}$, тогда, используя равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ и обозначая $x = \frac{\pi}{2^{n+1}}$, получим

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2^{n+1}}{\pi}\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}\cdot\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

7.34. $\dfrac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$. **7.35*.** $\dfrac{3}{2}$. Указание. Воспользоваться тем, что $\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}$, и формулами $2\cos^2 x=$ $=1+\cos 2x$, $2\sin^2 x=1-\cos 2x$.

ГЛАВА 8

§ 1

1.8*. Указание. Рассмотреть последовательности

$$x_n^{(1)}=\frac{2}{\pi(1+4n)},\qquad x_n^{(2)}=\frac{2}{\pi(3+4n)}.$$

§ 2

2.1. 1. **2.2.** 0. **2.3.** 1. **2.4.** 2. **2.5.** 0. **2.6.** 0. **2.7.** 6. **2.8.** $3x^2$. **2.9.** ∞. **2.10.** $\dfrac{1}{a}$ при $a\neq 0$, при $a=0$ предела не существует. **2.11.** а) $-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$; б) $\dfrac{21}{4}\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **2.12.** а) $-1/3$; б) 1. **2.13*.** $-3/2$. Указание. Выделить в числителе и знаменателе множитель $(x-1)^2$. **2.14.** 4/3. **2.15.** 3/2. **2.16.** $\sqrt{2}/2$. **2.17.** 0. **2.18.** 3/2. **2.19.** 4. **2.20.** $-2/3$. **2.21.** 1,5. **2.22.** 1,5. **2.23*.** $-1,75$. Указание. Перейти к переменному $y=-x$. **2.24.** 2. **2.25.** 8. **2.26.** 3/4. **2.27.** n/m. **2.28*.** $\cos a$. Указание. Использовать формулу $\sin x-\sin a=$ $=2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}$. **2.29*.** π. Указание. Обозначить $\pi/n=x$. **2.30*.** π. Указание. Обозначить $x+2=y$ и использовать формулу $\operatorname{tg}\pi(y+2)=\operatorname{tg}\pi y$. **2.31.** $-1/\sqrt{2}$. **2.32*.** -24. Указание. Преобразовать выражение, стоящее в числителе, к виду $\dfrac{\operatorname{tg}x\sin(x-\pi/3)\sin(x+\pi/3)}{\cos^2 x\cos^2(\pi/3)}$ и воспользоваться соотношением $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)$. **2.33*.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Указание. Преобразовать выражение, стоящее в знаменателе, к виду $4\sin\dfrac{\pi/3-x}{2}\sin\dfrac{\pi/3+x}{2}$. **2.34.** 0. **2.35*.** 1. Указание. В числителе добавить и вычесть единицу.

§ 3

3.9*. Указание. Использовать формулу $\cos(x+\Delta x)-\cos x=$ $=-2\sin\dfrac{\Delta x}{2}\sin\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)$. **3.10*.** Указание. Воспользоваться неравенством $\ln(1+x)\leqslant x$. **3.11*.** Указание. Использовать результат предыдущей задачи. **3.13.** Функция $y=\operatorname{tg}x$ терпит разрыв в точках $x=\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.14.** $\bar{f}(0)=1$. **3.15.** $\bar{f}(0)=2$. **3.16.** $\bar{f}(0)=1$. **3.17.** $\bar{f}(81)=1/6$. **3.18.** $A=1$. **3.19.** $A=0$. **3.20.** $A=3/2$. **3.21.** $A=1/2$. **3.22.** $A=2/m^2$. **3.23*.** $A=2/\pi$. Указание. При вычислении предела $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ ввести обозначение $z=1-x$. **3.24.** $b/a=\pi/2$. **3.25.** $a=1$. **3.26.** $2a-b=0$. **3.27.** $3a-b=0$. **3.28.** $a+b+1=0$. **3.29.** $b=4$. **3.30.** $a=3/2+2n$. **3.31.** $a=3/4$.

§ 4

4.1. -1. **4.2.** 3/4. **4.3.** Да. $(2>-7/22+1/4)$. **4.4.** Да. $(1/2+\sqrt{2}>-3+\lg 5)$. **4.5.** 3/7. **4.6.** 2/3. **4.7.** ∞. **4.8.** ∞. **4.9.** $1/\cos^2 a$. **4.10.** $-\operatorname{ctg}a$. **4.11.** $\cos^3 a$. **4.12.** $\sqrt{2}/4$. **4.13.** $\sqrt{2}/2$. **4.14.** 1/2. **4.15.** 1/2. **4.16.** $2\sqrt{2}$. **4.17.** ∞. **4.18.** 1/2. **4.19.** ∞. **4.20.** $\sqrt{3}/3$. **4.21.** 2. **4.22.** 0. **4.23.** 2. **4.24.** 2. **4.25.** $\sin 2a$. **4.26.** 1/2. **4.27.** 1. **4.28.** 1/2. **4.29.** $\sin 2a/\cos^4 a$. **4.30.** $-2\sin 2a$. **4.31.** 3. **4.32.** $3\sqrt{2}$. **4.33.** $-\sqrt{2}$. **4.34.** 0. **4.35.** $2a/\pi$. **4.36.** a/π. **4.37.** 2. **4.38.** 1/2. **4.39.** a. **4.40.** 3/2. **4.41.** $\bar{f}(3)=2$. **4.42.** $\bar{f}(0)=-1/8$. **4.43.** $\bar{f}(0)=-4$. **4.44.** $A=3/4$. **4.45.** $A=1/2$.

ГЛАВА 9

§ 1

1.1. $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$. **1.2.** $f'(x)=-\sin x$. **1.3*.** $f'(x)=e^x$. Указание. Использовать равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1$. **1.4*.** $f'(x)=\dfrac{1}{x}$. Указание. Использовать равенство $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}=1$. **1.5*.** $f'(x)=nx^{n-1}$. Указание. Воспользоваться формулой бинома Ньютона. **1.6.** $f'(x)=0$. **1.10*.** Указание. См. задачу 7.1.6*. **1.12.** $\dfrac{2}{\sqrt{x}\,(2-\sqrt{x})^2}$.

1.13. $\dfrac{-2x}{\sqrt{1-x^4}\,(1+x^2)}$. **1.14.** $\dfrac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x\sin\sqrt{x}}}$.

1.15. $\dfrac{e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}(2ax+b)}{2\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}\,(ax^2+bx+c)}$. **1.16.** $\dfrac{1}{1+x^2}$.

1.17. $\dfrac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$. **1.18.** $\sin^3 x\cos^2 x$.

1.19. $\dfrac{1}{\sin^4 x \cos^4 x}$. **1.20.** $-\dfrac{1}{x^2}\operatorname{tg}\dfrac{x-1}{x}$. **1.21.** $f'(x)=1$. **1.22.** $f'(x)=0$. **1.23.** $f'(x)=-2x$. **1.24.** $f'(x)=\dfrac{1-m}{m}x^{(1-2m)/m}+3\dfrac{1-n}{n}x^{(1-2n)/n}$. **1.25.** $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$. **1.26.** $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(8-t^3)^{-2/3}t^2$. **1.27.** $f'(x)=\dfrac{8}{x^2}$. **1.28.** $f'(x)=\dfrac{1}{6}(x^2-1)^{-5/6}2x$. **1.29.** $f'(x)=-\dfrac{x}{2(x^2-1)^{5/4}}$. **1.30.** $f'(x)=\sqrt{2}$. **1.31.** $f'(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{a}{x}}$. **1.32*.** $f'(x)=\begin{cases}-1, & x\in[1;\,2),\\ 1, & x\in(2;\,\infty).\end{cases}$ У к а з а н и е. Для упрощения вида функции $f(x)$ обозначить $\sqrt{x-1}=t$. **1.33.** $f'(x)=\begin{cases}2, & x\in(0;\,1),\\ 2/3, & x\in(1;\,\infty).\end{cases}$ **1.34.** $f'(x)=\begin{cases}-1/2, & x\in(-\infty;\,0),\\ 1/2, & x\in(0;\,\infty).\end{cases}$ **1.35*.** $f'(x)=\begin{cases}0, & x\in[2;\,4),\\ 1/\sqrt{x-2} & x\in(4;\,\infty).\end{cases}$ У к а з а н и е. Обозначить $\sqrt{2x-4}=t$.

§ 2

2.1. При $x\in(-\infty;\,-2)\cup(-1;\,\infty)$ $f(x)$ возрастает, при $x\in(-2;\,-3/2)\cup(-3/2;\,-1)$ $f(x)$ убывает. **2.2.** При $x\in(0;\,1)\cup(1;\,e)$ $f(x)$ убывает, при $x\in(e;\,\infty)$ $f(x)$ возрастает. **2.3.** При $x\in\mathbf{R}$ $f(x)$ возрастает. **2.4.** При $x\in(2;\,3)$ $f(x)$ возрастает, при $x\in(3;\,\infty)$ $f(x)$ убывает. **2.5.** При $x\in(-\infty;\,0)\cup(1;\,\infty)$ $f(x)$ убывает, при $x\in(0;\,1)$ $f(x)$ возрастает. **2.6.** Убывает при $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$. **2.7*.** $a\in(-\infty;\,-2-\sqrt{5})\cup(\sqrt{5};\,\infty)$. У к а з а н и е. Условие задачи эквивалентно условию $f'(x)>0$ для $x\in\mathbf{R}$. Выяснить, при каких значениях параметра a вспомогательная функция $g(t)$, получающаяся из $f'(x)$ заменой $t=\cos x$, положительна на промежутке $[-1;\,1]$. 2.8*. $a\in(6;\,\infty)$. У к а з а н и е. Вычислив значение производной, найти область изменения a, при котором она будет положительна. Использовать неравенство $|\cos\alpha x|\leqslant\cos 0$ для любого α. **2.9.** $x_{\max}=-2$, $y_{\max}=8$; $x_{\min}=2$, $y_{\min}=0$. **2.10.** $x_{\max}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $y_{\max}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x_{\min}=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi$, $y_{\min}=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $k\in\mathbf{Z}$. **2.11.** $x_{\min}=-\dfrac{1}{2}$, $y_{\min}=-\dfrac{1}{2}e^{-3/4}$; $x_{\max}=1$, $y_{\max}=1$. **2.12.** $x_{\max}=3$, $y_{\max}=\dfrac{1}{3}$; $x_{\min}=-3$, $y_{\min}=-\dfrac{1}{3}$. **2.13.** $x_{\max}=-2$, $y_{\max}=25$; $x_{\min}=1$, $y_{\min}=-2$. **2.14.** $x_{\min}=e$, $y_{\min}=e$. **2.15.** $x_{\max}=-1$, $y_{\max}=17$; $x_{\min}=3$, $y_{\min}=-47$. **2.16.** $x_{\max}=0$, $y_{\max}=-2$; $x_{\min}=2$, $y_{\min}=2$.

§ 3

3.1. $\max\limits_{x\in[-1;\,1]}f(x)=3$; $\min\limits_{x\in[1;\,1]}f(x)=1$. **3.2.** $\max\limits_{x\in[-2;\,1]}f(x)=17$; $\min\limits_{x\in[-2;\,1]}f(x)=0$. **3.3.** $\max\limits_{x\in[0;\,\pi]}f(x)=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$; $\min\limits_{x\in[0;\,\pi]}f(x)=0$. **3.4.** $\min\limits_{x\in[0;\,\pi/2]}f(x)=0{,}5$; $\max\limits_{x\in[0;\,\pi/2]}f(x)=\dfrac{3}{4}$. **3.5.** $\max\limits_{x\in[-\pi/2;\,\pi/2]}f(x)=\dfrac{\pi}{4}$; $\min\limits_{x\in[-\pi/2;\,\pi/2]}f(x)=-\dfrac{\pi}{4}$. **3.6.** $\max\limits_{x\in[\pi;\,3\pi/2]}f(x)=0$; $\min\limits_{x\in[\pi;\,3\pi/2]}f(x)=-1$. **3.7*.** $\max\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)=\dfrac{4}{8-\sqrt{2}}$, $\min\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)=\dfrac{4}{8+\sqrt{2}}$. У к а з а н и е. Перейти к переменному $y=\sin x+\cos x$. **3.8.** $\max\limits_{x\in[\pi/6;\,\pi/3]}f(x)=4\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\min\limits_{x\in[\pi/6;\,\pi/3]}f(x)=2$. **3.9*.** $\min\limits_{x\in[0;\,\pi]}f(x)=3$. У к а з а н и е. Перейти к переменному $y=\cos x$. **3.10.** $\max\limits_{x\in[-2;\,0]}f(x)=f(0)=1$; $\min\limits_{x\in[-2;\,0]}f(x)=f(-1)=0$. **3.11.** а) $\max\limits_{x\in[0;\,2]}f(x)=f(2)=4$, $\min\limits_{x\in[0;\,2]}f(x)=2$; б) $\max\limits_{x\in[-2;\,0]}f(x)=f(-2)=4$; $\min\limits_{x\in[-2;\,0]}f(x)=2$. **3.12.** $\max\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)=2$; $\min\limits_{x\in\mathbf{R}}f(x)=-2$. **3.13.** $\max\limits_{x\in[1/2;\,4]}f(x)=21+3\ln 2$, $\min\limits_{x\in[1/2;\,4]}f(x)=0$. **3.14.** $x_{\min}=\dfrac{1}{3}$; $\max\limits_{x\in[0;\,3]}f(x)=105$. **3.15.** $\max\limits_{x\in[0;\,10]}f(x)=f(5)=5$; $\min\limits_{x\in[0;\,10]}f(x)=f(0)=f(10)=0$. **3.16*.** $\max\limits_{x\in[0;\,3]}f(x)=f(3)=4\sqrt{6}$; $\min\limits_{x\in[0;\,3]}f(x)=f(1)=0$. У к а з а н и е. Перейти к переменному $y=(x-1)^2$ и воспользоваться тем, что $g(u)=\sqrt{u}$ — монотонно возрастающая функция. **3.17.** $\max\limits_{x\in[-5/2;\,1/2]}y=4$; $\min\limits_{x\in[-5/2;\,1/2]}y=3/2$.

§ 4

4.1. $[0;\,\infty)$. **4.2.** $[3;\,3/\cos^2 1{,}5]$. **4.3.** Пустое множество. **4.4*.** $[-1/3;\,1]$. У к а з а н и е. Можно найти максимальное и минимальное значения исходной функции, но есть и другой способ, состоящий в том, чтобы рассмотреть значения y, при которых уравнение $y(x^2-3x+3)=x-1$ относительно x имеет действительные решения. **4.5.** а) $y \in [0;\ 1/2]$; б) $y \in [-1/2;\ 1/2]$. **4.6*.** Указание. Рассмотреть неравенство, связывающее выражения, обратные к левой и правой частям исходного неравенства. **4.7*.** Указание. Представить $f(x)$ в виде $f(x) = 2\sin x - 2\sin^3 x$ и заменой $t = \sin x$ свести задачу к доказательству справедливости неравенства $\min\limits_{t \in [-1;\ 1]} g(t) > -7/9$, где $g(t) = 2t - 2t^3$. **4.8*.** Указание. См. указание к 4.7*. **4.9*.** Указание. См. указание к 4.7*. **4.11*.** Указание. См. указание к 4.4*. **4.12*.** $a \in \left(-\infty;\ \dfrac{-3-\sqrt{5}}{16}\right)$. Указание. Используя второе уравнение, получить неравенство с параметром относительно одного неизвестного. После этого найти наименьшее значение функции при каждом a и указать множество всех значений a, при которых это значение меньше 4. **4.13*.** 44. Указание. Воспользоваться тем, что $a_9 + a_3 = a_1 + a_{11}$. **4.14*.** $a = -4/3$, $a = -8/3$. Указание. Использовать свойство геометрической прогрессии: $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$. **4.15.** 2/3. **4.16.** $\sqrt{3} - 1$. **4.17*.** $a = 9$. Указание. Найти min функции $y = \dfrac{4}{\sin x} + \dfrac{1}{1-\sin x}$ на промежутке $(0;\ \pi/2)$; см. также указание к 4.7*. **4.18*.** Указание. Воспользоваться соотношением между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел. **4.19*.** Указание. Представить z в виде $z = (x+y+1)^2 + (x-2)^2 - 3$. **4.20*.** $a = 1$. Указание. Воспользовавшись теоремой Виета, выразить сумму квадратов корней уравнения как функцию a. **4.21*.** Указание. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $\dfrac{x}{1+x^2}$ при $x \in \mathbb{R}$; см. также указание к 4.4*. **4.25*.** Указание. См. указание к задаче 4.4*. **4.26*.** Указание. Использовать представление $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \dfrac{3}{4}\sin^2 2x$. **4.28.** 3 корня. **4.29.** $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^3 = 0$. **4.30.** 1) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 > 0$; 2) $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 < 0$.

§ 5

5.1. $18 = 9 + 9$. **5.2.** $36 = 6 \cdot 6$. **5.3.** $40 + 80 + 60 = 180$. **5.4.** $\dfrac{a}{2} + \dfrac{a}{2} = a$. **5.5*.** $p = -2$, $q = 0$, расстояние равно 1. Указание. Расстояние от вершины параболы до оси Ox представляет собой ординату вершины. **5.6.** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$. **5.7.** Координаты

вершин прямоугольника, лежащих на параболе: $\left(\dfrac{2}{3}a,\ \pm 2\sqrt{\dfrac{pa}{3}}\right)$. **5.8.** Высота конуса, имеющего наибольшую поверхность, составляет 4/3 радиуса шара. **5.9.** Диаметр основания и высота цилиндра равны $2/\sqrt{3}$. **5.10*.** Площадь круга, описанного вокруг равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами $\sqrt{2S}$, будет наименьшей. Указание. Воспользоваться тем, что гипотенуза прямоугольного треугольника является диаметром описанного круга. **5.11*.** $\varphi = \pi/3$. Указание. Воспользовавшись тем, что треугольник ABD прямоугольный, выразить боковую сторону и меньшее основание через диаметр описанной окружности. **5.12*.** Наибольший периметр имеет треугольник, у которого один из углов при основании равен $\pi/2 - \alpha/2$. Указание. Использовать теорему синусов. **5.13.** 30 кв. ед. **5.14.** $2a$. **5.15.** 5. **5.16.** $\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $H = \dfrac{8R}{3\sqrt{3}}$. **5.17*.** $\alpha = \pi/3$. Указание. Использовать формулу $r = S/p$, где S — площадь, а p — полупериметр треугольника. **5.18.** $\alpha = \arccos\dfrac{V_p}{V_a}$. **5.19.** $\alpha = \pi/4$. **5.20*.** $h = (l^{2/3} - d^{2/3})^{3/2}$. Указание. Связь между аргументами функции, наименьшее значение которой требуется найти, устанавливается из подобия прямоугольных треугольников, гипотенузами которых являются внешняя и внутренняя по отношению к башне части жесткого стержня. **5.21.** Длина — 30 см, ширина — 20 см. **5.22.** а) $x = y = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$; б) $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$, $y = d\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. **5.23.** $h = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. **5.24.** Сторона площадки, примыкающая к стене, должна быть вдвое больше другой стороны. **5.25.** $AM = a\sqrt[3]{p}\,(\sqrt[3]{p} + \sqrt[3]{q})^{-1}$. **5.26*.** К точке отрезка AB, удаленной от B на 1 км. Указание. Время достижения точки B как функцию координаты точки, к которой должна пристать лодка, необходимо представить в виде суммы двух слагаемых, одно из которых — время движения по воде, а второе — по суше. **5.27*.** Через время $t_0 = \dfrac{2m_0}{3k}$ (с) $W(t_0) = \dfrac{2}{27}\dfrac{m_0^3 g^2}{k^2}\left(\dfrac{\text{г}\cdot\text{см}^2}{\text{с}^2}\right)$. Указание. Кинетическая энергия W в момент t равна $W(t) = \dfrac{m(t)\,V^2(t)}{2}$, где $m(t)$ — масса капли к моменту t, а $V(t)$ — достигнутая к моменту t скорость. **5.28*.** 20 км/ч, 720 р. Указание. Воспользоваться тем, что стоимость единицы пути складывается из двух величин, из которых первая пропорциональна кубу скорости, а вторая обратно пропорциональна первой степени скорости. **5.29.** $x(p)=\min\left(\frac{100}{\sqrt{3}},\ a\right)$, где $x(p)$ — расстояние от станции железной дороги до пункта P. **5.30.** $\frac{23}{410}$ ч. **5.31*.** $1\frac{27}{43}$ ч. Указание. Расстояние в момент времени t между поездом и автомобилем представляет собой третью сторону треугольника, двумя другими сторонами которого являются расстояние, пройденное поездом, и расстояние, которое осталось пройти автомобилю, соответственно. **5.32*.** Через $\frac{a}{2v}$ ч. Указание. См. указание к задаче 5.31*. **5.33.** $y=\frac{2}{3}h$. **5.34.** Бриллиант был расколот пополам. **5.35.** Сопротивления должны быть одинаковыми и равными $\frac{R}{2}$. **5.36*.** $\alpha=\max\left\{\arccos\frac{1}{k},\ \operatorname{arctg}\frac{h}{d}\right\}$. Указание. Время движения гонца, как функция координаты точки причаливания, складывается из времен движения по воде и по берегу. **5.37*.** $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{V_1}{V_2}$, где α — угол падения, а β — угол преломления луча. Указание. Выразить путь луча в каждой среде через координату точки падения на границе сред. Найти отношение путей в каждой среде к их проекциям на границу сред, при котором достигается минимум времени прохождения всего пути между точками A и B. **5.38*.** $\alpha=\beta$, где α — угол падения, β — угол отражения. Указание. См. указание к 5.37*. **5.39.** $I_1=\frac{IR_2}{R_1+R_2}$, $I_2=\frac{IR_1}{R_1+R_2}$, т. е. разветвить токи следует обратно пропорционально сопротивлениям, через которые должны быть пропущены эти токи. **5.40.** 6000 р. **5.41*.** $n=8$. Стоимость затрат $\approx 2{,}8\sqrt{2}$ млн.р. Указание. Если $f(x)$ — функция, выражающая зависимость стоимости от построенной площади, то следует искать наименьшее значение функции $F(n)=nf\left(\frac{40000}{n}\right)$, где n — число построенных домов. **5.42*.** $4\sqrt{2}$ м. Указание. Искать расстояние, с которого тангенс угла обзора будет наибольшим (тангенс — монотонная функция своего аргумента). **5.43*.** $(\sqrt{4b^2-3a^2}-b)\cdot 3^{-1/2}$. Указание. Искать расстояние, при котором тангенс угла, образованного точкой остановки автобуса и двумя противоположными сторонами фасада дворца, будет наибольшим. Выразить этот угол в виде разности углов, под которыми видны дальний и ближний (по отношению к шоссе) концы фасада дворца.

5.44*. $\varphi=\operatorname{arctg}K$; $F=\frac{KP}{\sqrt{1+K^2}}$. Указание. Воспользоваться тем, что сумма сил в плоскости движения должна быть равна нулю. **5.45*.** $\alpha=\beta$. Указание. См. указание к предыдущей задаче. **5.46.** $\sqrt{2ap/K}$. **5.47.** $\rho=2{,}4$ ($x_0=5/3$; $y_0=5/9$). **5.48*.** (1/2; 7/4). Указание. Задача сводится к нахождению точки C параболы, максимально удаленной от прямой BD. **5.49*.** Наименьший периметр треугольника AMB равен $\sqrt{10}+2\sqrt{5}+\sqrt{34}$. Положение точки M, при котором достигается наименьший периметр, — $M(0;0)$. Указание. Рассмотреть точку, симметричную точке A относительно прямой $y=x$. **5.50*.** Точка M должна делить пополам отрезок прямой, заключенный между сторонами угла. Указание. Исследовать изменение площади треугольника при изменении наклона прямой, проходящей через M. **5.51.** Две оставшиеся вершины получаются при пересечении сторон угла прямой, соединяющей точки, которые являются симметричными образами точки M относительно сторон угла. **5.52.** $2R\sin\frac{2\pi}{9}$. **5.53.** $\frac{a}{4b}\sqrt{3b^2-a^2}$. **5.54.** Длина стороны основания — 2 см, объем — 4 см³. **5.55.** Стороны прямоугольника, имеющего наибольшую площадь, равны $R\sqrt{2}/2$. **5.56.** $5\pi/9$. **5.57*.** $S_{\max}=R^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. Рассмотреть два случая: первый — две вершины искомого прямоугольника лежат на одном из радиусов, образующих сектор; второй — по одной вершине на радиусах и две на дуге сектора. Во втором случае следует разбить сектор на два одинаковых сектора, тогда задача сведется к первому случаю, рассмотренному для каждой половины отдельно.

§ 6

6.1. $(\sqrt{2};\ 2-\sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2})$. **6.2.** $y=2$. **6.3.** $y=-\sqrt{3}x+\frac{\pi\sqrt{3}+3}{2}$. **6.4.** $\operatorname{arctg}9$; $y=9x-23\frac{1}{4}$. **6.5*.** (1/2; —15/32). Указание. Координаты точки касания можно получить из уравнения $f'(x)=k$, где k — угловой коэффициент касательной. **6.6.** (0; 2). **6.7.** 2. **6.8.** $y=8x+4$. **6.9.** $x_0=\pm\arcsin\frac{1}{4\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}$. **6.10.** πn; $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$; $n\in\mathbf{Z}$. **6.11.** (8; 0); (0; 0). **6.12*.** (3; —15); 21/2; 21; (—1; 9); 19/2. 19. Указание. Условие задачи дает возможность сразу определить угол, образуемый искомой касательной с положительным направлением оси Ox. **6.13*.** $a=1$. Указание. Условие пересечения прямой и параболы равносильно существованию двух действительных корней соответствующего квадратного уравнения; полусумма абсцисс этих корней по условию задачи должна быть равной 2. **6.14.** $y=-3x-4$. **6.15.** $y=x+4$, $y=-x+4$. **6.17.** (2; 8/3); (3; 7/2). **6.18** $3\pi/4$. **6.19**.** Решение. Продифференцируем каждое уравнение, считая, что y — функция от x. Имеем $y+y'x=0$ и $2x-2yy'=0$. Выражая y' в каждом из уравнений, имеем $y'=-y/x$, $y'=x/y$ соответственно. Следовательно, в любой точке $M(x_0;\ y_0)$, являющейся точкой пересечения кривых, произведение угловых коэффициентов касательных равно -1.

6.20*. Указание. Показать, что произведение угловых коэффициентов в точках пересечения линий разных семейств равно -1. **6.21.** $\left(\sqrt{\frac{c}{a}};\ b\sqrt{\frac{c}{a}}+2c\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{c}{a}};\ 2c-b\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$ при $ac>0$; (0, 0) при $c=0$; нет решения при $ac<0$. **6.22.** $(a+\sqrt{a^2-(5a+b-6)};\quad 2a^2+\sqrt{a^2-(5a+b-6)}\times(2a-5)-10a-b)$, $(a-\sqrt{a^2-(5a+b-6)};\quad 2a^2-\sqrt{a^2-(5a+b-6)}\,(2a-5)-10a-b)$, если $a^2-(5a+b-6)>0$ $(a,\ 2a^2-10a-b)$, если $a^2-(5a+b-6)=0$; нет решения если $a^2-(5a+b-6)<0$. **6.23.** $y=-\frac{1}{x_0^2}x+\frac{2}{x_0}+1$, где $x_0=\frac{2}{b-1}$, если $a=0$, $b\neq 1$; $x_0=\frac{a}{2}$ при $a\neq 0$, $b=1$; $x_0=\frac{1}{b-1}$ при $a\neq 0$, $b=1+\frac{1}{a}$; $x_0=\frac{-1\pm\sqrt{1+a(1-b)}}{1-b}$ при $a>0$, $b\neq 1$, $b<1+\frac{1}{a}$ и при $a<0$, $b\neq 1$, $b>1+\frac{1}{a}$. В остальных случаях ($a=0$, $b=1$; $a>0$, $b>1+1/a$; $a<0$, $b<1+1/a$) решения не существует. **6.24*.** $y=-x+5/2$. Указание. Условие пересечения двух линий $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ равносильно совместности системы уравнений $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, решения которой являются координатами точек пересечения. **6.25.** (1/8; 1/16). **6.26*.** $\varphi=\pi/3$. Указание. Искомым является угол между касательными к окружности, проведенными через точку (8; 0). **6.27.** (−0,4; 8,8), если точка M двигалась по окружности против часовой стрелки; (6; 4), если точка M двигалась в обратном направлении. **6.28.** $p=2bk$. **6.29*.** Прямая $y=-1/2$. Указание. Геометрическое место точек, из которых парабола видна под прямым углом, представляет собой множество точек пересечения касательных к параболе, образующих прямой угол. **6.30.** arctg (−4/3). **6.31*.** Окружность $x^2+y^2=a^2+b^2$. Указание. См. указание к 6.29*. **6.37.** $a=1/2e$. **6.38.** Точка с координатами (0, 2).

§ 7

7.1*. −1,5 м/с (знак минус означает, что $y(t)$ уменьшается). Указание. Если $y(t)$ — закон изменения пути верхнего конца, а $x(t)$ — нижнего, то следует учесть, что $x^2+y^2=25$. **7.2.** $V(t)=-\frac{hl}{vt^2}$; знак минус означает, что тень уменьшается. **7.3.** Убывает со скоростью 0,4. **7.4*.** 15 см/с. Указание. Момент встречи определяется из условия $x_1(t)=x_2(t)$. **7.5**.** $2v\left|\sin\left(\frac{v}{2R}t\right)\right|$. Решение. Введем систему координат таким образом, чтобы колесо катилось по оси Ox, а ось Oy при $t=0$ проходила через центр колеса. Тогда на основании закона независимости движений имеем следующие законы изменения абсциссы и ординаты гвоздя:

$$x(t)=v(t)-R\sin\left(\frac{v}{R}t\right),\quad y(t)=R-R\cos\left(\frac{v}{R}t\right).$$

Таким образом,

$$x'(t)=v-\frac{v}{R}R\cos\left(\frac{v}{R}t\right)=v\left[1-\cos\left(\frac{v}{R}t\right)\right],$$

$$y'(t)=\frac{R}{R}v\sin\left(\frac{v}{R}t\right)=v\sin\left(\frac{v}{R}t\right).$$

Скорость гвоздя в момент времени t будет равна

$$V=\sqrt{(x')^2+(y')^2}=v\sqrt{1-2\cos\left(\frac{v}{R}t\right)+1}=$$
$$=2v\left|\sin\left(\frac{v}{2R}t\right)\right|.$$

7.6*. Скорость равна нулю. Указание. При движении точки по окружности абсцисса изменяется по закону $x=R\cos\omega t$. **7.7*.** $h=\frac{V^2\sin^2\alpha}{2g}$. Указание. Изменение высоты подъема тела происходит по закону $h(t)=V\sin\alpha t-\frac{gt^2}{2}$, вертикальная составляющая скорости в точке максимального подъема равна нулю. **7.8.** 12 рад/с. Колесо остановится через 2 с. **7.9*.** $v(t)=\frac{2t^3-6t^2+12t}{\sqrt{t^4-4t^3+12t^2}}$. Указание. Выразить расстояние между телами в момент t как третью сторону треугольника, двумя другими сторонами которого являются $S_1(t)$ и

$S_2(t)$. **7.10.** 40 км/ч. **7.11**.** В момент времени $t=(t_1+t_2)/2$ предмету следует придать скорость $V=V_0+at_2$. Закон движения предмета имеет вид

$$S(t)=\begin{cases} V_0t+at^2/2, & t\leqslant t_1,\\ V_0t+at_1t-at_1^2/2, & t_1<t\leqslant(t_1+t_2)/2,\\ V_0t+at_2t-at_2^2/2, & t>(t_1+t_2)/2.\end{cases}$$

Решение. Отделившись от ракеты в момент времени t_1, предмет движется равномерно со скоростью, достигнутой ракетой в момент отделения предмета. В некоторый момент t предмет мгновенно увеличивает свою скорость до некоторой величины V и снова движется равномерно до встречи с ракетой в момент t_2, причем в момент t_2 их скорости одинаковы. Следовательно, закон движения предмета вне ракеты представляет собой ломаную линию, звеньями которой являются касательные к параболе $S(t)=V_0t+(at^2)/2$ в точках t_1 и t_2. Абсцисса t точки пересечения этих касательных — искомый момент времени. Скорость, которую имеет предмет в момент времени t, совпадает со скоростью в момент времени t_2 и может быть найдена как производная функция $S(t)$ в момент времени t_2. Так как $S'(t)=V_0+at$, то касательные к параболе $S(t)$ в точках t_1 и t_2 имеют вид

$$\begin{aligned} S(t)&=S(t_1)+(V_0+at_1)(t-t_1),\\ S(t)&=S(t_2)+(V_0+at_2)(t-t_2). \end{aligned}\qquad (*)$$

Рассматривая (*) как систему уравнений относительно пары неизвестных (S,t), находим, что $t=(t_1+t_2)/2$, и, следовательно, закон движения предмета представляется в виде, указанном в ответе. **7.12*.** $t_0=t_1-\sqrt{t_1^2-2S_1}$. Указание. Закон движения ракеты после отключения двигателей может быть записан в виде уравнения касательной к кривой, являющейся графиком закона движения.

ГЛАВА 10

§ 1

1.1*. $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt2}-\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+c$. Указание. Разделить почленно на знаменатель и воспользоваться формулами (16) и (17). **1.2.** $\dfrac35x^{5/3}-\dfrac{12}{7}x^{7/6}+c$. **1.3*.** $-\dfrac23(1-x)^{3/2}+\dfrac25(1-x)^{5/2}+c$. Указание. Преобразовать $f(x)$ к виду

$f(x)=\sqrt{1-x}-(1-x)\sqrt{1-x}$. Для представления $f(x)$ в таком виде удобно ввести переменное $t=1-x$; тогда $f(x)=g(t(x))$, где $g(t)=(1-t)\sqrt t=\sqrt t-t\sqrt t$. **1.4*.** $-8\left(1-\dfrac x2\right)^{1/2}+\dfrac83\left(1-\dfrac x2\right)^{3/2}$. Указание. См. указание к 1.3*. **1.5*.** $-\dfrac14(2x-1)^{-1}+\dfrac18(2x-1)^{-2}+c$. Указание. См. указание к 1.3*. **1.6*.** $\dfrac{(1+x)^{5/2}}{5}-\dfrac{(1+x)^{3/2}}{3}+c$. Указание. Представить $f(x)$ в виде $f(x)=\dfrac{\sqrt{(1+x)^3}}{2}-\dfrac{\sqrt{1+x}}{2}$. **1.7.** $\dfrac{x^2}{2}-x+c$. **1.8.** $t+\ln|t|+c$. **1.9.** $\dfrac{12x^{5/6}}{5}+c$. **1.10.** $-\dfrac23x^{3/2}+4x^{-1/2}+c$. **1.11.** $2x^{1/2}-\dfrac23x^{3/2}+c$. **1.12.** $-x+c$. **1.13.** $x-\dfrac{x^3}{3}+c$. **1.14.** $x+x^2+c$. **1.15.** $mx^{1/m}+3nx^{1/n}+c$. **1.16.** x^2-x+c. **1.17.** $\dfrac{2(1+x)^{3/2}}{3}+c$. **1.18.** $2x-8\ln|x|+c$. **1.19.** $x+2\ln|x-2|+c$. **1.20.** $\sqrt[6]{2x}+c$. **1.21*.** $-\dfrac1{12}\cos12x-\dfrac1{10}\cos10x-\dfrac19\cos9x-\dfrac1{11}\cos11x+c$. Указание. Преобразовать подынтегральное выражение к виду $\sin12x+\sin10x+\sin9x+\sin11x$ и воспользоваться правилом 4) и формулой (4) таблицы первообразных. **1.22.** $-\dfrac14\cos4x+\dfrac15\cos5x+\dfrac16\cos6x-\dfrac17\cos7x+c$. **1.23.** $\sin\alpha-\cos\alpha+\dfrac13\sin3\alpha-\dfrac13\cos3\alpha+c$. **1.24.** $\dfrac14x+\dfrac1{32}\sin8x+c$. **1.25.** $-\left(x+\dfrac1\pi\cos4x\right)+c$. **1.26.** $-\sqrt2\cos\dfrac x2+c$. **1.27.** $-\dfrac12\cos2x+c$. **1.28.** $-2\cos x+c$. **1.29.** $-\dfrac18\cos8x+c$. **1.30.** $-\dfrac18\cos4x+c$. **1.31.** $\dfrac12x-\dfrac{\sin x}{2}+c$. **1.32.** $\dfrac14\sin2\alpha-\dfrac12\alpha+c$. **1.33.** $\operatorname{tg}x-x+c$. **1.34.** $-\operatorname{ctg}x-x+c$.

§ 2

2.1. $y=x^3+1$. **2.2.** $y=x^2$. **2.3.** $y=5x-1$. **2.4.** $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac12$. **2.5.** $y=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac73$ и $y=\dfrac{x^3}{3}+1$. **2.6.** $y=3\ln x+1$.

2.7. $S(t)=2-0{,}25\cos 2t$ (м). **2.8.** $p\geqslant 2$, один раз пешеходы встретятся при $p=2$.

§ 3

3.1. 8. **3.2.** 1/2. **3.3.** 0. **3.4.** 8. **3.5*.** $-2\frac{2}{3}$. Указание. Сделать замену $t=2-\frac{x}{2}$. **3.6*.** $-1\frac{73}{135}$. Указание. См. указание к 3.5*. **3.7*.** $\frac{3^{3/2}-2^{3/2}-1}{3}$. Указание. Избавиться от рациональности в знаменателе. **3.8.** $\frac{45}{4}$. **3.9.** $\frac{46}{15}$. **3.10.** $\frac{\pi-2}{4}$. **3.11.** $\ln 2-\frac{1}{2}$. **3.12.** $-\frac{1}{2}$. **3.13.** $\frac{1}{8}$. **3.14.** $\sqrt{2}$. **3.15.** $\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)$. **3.16.** 2. **3.17.** 1. **3.18.** $2-\frac{\sqrt{2}}{2}$. **3.19.** $2\sqrt{2}$. **3.20.** $2\sqrt{2}+\frac{4}{3}(3^{3/2}-2^{3/2})$. **3.21.** $\ln 2{,}5+2{,}5$. **3.22.** $4\ln\frac{4}{3}$. **3.23.** $2\sqrt{2}$. **3.24.** $3\sqrt{2}-1$.

§ 4

4.1. $\min\limits_{x\in[0;\ \pi/2]} F(x)=F(0)=0$, $\max\limits_{x\in[0;\ \pi/2]} F(x)=F\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$.
4.2. $\min\limits_{x\in[-1;\ 3]} F(x)=F(2,5)=-6{,}25$, $\max\limits_{x\in[-1;\ 3]} F(x)=F(-1)=6$.
4.3. $\min\limits_{x\in[0;\ 4]} F(x)=F(0)=0$, $\max\limits_{x\in[0;\ 4]} F(x)=F(4)=\frac{16}{3}$.
4.4. $\max\limits_{x\in[-1/2;\ 1/2]} F(x)=F\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{8}$, $\min\limits_{x\in[-1/2;\ 1/2]} F(x)=F\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{8}$. **4.5.** $y=2-x$; $y=x-3$. **4.6.** Кривые совпадают, $x\in\mathbb{R}$. **4.7.** $\left(\frac{6}{5}, \frac{36}{25}\right)$. **4.8.** $\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+6x$. **4.9.** $y=x-\frac{1}{4}$; $y=x+\frac{1}{4}$. **4.10.** $S(t)=\frac{2t^3}{3}$. **4.11*.** $A(x)=25x^2+100x$. Указание. Закон изменения силы F как функции пути x представляется формулой $F(x)=ax+b$, где параметры a и b находятся из условий задачи. Работа переменной силы представляет собой ту ее первообразную, которая обращается в нуль при $x=0$. **4.12.** $S(t)=\frac{2{,}5t^2}{2}-t$. **4.13.** $S(t)=\frac{2}{3}t^2+\frac{10}{3}t$.

§ 5

5.1. $(-\infty;\ -2)\cup(1/2;\ 3)$. **5.2.** $(2;\ 3)$. **5.3.** $[4;\ \infty)$. **5.4.** $A=-2/\pi$; $B=2$. **5.5.** $a=1$. **5.6.** $\sqrt{2\pi}$; $\frac{-1+\sqrt{8\pi+1}}{2}$. **5.7.** 6с. **5.10.** Да. **5.11.** $A=7$; $B=-6$; $C=3$. **5.12.** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$. **5.13.** 1/2; 2. **5.14.** $-\pi$; $-\frac{\pi}{3}$; 0.

§ 6

6.1. $\frac{4}{3}$. **6.2.** 9. **6.3.** $\frac{343}{3}$. **6.4.** $\frac{1}{3}+\ln 2$. **6.5.** $3\left(1-\frac{1}{4\ln 2}\right)$. **6.6.** $4\frac{1}{2}$. **6.7.** $12-5\ln 5$. **6.8.** $\frac{15}{4}-\ln 2$. **6.9.** $\frac{8}{3}$. **6.10.** 1. **6.11.** $4-\frac{3}{\ln 2}$. **6.12.** $7\ln 3$. **6.13.** $\frac{9}{2}$. **6.14.** $6\frac{1}{3}-\frac{3}{4\ln 2}$. **6.15.** $\ln 2$. **6.16.** $\frac{19}{24}$. **6.17.** $\frac{1}{2}\ln 2$. **6.18.** $\frac{8}{3}$. **6.19.** $15-16\ln 2$. **6.20.** $3\frac{8}{15}$. **6.21.** $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **6.22.** $9-8\ln 2$. **6.23*.** 8/9. Указание. Для вычисления площади этой фигуры удобнее использовать формулу (6.3). **6.24*.** $\frac{3}{8}\pi r^2$. Указание. Область интегрирования следует разбить на две области, координаты точки деления находятся как решение системы

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2,\\ x-y=0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

6.25*. $1-\pi/4$. Указание. $\max(x,\ y)=1$ — точки, составляющие две смежные стороны единичного квадрата, вписанного в угол первой четверти. **6.26.** 1/3. **6.27.** $\pi/2-1$. **6.28.** 1. **6.29*.** πab. Указание. Выразить y через x при $y>0$ и $x>0$, при вычислении определенного интеграла $4\int\limits_0^a b\sqrt{1-x^2/a^2}\,dx$ использовать формулу (9.3.4). **6.30*.** π. Указание. Выделить полный квадрат по переменной x. **6.31**.** 4/3. Решение. Уравнение касательной к кривой $y=2x^2$ в точке с абсциссой 2 имеет вид $y-8=8(x-2)$, так как $y(2)=8$, $y'(2)=8$. Точка пересечения касательной и оси абсцисс находится из уравнения $8x-8=0\Leftrightarrow x=1$. Область интегрирования разбивается на два промежутка: $[0;\ 1]$ и $[1;\ 2]$, причем на $[0;\ 1]$ вычисляется площадь фигуры, заключенной между $y=2x^2$ и $y=0$ (осью абсцисс), а на [1; 2] — между $y=2x^2$ и $y=8x-8$. Таким образом,

$$S=\int_0^1 2x^2\,dx+\int_1^2 (2x^2-8x+8)\,dx=$$
$$=\frac{2x^3}{3}\Big|_0^1+\left(\frac{2x^3}{3}-\frac{8x^2}{2}+8x\right)\Big|_1^2=\frac{2}{3}+$$
$$+\left(\frac{16}{3}-\frac{32}{2}+16-\frac{2}{3}+\frac{8}{2}-8\right)=\frac{4}{3}.$$

6.32. 9. **6.33.** $\ln 2-\frac{5}{8}$. **6.34*.** $2\frac{1}{4}$. Указание. Следует разбить фигуру на две криволинейные трапеции; абсцисса точки деления — абсцисса точки пересечения касательных. **6.35.** $\frac{45}{4}$.

6.36.** Парабола рассекает квадрат на две части, площади которых относятся, как 1 : 2. Решение. Выберем систему координат таким образом, что вершина параболы совпадала с точкой (0; 0) и ось Oy являлась осью симметрии. Тогда уравнение параболы приобретает вид $y=ax^2$. Параметр a выбирается следующим образом: обозначим длину стороны квадрата, середина основания которого совпадает с началом координат, буквой l; тогда точка $(l/2;\ l)$ — правая верхняя вершина квадрата, лежащая на параболе, т. е. $l=a(l/2)^2$. Из этого уравнения получаем, что $a=4/l$. Площадь квадрата S равна l^2, а площадь, отсекаемая параболой, определяется из формулы

$$S_n=2\int_0^{l/2}\frac{4}{l}x^2\,dx=\frac{8}{l}\,\frac{x^3}{3}\Big|_0^{l/2}=\frac{l^2}{3}.$$

Таким образом, парабола рассекает квадрат на две части, площади которых относятся, как 1 : 2.

6.37*. $\frac{S_n}{S}=\frac{3\pi-8}{3\pi}$, где S — площадь, отсекаемая параболой от полукруга. Указание. Выбрать систему координат так, чтобы вершина параболы совпадала с началом координат, а ось Oy была осью симметрии параболы. Тогда уравнение параболы имеет вид $y=ax^2$, а уравнение окружности — вид $(y-R)^2+x^2=R^2$. Связь между a и R устанавливается из условий задачи (см. решение 6.36**). **6.38*.** $\frac{2}{3}$. Указание. Параметр a в уравнении параболы находится из условия $f'(-5)=\operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arctg} 20)$. **6.39*.** $a=8$; $a=\frac{2}{5}(6-\sqrt{21})$. Указание.

Рассмотреть два случая: $a>2$ и $a<2$. Во втором случае учесть, что при переходе через точку $x=1$ знак разности $\frac{1}{x}-\frac{1}{2x-1}$ меняется. **6.40.** $\frac{9}{4}\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)$. **6.41*.** $S=b$ при $a=\sqrt{8/3b-1}$; задача имеет решение при $b\in(0;\ 8/3)$. Указание. Для того чтобы выразить a как функцию от b, следует разрешить относительно a уравнение, правая часть которого равна b, а левая представляет площадь указанной в условии фигуры. Значение b, при котором задача имеет решение, находится из условия $a(b)>0$, где $a(b)$ — искомая функция. **6.42*.** $-\pi/6$; $\pi/3$. Указание. Учесть, что искомое значение a может быть как больше $\pi/6$, так и меньше (во втором случае площадь будет вычисляться по формуле $S=\int_a^{\pi/6}|\sin 2x|\,dx$). **6.43*.** $a\in\left(0;\ \frac{4}{3}\right)$; $b=\frac{16}{9a^2}-1$. Указание. См. указание к 6.37*. **6.44*.** $y=\left[x-\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]\frac{4}{\sqrt{2}\,(4-\sqrt{2})}+\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{8\sqrt{2}-2}$. Указание. При решении задачи использовать формулу $\sqrt{1+\cos 2x}=\sqrt{2}\,|\cos x|$.

§ 7

7.1. 3/4. **7.2.** $a=\sqrt[4]{3}$. **7.3.** $a=1$. **7.4*.** $S(-1)=125/6$, $\min\limits_{k\in R} S(k)=S(2)=32/3$. Указание. Пределы интегрирования находятся как корни $x_1(k)$ и $x_2(k)$ уравнения $x^2+2x-3=kx+1$. Следует учесть, что на промежутке $[x_1(k);\ x_2(k)]$ всегда выполнено неравенство $y_2(x)\leqslant y_1(x)$. **7.5.** $\min\limits_{x_0\in[1/2;\ 1]} S(x_0)=S\left(\frac{4}{5}\right)=\sqrt[3]{\frac{5}{4}}\,\frac{48}{25}$. **7.6*.** (3/2; 13/4). Указание. Воспользоваться тем, что $S=h\left(\frac{a+b}{2}\right)$, где $h=1$, $a=f_{x_0}(1)$, $b=f_{x_0}(2)$, $f_{x_0}(x)$ — уравнение касательной к $y=x^2+1$ в точке с абсциссой $x_0\in[1;\ 2]$. **7.7*.** $a=-1$. Указание. Между двумя последовательными экстремумами функция $f(x)=x^3+3x^2+x+a$ монотонна. Дальнейшее решение задачи может быть основано на следующей лемме.

Лемма. Площадь фигуры, ограниченной прямыми $x=c$, $x=b$, $b>c$, графиком дифференцируемой монотонной функции

$f(x)$ и прямой $y=f(a)$, где $a\in[c,b]$, достигает своего наименьшего значения в том случае, когда $y=f\left(\frac{b+c}{2}\right)$.

Доказательство. Для простоты докажем этот результат в случае, когда $c=0$, $b=1$ и $f(b)=1$. При фиксированном значении a площадь выражается в виде следующей функции:

$$S(a)=\int_0^a [f(a)-f(x)]\,dx+\int_a^1 [f(x)-f(a)]\,dx=$$
$$=[f(a)\,x-F(x)]\big|_0^a+F(x)\big|_a^1-f(a)\,x\big|_a^1=$$
$$=f(a)\,a-F(a)+F(0)+F(1)-F(a)-f(a)+f(a)\,a, \quad (*)$$

где $F(x)$ — некоторая первообразная $f(x)$. Приводя в (*) подобные члены, получаем

$$S(a)=f(a)(2a-1)-2F(a)+F(0)+F(1). \quad (**)$$

Дифференцируя $S(a)$ по a с учетом того, что $F'(a)=f(a)$, получаем уравнение для нахождения критических точек:

$$S'(a)=f'(a)(2a-1)+2f(a)-2f(a)=0. \quad (***)$$

Так как по условию $f(a)$ монотонна, то $f'(a)\neq 0$ на промежутке $[0;1]$, и, следовательно, уравнение (***) имеет единственный корень $a=1/2$. При $a>1/2$ $S'(a)>0$ и $S(a)$ возрастает, а при $a<1/2$ $S'(a)<0$ и $S(a)$ убывает. Следовательно, при $a=1/2$ $S(a)$ достигает своего минимального значения.

7.8*. При $a=1$ площадь принимает наибольшее, а при $a=1/2$ — наименьшее значение. Указание. Воспользоваться леммой в указании к 7.7*. **7.9*.** $a=2/3$. Указание. Использовать лемму в указании к 7.7*. **7.10*.** При $a=1/2$ площадь имеет наименьшее, а при $a=0$ — наибольшее значение. Указание. См. лемму в указании к 7.7*. **7.11*.** $a=0$. Указание. См. лемму в указании к 7.7*.

§ 8

8.1. 2π. **8.2*.** $\frac{3}{10}\pi$. Указание. Рассмотреть разность объемов тел, полученных при вращении кривых $y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$. **8.3.** $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{2a}}{2}+\frac{e^{-2a}-e^{-2b}}{2}+2(b-a)\right]$. **8.4*.** $\frac{8}{3}\pi$. Указание. Перейти к функциям $x_1(y)=1+\sqrt{1-y}$, $x_2(y)=1-\sqrt{1-y}$ и рассмотреть объем искомого тела как разность объемов двух тел, полученных вращением фигур, ограниченных кривыми $x_1(y)$ и $x_2(y)$ вокруг оси Oy. **8.5*.** $\pi^2/4$. Указание. Искомый объем будет равен объему тела, образованного вращением линий $y=\sin x$, $x=\pi/2$ вокруг оси Ox. **8.6*.** $\frac{3\pi}{2}$. Указание. См. указание к 8.5*.

§ 9

9.1. $a=18$. **9.2*.** 288. Указание. В моменты начала движения и остановки скорость тела равна нулю. **9.3.** 216 м. **9.4.** $S(t)=\begin{cases} t^2, & \text{если } 0\leqslant t<3,\\ 6t+9, & \text{если } t\geqslant 3.\end{cases}$ **9.5*.** 14/15 (Дж). Указание. $F(x)=kx^2$, где k определяется из условия задачи. **9.6*.** 33,75 (Дж). Указание. $F(x)=kx$, где k определяется из условия задачи.

ГЛАВА 11

§ 1

1.1. 32,5 км/ч. **1.2.** $\frac{17}{3}$. **1.3.** 60 км/ч. **1.4.** 8 м/с. **1.5.** 3×4 км. **1.6.** 12 км/ч, 10,5 км/ч. **1.7.** 6 ч и 2 ч. **1.8.** $\frac{S}{4t}(3-\sqrt{5})$, $\frac{S}{4t}(\sqrt{5}-1)$. **1.9.** 30 км/ч. **1.10.** 20 км/ч, 60 км/ч. **1.11.** 56 км. **1.12.** $V_р=1$ км/ч. **1.13.** $\frac{3S-v+\sqrt{9S^2+2Sv+v^2}}{2}$ км/ч. **1.14.** 14 ч. **1.15.** 60 км/ч. **1.16.** 48 км/ч. **1.17*.** 50 км и 150 км. Указание. Ввести неизвестные $\omega_1=1/V_1$ и $\omega_2=1/V_2$; где V_1 и V_2 — скорости мотоциклиста и велосипедиста соответственно. **1.18.** 100 км/ч. **1.19.** 100 км/ч. **1.20.** $9+\sqrt{11}$ км/ч. **1.21.** Скорость пароходов — 15 км/ч, скорость течения — 3 км/ч. **1.22.** 6 км/ч, 21 км/ч, 45 км. **1.23.** 63 км/ч. **1.24.** Скорость велосипедиста — 20 км/ч, скорость автомобиля — 80 км/ч. **1.25.** Скорость пешехода, велосипедиста и верхового — 6 км/ч, 9 км/ч, 12 км/ч соответственно. Расстояние — 42 км. **1.26.** 30 км/ч, 20 км/ч, 30 км. **1.27.** 480 км. **1.28.** 2 мин. **1.29.** 15 км. **1.30.** 3 км/ч, 45 км/ч. **1.31.** 3 км/ч, 45 км/ч. **1.32.** 6 км/ч. **1.33.** $\frac{3}{3u+v}$. **1.34*.** 50 км/ч. Указание. Учесть, что скорость встречного поезда относительно наблюдателя, находящегося в одном из них, равна сумме скоростей поездов относительно неподвижного наблюдателя. **1.35.** 108 км/ч. **1.36.** 28 км, 20 км/ч. **1.37.** 11 ч 55 мин. **1.38.** 7 км/ч. **1.39.** Пассажирский — 21 ч, товарный — 28 ч. **1.40.** 15 ч и 12 ч. **1.41.** 6 ч и 4 ч. **1.42.** Скорость первого автомобиля в 9/8 раза больше, чем скорость второго. **1.43.** 16 ч. **1.44.** Скорость мотоциклиста в 4 раза больше скорости велосипедиста. **1.45.** 20/3 ч и 10/3 ч. **1.46.** Через 4 ч. **1.47.** 1 : 2, 1 : 3. **1.48.** Не успеют. **1.49.** Длина окружности переднего колеса — 2 м, заднего — 3 м. **1.50.** 90 км/ч, 75 км/ч, 60 км/ч. **1.51.** 117 км, 24 км/ч, 22,5 км/ч. **1.52.** $\frac{13}{4}t$, $\frac{11}{5}t$. **1.53.** $4 \leqslant v \leqslant \frac{8+\sqrt{61}}{3}$. **1.54.** Со скоростью, большей чем $\frac{S+vt+\sqrt{(S-vt)^2+4tvl}}{2t}$. **1.55.** Хватит. **1.56.** $2 \leqslant v < 6$. **1.57.** $5 < v < 10$. **1.58.** Деревня от шоссе дальше, чем школа от реки. **1.59.** 4 с и 6 с. **1.60.** 1/80, 1/90. **1.61.** 4 и 6. **1.62.** $\frac{\pi R}{T}\left(\sqrt{1+\frac{4T}{t}} \pm 1\right)$. **1.63.** $\frac{-a+\sqrt{a^2+240at}}{120t} \cdot S$. **1.64*.** $1\frac{1}{11}$ часа ночи. Указание. Использовать то, что $\omega_м/\omega_ч = 12$, где $\omega_м$, $\omega_ч$ — угловые скорости движения минутной и часовой стрелок соответственно. **1.65.** На полминуты. **1.66.** ≈ 11 м. **1.67.** 9 км/ч. **1.68.** 3 мин. **1.69.** 1/4 ч. **1.70.** 21 км. **1.71.** Через 7 с после начала падения первого тела. **1.72.** 16 с. **1.73.** 60°. **1.74.** 10 с. **1.75.** $V_0 = 20$ м/с. **1.76.** Через 5 с за 0,5 м до линии поля. **1.77.** 20 м. **1.78.** 20 км/ч. **1.79.** Второй автомобиль остановился раньше, $a_2 = -8$ м/с². **1.80.** 2 с. **1.81*.** $a_1 : a_2 = 7/9$. Указание. Учесть, что времена ускорений обоих поездов различны. **1.82*.** $S_1 = \frac{2}{5}S$, $S_2 = \frac{1}{2}S$. Указание. См. указание к 1.81*. **1.83.** Первый быстрее, так как $\frac{2S}{a+b} < \frac{S}{2}\frac{a+b}{ab}$.

§ 2

2.1. 24 м³/день. **2.2.** 45 ч. **2.3.** 132 мин; 110 мин. **2.4.** 6 мин и 10 мин. **2.5.** 6 мин, 8 мин, 12 мин. **2.6.** $T+\sqrt{T(T-t)}$, $T-t+\sqrt{T(T-t)}$, $\sqrt{T(T-t)}$ $(T > t)$. **2.7.** $t_1 = 3$ ч, $t_2 = 6$ ч, $t_3 = 2$ ч. **2.8.** 400 деталей. **2.9.** За 14 дней. **2.10.** За 10 дней. **2.11.** Трактор марки A — 12 га, марки B — 16 га. **2.12*.** В 4 раза. Указание. Условие в виде неравенства используется для выбора единственного из двух найденных значений искомого неизвестного. **2.13.** 50 ч. **2.14.** 9 дней. **2.15.** 10 ч и 8 ч. **2.16.** 9 км в месяц. **2.17.** $6\frac{2}{3}$ ч и $5\frac{1}{3}$ ч. **2.18.** 5/2 м³. **2.19.** 3 м³/ч. **2.20.** 60 %. **2.21.** За 14 и 11 дней. **2.22.** 4 ч и 6 ч. **2.23.** Первому — по 20 стр. в день, второму — по 35. **2.24.** 12 ч. **2.25.** $c = 9\frac{11}{16}$. **2.26.** 600 м³. **2.27*.** 20 м³. Указание. Проверить полученные решения подстановкой во все уравнения системы. **2.28*.** За 40 ч. Указание. Использовать формулу суммы арифметической прогрессии. **2.29*.** (5/4) V. Указание. См. указание к 2.28*. **2.30.** Пусть T_i $(i = 1, 2, 3)$ — время опорожнения i-м насосом своего резервуара. Тогда $T_1 > T_3 > T_2$, причем $T_1 : T_3 : T_2 = (1+\sqrt{\alpha}) : 1 : [\alpha(1+\sqrt{\alpha})]$, если $\alpha < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $T_1 : T_3 : T_2 = \frac{1-\alpha}{\alpha} : 1 : \frac{\alpha}{1-\alpha}$, если $\frac{3-\sqrt{5}}{2} \leqslant \alpha < \frac{1}{2}$. **2.31*.** $t\,\frac{n-1}{n}$. Указание. Используя условие задачи, предварительно показать, что все трубы начали работать до того, как бассейн был наполнен наполовину. **2.32.** $\frac{17}{40}$.

§ 3

3.1. Приблизительно через 23 года **3.2.** Приблизительно через 55 лет. **3.3.** 12 к.; 80 к. **3.4.** 5 %. **3.5.** 10 %. **3.6.** 10 %. **3.7.** 200 р. Срочный. **3.8.** 42,3 %. **3.9.** 726. **3.10.** 50 %. **3.11.** Через количество лет, большее чем $\lg\left(\frac{3Np-100M}{Np-100M}\right)\Big/\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)$. **3.12.** Более чем через $\lg\left(\frac{2Np-100n}{Np-100n}\right)\Big/\lg\left(1+\frac{p}{100}\right)$ ч.

§ 4

4.1. В альбоме 12 листов. **4.2.** «Троек» — 2, «четверок» — 7. **4.3.** Пятиэтажных — 9, девятиэтажных — 8. **4.4.** «Москвичей» — 10, «Волг» — 19. **4.5.** 33. **4.6*.** 25 второго типа и 4 — третьего. Указание. Предварительно оценить стоимость перевозки одной детали в ящике каждого типа. **4.7*.** Первый — 3 дня, второй — 2 дня. Указание. Оценить, какое количество дней мог работать каждый экскаватор. **4.8.** 45,20. **4.9.** 13 мин. **4.10.** 19 плотов. **4.11.** 15 или 95. **4.12.** 48. **4.13.** 32. **4.14*.** 5. Указание. Приписывание к числу справа некоторой цифры означает переход к новому числу, в котором число единиц равно приписываемой цифре, а число десятков — исходному числу. **4.15.** 6464. **4.16*.** 285 714. Указание. См. указание к 4.14*. **4.17.** 32. **4.18*.** 54. Указание. Для получения суммы всех четных двузначных чисел использовать формулу суммы членов арифметической прогрессии с разностью $d = 2$ и $a_1 = 10$. **4.20.** 21 и 10. **4.21.** 31 и 41. **4.22*.** $A = 42$, $B = 35$. Указание. Использовать формулу $n = m \cdot p + k$, где n — делимое, m — делитель, p — частное, k — остаток. **4.23*.** $N = 37$. Указание. См. указание к 4.22*. **4.24*.** $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{17}$, $\frac{5}{26}$. Указание. Задача сводится к решению системы квадратных неравенств в множестве натуральных чисел. **4.25.** 4 рубля.

§ 5

5.1. 1,5 кг. **5.2.** $\frac{4}{5}r - 24$; $32 - \frac{4}{5}r$; $\frac{125}{4} \leqslant r \leqslant \frac{135}{4}$. **5.3.** 7 кг. **5.4.** 60 кг. **5.5.** $\frac{2n - m + \sqrt{m^2 + 4n^2}}{2}$; $\frac{2n + m + \sqrt{m^2 + 4n^2}}{2}$.

5.6*. $\frac{mn}{m+n}$. Указание. В качестве неизвестных ввести x — вес отрезанного куска; c_1 и c_2 — концентрации меди в первом и втором кусках соответственно. **5.7.** 5 % и 11 %. **5.8*.** В объеме 4 см^3. Указание. Воспользоваться формулой $m = \rho V$, связывающей массу, плотность и объем. **5.9.** 12 %; 24 %; 48 %. **5.10*.** 29 %. Указание. В качестве неизвестных ввести концентрации c_1, c_2, c_3, c_4. Условие задачи дает систему трех уравнений для четырех неизвестных c_1, c_2, c_3 и c_4. При исследовании системы необходимо учесть, что ищется комбинация неизвестных $\frac{2c_2 + c_4}{3}$. **5.11.** В 13/4 раза. **5.12.** 5 г и 20 г. **5.13.** 14 кг; 7 кг; 16 кг. **5.14.** Первая труба подает жидкость в два раза быстрее второй. **5.15.** 50 %. **5.16.** 12,5 г. **5.17.** 170 кг. **5.18.** 40 %; $43\frac{1}{3}$ %. **5.19.** 2 л. **5.20.** 10 л и 90 л. **5.21.** 10 л. 5.22. 1/6. 5.23. Если $p = q$, то любое число промывок сохраняет процент содержания золота; задача в этом случае имеет решение, если $r \leqslant k$, причем число промывок произвольно. Если $q < p$, то число промывок n определяется неравенством $n \geqslant \lg \frac{r(100-k)}{k(100-r)} \Big/ \lg \frac{100-q}{100-p}$. Если же $p < q$, то $n \leqslant \lg \frac{r(100-k)}{k(100-r)} \Big/ \lg \frac{100-q}{100-p}$.

§ 6

6.1. 28 г. 6.2. 60 дет. 6.3. 28 р. **6.4.** За 1 час. **6.5.** 6400 л и 600 л. **6.6.** 1,25 кг и 0,75 кг.

ГЛАВА 12

§ 1

1.1. 20 см. **1.2.** $\frac{2bc\cos(\alpha/2)}{b+c}$. **1.3.** 75. **1.4.** $m(m\cos\beta \pm \pm\sqrt{c^2 - m^2\sin^2\beta})\sin\beta$. **1.5.** Нет. **1.6.** $\frac{a^2}{8}\sin 2\alpha$. **1.7.** $\frac{c}{2}\operatorname{tg}\alpha\,(r\cos\alpha - c)$. **1.8.** $\frac{1}{2}cr\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$. **1.9.** $-2S\cos^2\alpha\cos 2\alpha$. **1.10.** 288 см^2. **1.11.** $\sqrt{3} - 1$. **1.12.** $\frac{a^2\sin\alpha\,|\cos 2\alpha|}{4\cos\alpha\,(1 + 2\cos\alpha)}$. **1.13.** 4. **1.14.** $\frac{b^2\sin\alpha\,(5\sin\beta + 3\cos\beta\operatorname{tg}\alpha)}{16\sin(\alpha+\beta)}$.

1.15. $\frac{1}{2}$. **1.16.** $\frac{c^2}{2}\frac{\cos^2\beta\sin 2\alpha}{\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}$. **1.17*.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$. Указание. Убедиться в том, что треугольник прямоугольный. **1.18.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$. **1.19.** $\frac{9}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \frac{7}{2}$. **1.20.** $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}\right)$. **1.21.** $\sqrt{3}$. **1.22.** $4\sqrt{3}$. **1.23.** 75. **1.24.** $\frac{2}{5}l^2$. **1.25.** $MF = \frac{a\sqrt{17}}{12}$. **1.26.** 3, 5, 7. **1.27.** $1 + \sqrt{2}$. **1.28.** $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\pi}{4} \mp \arccos\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}$. **1.29.** $BC = \sqrt{b(b+c)}$. **1.30.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. **1.31.** $\frac{2}{3}$ см^2. **1.32.** $\frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{5}}$. **1.33.** $\frac{NC}{AC} = \frac{3}{4}$. **1.34.** $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{9}$ или $= 9$. **1.35.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. **1.36.** $4(1 - \alpha)$. **1.37.** $\frac{23}{90}$. **1.38.** $\frac{25}{16}$. **1.39.** $\frac{1}{12}$. **1.40.** $\frac{\pi}{6}$. **1.41.** $\frac{\beta(1 + 2\alpha + \alpha\beta)}{(1+\alpha)(1+\beta)(1+\alpha+\alpha\beta)}$. **1.42.** $\frac{S_1S_3(S_2+S_1)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1S_3)}$. **1.43.** 3 : 2. **1.44.** 3 или 1/3. **1.46.** 6 : 5. **1.47.** $\widehat{A} = \frac{\pi}{2}$, $B = \arcsin(4/5)$, $\widehat{C} = \arcsin(3/5)$.

§ 2

2.1. 1. $s = 16\sqrt{3}$, $l = 8$. **2.2.** 256 см^3. **2.3.** $\sqrt{3}$ м. **2.4.** 2 см. **2.5.** 6 м. **2.6.** 9,6 см^2. **2.7.** $\frac{a^2}{2}\sin 2\alpha$. **2.8.** $\frac{4}{(\sqrt{3}+1)^2}$. **2.9.** $\frac{\sqrt{10}}{2}$. **2.10.** $\frac{1}{2}\sqrt{ab + \frac{(a-b)^2}{4\cos^2\alpha}}$. **2.11.** l. **2.12.** Сторону CD. **2.13.** $\frac{12}{5}$. **2.14.** $1 + \frac{(1 + 3\operatorname{tg}\alpha)^2}{2\operatorname{tg}\alpha} - \frac{7}{8}\sqrt{a^2 - 16}$. **2.15.** $\frac{1}{2}(a-b)^2\sin\alpha$. **2.16.** $4h^2\operatorname{ctg}\alpha - 2h\sqrt{a^2 - 4h^2}$. **2.17.** $\frac{7}{8}$. **2.18.** 2. **2.19.** $AB = BC = 2$, $AD = \sqrt{3}$, $DC = 1$, $S = \frac{3}{2}\sqrt{3}$. **2.20.** $\frac{4}{5}$. **2.21.** $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ см^2. **2.22.** $2\sqrt{2}$ см. **2.23.** $MK = \frac{a\sqrt{13}}{6}$. **2.24.** $\frac{AM}{MD} = \frac{2}{3}$. **2.25.** $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{2}$. **2.26.** $\frac{3}{2}S$. **2.27.** $S = \frac{a+b}{4}\sqrt{(a+b)(3b-a)}$. **2.28.** $\frac{4}{5}S$. **2.29.** $\sqrt{35}$. **2.30.** $\frac{5}{12}$. **2.31.** $\frac{11}{12}$. **2.32.** $\frac{37}{72}$. **2.33.** 1. **2.34.** $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}}$. **2.35.** $KM = 2\sqrt{Q}\sqrt[4]{3}$, $LN = 4\sqrt{\frac{Q}{\sqrt{3}}}$.

§ 3

3.1. $\frac{9\sqrt{7}}{16}$. 3.2. $2\sqrt{Rr}$. 3.3. 8. 3.4. $\frac{a^2}{3}(3+\pi-3\sqrt{3})$. 3.5. $1-\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi$. 3.6. $\frac{150}{7}$ см². 3.7. $\frac{5}{6}R^2(2\sqrt{3}+5\pi)$. 3.8. $\frac{1}{2}R^2\operatorname{ctg}\alpha-\frac{1}{2}R^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. 3.9. 8. 3.10. 7. 3.11. $S=\frac{\pi(4R^2-l^2)^2}{64R^2}$. 3.12. $r=\frac{d^2-(R_1-R_2)^2}{4(\sqrt{R_1}+\sqrt{R_2})^2}$. 3.13. 8 см. 3.14. $\frac{a\sqrt{3}+r-\sqrt{4r^2+2ar\sqrt{3}}}{3}$. 3.15. $\frac{2}{3}(3-\sqrt{5})$. 3.16. $\left(\frac{3}{5}h,\ \frac{12}{5}h\right)$. 3.17. $3\sqrt{13}$. 3.18. $\frac{8}{5}$ см². 3.19. $\frac{32}{\pi m^4}(\arccos m-m\sqrt{1-m^2})$. 3.20. $\frac{2\sin^2\alpha}{\alpha(1+\sin 2\alpha+\sin^2\alpha)}$. 3.21. Площадь квадрата больше площади круга. 3.22. $AB=\frac{6}{\sqrt{5}}$.

§ 4

4.1. $\frac{\pi c}{1+\sqrt{2}}$. 4.2. $\frac{b\,|\cos(3\alpha/2)|}{2\sin\alpha\cos(\alpha/2)}$. 4.3. $r=\frac{R\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}$. 4.4. $\frac{abc}{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}$. 4.5. $\frac{a^2(3\sqrt{3}-\pi)}{24}$. 4.6. $\frac{b+c-2\sqrt{bc}\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}$. 4.7. $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ (или $2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$). 4.8. $\frac{5\sqrt{13}}{12}$. 4.9. $2R^2\frac{\sin^3(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}$. 4.10. $\sqrt{15+6\sqrt{3}}$. 4.11. $R=c\frac{\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)}{\cos(\alpha/2+\beta/2)}$. 4.12. $S=\frac{1}{2}\frac{R^2(a+R)^3}{(a-R)(a^2+R^2)}$. 4.13. $\frac{5\pi-6\sqrt{3}}{72}a^2$. 4.14. $\frac{a}{2}\cdot\frac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 4.15. $a\sqrt{\frac{13-4\sqrt{7}}{2}}$. 4.17. $S=\frac{7-4\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)$. 4.18. $\frac{ab\sin\alpha}{a+b}\ \frac{1-\sin\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}$. 4.19. $R=2$. 4.20. $\frac{11}{10}$. 4.21. $r_1=\frac{\sqrt{6}}{6}(14-\sqrt{70})$, $r_2=\frac{\sqrt{6}}{8}(21-\sqrt{105})$. 4.22. $\frac{R\sqrt{3}(\sqrt{7}+5)}{\sqrt{7}}$. 4.23. 4 : 3. 4.24. $150+\frac{250}{\sqrt{3}}$. 4.25. $\frac{3\sqrt{15}}{2}$. 4.26. $\frac{5/4-\cos\beta}{2\sin\beta}\times\frac{b\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$. 4.27. $\frac{\sqrt{7}}{4}$. 4.28. $\frac{125}{4}(3+\sqrt{3})$. 4.29. $\frac{50}{3}(6-\sqrt{3})$.

4.30. $128(3+2\sqrt{2}):49$. 4.31. $\sqrt{\frac{2}{4-\pi}}$. 4.32. $AC=\sqrt{10}$; $AB=3\sqrt{2}$. 4.33. $\frac{4R^2\sin\alpha\cos^4\alpha}{\cos 3\alpha}$. 4.34. $\frac{a^2\sqrt{3}}{26}$. 4.35. 22. 4.36. $S=\frac{1}{2}l(l-n)\sin\beta\left(1+\frac{l}{2n}\sin\beta\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$. 4.37. $\frac{3\sqrt{3}}{5\pi-3}$. 4.38. $R_1=\frac{\sin C}{\sin(B+C)}\,\frac{3-2\sqrt{2}\cos B}{4\sin B}$, $R_2=\frac{\sin C}{\sin(B+C)}\times\frac{3+2\sqrt{2}\cos B}{4\sin B}$. 4.39. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin 2\alpha$. 4.40. $\frac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}$. Отношение будет наименьшим при $\alpha=45^\circ$. 4.41. $\frac{\sin(\alpha/2)\sin 2\alpha}{\sin(3\alpha/4)\sin(7\alpha/4)}$. 4.42. $\operatorname{arctg}\frac{1}{\cos\alpha}$. 4.43. $\frac{AE}{DE}=\frac{\cos^2((\beta-\gamma)/2)}{\cos^2((\beta+\gamma)/2)}$, где $\gamma=\widehat{ACB}$, $\beta=\widehat{ABC}$. 4.44. $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$. 4.45. 25π. 4.46. 5 см. 4.47. $\arccos\frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{3}{5}$ или $\arccos\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{4}{5}$. 4.48. 14 см. 4.49. 3, 4, 5. 4.50. $\frac{1}{2}$ дм. 4.51. $\sqrt{91}$ см. 4.52*. $2\sqrt{5}$. Указание. Ввести в качестве неизвестного острый угол треугольника α и составить уравнение для нахождения α с помощью теоремы о касательной и секущей. 4.53. 240 см². 4.54. $\frac{\pi}{18}$, $\frac{7\pi}{18}$. 4.55. $\frac{\pi}{12}$, $\frac{7\pi}{12}$. 4.56. $\frac{\pi}{6}$. 4.57. $\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\frac{\pi}{4}+\arccos\left(\frac{4}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 4.58. $\frac{2}{3}$. 4.59. $\frac{S_\Delta}{S_0}=\frac{3\sqrt{3}(\sqrt{13}-1)}{32\pi}$. 4.60. $\frac{m\sqrt{k^2+2k\cos A+1}}{2(k+1)\cos(A/2)}$. 4.61. $\arccos\sqrt{2(1-S)}$. 4.62. $\frac{3\pm 2\sqrt{2}\sin(\alpha/2)}{2\cos^2(\alpha/2)}a$. 4.63. $R=\sqrt{2}$ см. 4.64*. $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Указание. Ввести в качестве неизвестного расстояние от точки D до точки касания окружности с прямой AC. 4.65. Треугольник разносторонний, длина стороны — 8. 4.66. $AB=10$, $BC=6$, $AC=12$.

§ 5

5.1. $h^2\sqrt{3}$. 5.2. $R=\frac{a}{2|\cos\beta|}$. 5.3. $\frac{9\sqrt{3}r^2}{4}$. 5.4. $r\sqrt{7}$. 5.5. $\frac{75}{2}$. 5.6. 2. 5.7. $O_1O_2=\frac{3}{5}$. 5.8. 12,5 см. 5.9. $\frac{2\pi}{3}$. 5.10. $2(\sqrt{6}-$

$-\sqrt{2})$. 5.11. $\frac{103\sqrt{17}}{130}$. 5.12. $\frac{4+3\sqrt{3}}{4}$. 5.13. $\left(\frac{2r}{\sin\gamma}-m\right)\times$ $\times\left(r-\frac{r^2}{m}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$. 5.14. $\frac{S_{\text{тр}}}{S_{\text{кр}}}=-\frac{4\sin^3\alpha\cos\alpha}{\pi}$. 5.15. $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$. 5.16. $2\pi^{-1}(\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cosec}\beta)$. 5.17. $\frac{9}{2}r^2$. 5.18. 3 см, 8 см. 5.19. $\frac{4R^3}{S}$. 5.20. 8. 5.21. $12\sqrt{15}$. 5.22. 14,4. 5.23. 3. 5.24. 10 : 11. 5.25. Трапеция равнобедренная; 75° и 105°. 5.26. 210. 5.27. $\frac{9}{16}$.

5.28. $\left.\begin{matrix}MN\\ ND\end{matrix}\right\}=a+l\sin^2\frac{\alpha}{2}\pm\sqrt{a^2+2al\sin^2\frac{\alpha}{2}-l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

5.29. $\frac{7}{\sqrt{85}}$, $\frac{34}{5}$. 5.30. $AC=\frac{2}{\sqrt{3}}$. 5.31. $\frac{5}{\pi}$.

ГЛАВА 13

§ 1

1.1. $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. 1.2. $3d^3\sqrt{3}$. 1.3. $2a^3\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$. 1.4. $\frac{b^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$. 1.5. $\varphi=\arccos(\sin\alpha\sin\beta)$. 1.6. 576 см². 1.7. $\sqrt{2}d^2\sin 2\varphi\cos(45°-\alpha)$. 1.8. $a^2b\sin\alpha\sin\beta$. 1.10. $\frac{\sqrt{3}}{12}l^3\cos^2\alpha\sin\alpha$. 1.11. $\frac{6\sqrt{3}\sin(\alpha+30°)r^2}{\cos\alpha}$. 1.12. $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $V=\frac{a^3}{6}$. 1.13. $\frac{a\sqrt{4b^2-a^2}}{2(a+2b)}\operatorname{tg}\alpha$. 1.14. $\frac{\sqrt{3}}{4}H^3\left(3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-1\right)$. 1.15. $V=$ $=\frac{a^3\cos^2(\alpha/2)\operatorname{ctg}(\alpha/2)}{3(3-4\sin^2(\alpha/2))}$. 1.16. $a\sqrt{3-\operatorname{ctg}^2\varphi}$. 1.17. $\frac{c^2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos\beta}$.

1.18. $V=\frac{1}{12}\sqrt{\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$.

1.19. $\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}$. 1.20. $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1+3\cos^2\alpha}}{2}$. 1.21. $\pi-2\arcsin\frac{1}{2\sin(\alpha/2)}$. 1.22. $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}\operatorname{tg}\alpha$. 1.23. $a\sqrt{\sqrt{2}-1}$.

1.24. $\frac{2}{3}$. 1.25. $\frac{1}{12\sqrt{2}}\sqrt{(a^2+b^2-c^2)(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)}$.

1.26. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3\sqrt{\frac{\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}{1-\operatorname{ctg}^2(\alpha/2)}}$. 1.27. $-\frac{2}{3}l^3\frac{\cos(\beta/2)\cos\beta}{\sin^3(\beta/2)}$. 1.28. $\frac{d^2\operatorname{tg}(\alpha/2)}{2\cos\beta}$. 1.29. $V=\frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2(\alpha/2)}{\cos\alpha}$. 1.30. $Q=\frac{\sqrt{3V}}{H}\times$

$\times\sqrt{4H^3+3V}$. 1.31. $2\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right)$. 1.32. $\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{2}}$. 1.33. $\frac{l^3\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{3[1/\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta]^{3/2}}$. 1.34. $6\sqrt{2}-\sqrt{6}+4$. 1.35. $V=$ $=\frac{d^2\sqrt{3l^2-d^2}}{6}$, $S_{\text{бок}}=\sqrt{12l^2-d^2}\,\frac{d}{2}$. 1.36. $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}$. 1.37. $2\arccos\frac{\sqrt{3}}{2\sin(\varphi/2)}$. 1.38. $\frac{a^3(5+\sqrt{5})}{24}$. 1.39. $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha\cos\frac{\pi}{n}\right)$. 1.40. $\theta=2\arcsin\left(\frac{\cos(\pi/n)}{\cos(\alpha/2)}\right)$. 1.41. $\frac{(a^3-b^3)\sqrt{3}}{6}$.

§ 2

2.1. $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. 2.2. $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}$. 2.3. $\sqrt{6}$. 2.4. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 2.5. P совпадает с точкой C. 2.6. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 2.7. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1121}{170}}$. 2.8. $\sqrt{\frac{5}{2}}$. 2.9. $\frac{144\sqrt{3}}{5}$. 2.10. $\frac{H^2\sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha}$. 2.11. $\frac{(a^2-b^2)(a-b)}{8}\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 2.12. $\operatorname{arcctg}(\cos\alpha)$. 2.13. $\frac{S\sqrt{S}\sqrt[4]{6}}{2}$. 2.14. $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)$. 2.15. $\frac{a^3\sqrt{2\cos\alpha}}{2\sin(\alpha/2)}$. 2.16. $\frac{c^3}{32}$. 2.17. $\frac{4}{\sqrt{3}}$ м². 2.18. $\frac{a^2\sin 2\alpha}{2\cos\varphi}$. 2.19. $S\sin\varphi\sqrt{S\sqrt{3}\cos\varphi}$. 2.20. $\frac{b}{8}\sqrt{15b^2+4l^2}$. 2.21. 3. 2.22. $\frac{a^2\operatorname{tg}\alpha}{8\sin\beta\operatorname{tg}\beta}$. 2.23. $\frac{(3m+2n)a^3\operatorname{tg}\alpha}{8n}:\frac{a^3\operatorname{tg}\alpha}{8}$, $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{4\cos\alpha}$. 2.24. $\frac{3\sqrt{3}}{8}$. 2.25. $\frac{1}{2}(c+h)\cdot S$. 2.26. 7 : 17. 2.27. $\frac{7}{16}\times$ $\times\sqrt{(a^2+b^2)c^2+4a^2b^2}$. 2.28. $\varphi=\arcsin\frac{1}{3}$. 2.29. $S=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}\times$ $\times\cos\alpha\sqrt{4+21\cos^2\alpha}$.

$$2.30.\ \frac{a^2\sqrt{3\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}+1}}{4\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{4\sin^2\frac{\alpha}{2}-1}\right)}.$$

2.31. $S=$ $=a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$. 2.32. $\frac{2}{9}ab$. 2.33. $\frac{\sqrt{3}}{2(4\operatorname{tg}^2\alpha+1)\cos\alpha}l^2$. 2.34. $\frac{2\sqrt{11}}{49}a^2$. 2.35. $2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sqrt{-2\cos 2\alpha}$. 2.36. $S=4\sqrt{3}$ m^2.

2.37. $\frac{a^3}{128}$. **2.38.** $\frac{3\sqrt{2}}{4}a^2$. **2.39.** $\sqrt{3}\,\frac{\sqrt[3]{v^2 \operatorname{ctg}^2\alpha}}{\cos\alpha}$. **2.40.** $\frac{4ab}{9}\sin\frac{\alpha}{2}$.

2.41. 3 : 4. **2.42.** $\frac{1}{6}$. **2.43.** $\frac{6\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{\alpha}{2}+\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)^3}$. **2.44.** $\frac{69}{100}$.

2.45. На расстоянии от точки S, не большем чем $\frac{2}{3}SD$. **2.46.** 8 : 37.

2.47. $\frac{5\sqrt{2}\,ab}{16}$. **2.48.** $\frac{1}{2}l^2\cos\alpha$. **2.49.** $32\sqrt{3}$.

2.50. $a^2\left(1+2\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)$. **2.51.** $\frac{3}{5}$. **2.52.** 1 : 1. **2.53.** $\frac{25}{16}S$.

§ 3

3.1. $\frac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. **3.2.** πs_2, $\frac{s_2\sqrt{\pi s_1}}{2}$. **3.3.** $\frac{\pi r^3\sqrt{15}}{3}$.

3.4. $\frac{\pi S\sqrt{15}}{3}$. **3.5.** $\frac{Sr}{3}$. **3.6.** $\frac{\pi S\sqrt[4]{S}}{3\sqrt{3}}$. **3.7.** $\frac{2}{3}\cdot\frac{\pi^2 r^3}{\pi^2-1}$. **3.8.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

3.9. $\frac{2\pi-3\sqrt{3}}{10\pi+3\sqrt{3}}$. **3.10.** $\frac{2\pi}{3}h^3$. **3.11.** $\frac{\sin\alpha}{4\pi\cos\beta\cos^2\frac{\beta}{2}}$.

3.12. $\frac{l^2\cos\beta}{\cos^2\alpha}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}$.

3.13. $\frac{\pi\sqrt{b^2-a^2}\,(b^2\operatorname{ctg}^2\alpha-a^2\operatorname{ctg}^2\beta)}{24(\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta)^{3/2}}$. **3.14.** $\frac{1}{4}(2S_1+2S_2+\pi d^2)$.

3.15. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}R$; $\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}R$. **3.16.** $r\left(1+2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\pm\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\times\right.$
$\left.\times\sqrt{3+4\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}\right)$. **3.17.** $r\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$. **3.18.** 4. **3.19.** $r_1=\frac{c\sin\beta}{2\sin\alpha}$;
$r_2=\frac{c\sin\alpha}{2\sin\beta}$; $r_3=\frac{c\sin\alpha\sin\beta}{2\sin^2(\alpha+\beta)}$. **3.20.** $\frac{\rho^2-(R-r)^2}{4(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2}$.

§ 4

4.1. $\frac{\sqrt{H^2+2a^2}}{2}$. **4.2.** 5 : 1. **4.3.** $12R^2\sqrt{3}$. **4.4.** $\frac{2+\sqrt{3}}{4}$.

4.5. $\frac{1}{4}a(\sqrt{3}-1)^2$. **4.6.** $\frac{2}{3}R^3\sqrt{\frac{2}{3}}$. **4.7.** $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$; $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

4.8. $\frac{1}{8}a\sqrt{41}$. **4.9.** $\frac{8}{27}R^3\sqrt{3}$. **4.10.** $R=4$ см. **4.11.** $R=\frac{a}{2\sqrt{3}}\times$

$$\times\sqrt{\frac{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}}=\frac{a}{2\sqrt{3}}\sqrt{\frac{\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

4.12. $\frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$. **4.13.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **4.14.** $\frac{a\sqrt{6}}{8}$.

4.15. $\frac{a\sqrt{3}}{3}\left(\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\alpha+1}-2\operatorname{ctg}\alpha\right)$. **4.16.** $\frac{2\pi\sin^2\alpha}{3\sqrt{3}\,(3+\cos^2\alpha)}$.

4.17. $b\left(1+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$, $b\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. **4.18.** $\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

4.19. $\frac{a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$. **4.20.** $\frac{4}{9}\pi\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}}{\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$. **4.21.** $\frac{a(\sqrt{3}-1)}{4\sqrt{2}}$.

4.22. $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$, $\varphi_2=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$. **4.23.** $\frac{3\sqrt{3}\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha}{2\pi}$.

4.24. $\frac{4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha}{3\sqrt{3}\,(1+\cos\alpha)^3}$. **4.25.** $\frac{4R\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4+\operatorname{tg}^2\alpha}$. **4.26.** $\frac{a}{2(1+\sqrt{6})}$.

4.27. $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$. **4.28.** 4. **4.29.** $\frac{\sqrt{219}\,b^2}{36}$. **4.30.** $\frac{1}{2}a^2\times$
$\times(4b^2-a^2)^{1/2}(4a^2b^2-a^4-b^4)^{-1/2}$. **4.31.** $\frac{b\cos\alpha\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)+1}$.

4.32. $\frac{Hr}{r+\sqrt{r^2+4H^2}}$. **4.33.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.34.** $\frac{a}{8}$. **4.35.** $S=3\sqrt{15}\times$
$\times(\sqrt{5}+1)^2$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{\frac{2}{5}}$. **4.36.** $\frac{a}{6}$. **4.37.** $\frac{2\pi a^2}{\sin^2 2a}$.

4.38. $4R^2\sin 2\alpha$. **4.39.** $4R^2\cos\alpha\left(\sin\alpha+\sqrt{-\cos 2\alpha}\right)$. **4.40.** $\frac{\sqrt{21}}{6}a$.

4.41. $\frac{1}{6}rR\left(R\pm\sqrt{R^2-r^2}\right)$. **4.42.** $\frac{4}{3}R^3\frac{(1+\cos\varphi)^3}{\cos\varphi\sin^2\varphi\sin\alpha}$. **4.43.** $S=$
$=2\sqrt{2}\,R^2\cos\alpha\left(\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\alpha}\right)$. **4.44.** $\frac{Q}{4}\sec^4\frac{\alpha}{2}$.

4.45. $\frac{a\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{1+\cos^2\alpha}+\cos\alpha}$. **4.46.** $\frac{ab}{\sqrt{2a^2-b^2}}$. **4.47.** $\frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4}a^2$.

4.48. $\frac{c}{\sqrt{2(\cos(\alpha/2)+\cos(\beta/2))}}$. **4.49.** $\frac{a\sqrt{3}}{4(1+\sqrt{7})}$. **4.50.** $V=$
$=4(\sqrt{10}+1)^3$, $\alpha=2\arcsin\sqrt{\frac{11}{20}}$. **4.51.** $\frac{a^3(2b-a)}{3\sqrt{2}\sqrt{2b^2-a^2}}$.

4.52. $\frac{21R^3}{16}$. **4.53.** $S=\frac{8\sqrt{3}\,R^2}{\sin^2\alpha}$; $V=\frac{4\sqrt{3}}{3}R^3\,\frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. **4.54.** $\frac{32\sqrt{21}}{147}$. **4.55.** $\frac{\left(6\sin^2\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{2}n\sin\frac{2\pi}{n}\right)^3}{\pi n^2\sin^2\frac{2\pi}{n}}$. **4.56.** $\frac{4}{3}\pi l^3\times\frac{\sin^3\alpha\cos^3\alpha}{(1+\cos\alpha)^3}$. **4.57.** $V=\frac{2}{3}\pi R^3\frac{4-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, $S=\frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}$. **4.58.** $\pi-4\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{2}$. **4.59.** $\frac{\pi r^3\,\mathrm{ctg}^3(\pi/4-\alpha/2)}{3\cos^2\alpha\sin\alpha}$. **4.60.** $S\sin\alpha\sin 2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **4.62.** $4\,\mathrm{tg}^3\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$. **4.63.** 2. **4.64.** $\frac{27}{16\sin^2\alpha}$. **4.65.** $\arcsin\sqrt{\frac{s}{S}}$. **4.66.** $\frac{R}{2}\sqrt[3]{3\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{cosec}^2\frac{\alpha}{4}}$. **4.67.** $\frac{5}{\sqrt{3}}r$. **4.68.** $\frac{r(3+2\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$. **4.69.** $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **4.70.** $\frac{\pi r^2\left(r+\sqrt{r^2+(d-r)^2}\right)^3}{3(d-r)^2}$. **4.71.** $\sqrt{\frac{R}{r}}\times(\sqrt{R+r}-\sqrt{R})^2$. **4.72.** $\frac{R(h_1+h_2)}{\sqrt{R^2+h_1^2}+\sqrt{R^2+h_2^2}}\,\frac{\sqrt{R^2+h_1^2}-R}{\sqrt{R^2+h_1^2}+R}$. **4.73.** $\frac{9}{16}$. **4.74.** $\frac{48}{125}\pi R^3$. **4.75.** $R\left[r+R\,\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{4}\right)\right]$. **4.76.** $\frac{4\pi}{9}$. **4.77.** $R=\frac{2r}{\sqrt{3}}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$.

ГЛАВА 14

§ 1

1.1. а) $(-6, -2, 4)$; б) $(18, -5, 19)$. **1.2.** а) $(-30, 21)$; б) $(0, 0)$; в) $\left(\frac{11}{2}, \frac{15}{2}\right)$; г) $(25, -10)$. **1.3.** $\alpha=2$, $\beta=3$, $\gamma=5$. **1.4.** а) $(11, -6{,}5)$. **1.5.** $(1, 1, 1)$. **1.6.** а) $\mathbf{c}=\mathbf{a}-\mathbf{b}$; б) $\mathbf{c}=2\mathbf{a}-3\mathbf{b}$; в) $\mathbf{c}=-\frac{3}{2}\mathbf{a}$. **1.7.** а) $\overrightarrow{PQ}=(-3, 5, -3)$; б) $\overrightarrow{PQ}=\left(-\frac{11}{10}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{6}\right)$. **1.8.** $\left(0, \frac{5}{2}\right)$. **1.9.** а) $(-2, 1)$; б) $(0, 2)$; в) $(0, 2)$. **1.10.** $M_1(7, 0)$ и $M_2(-1, 0)$. **1.11.** $M(0, 1, 0)$. **1.12.** $M(-1, 0, 0)$. **1.13*.** а) $\left(\frac{5}{3}, 1\right)$; б) $\left(\frac{1}{3}, 4\right)$; в) $\left(\frac{2}{3}, \frac{14}{3}\right)$. Указание. Если вершины треугольника ABC заданы своими ординатами $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$, то координаты центра тяжести G этого треугольника находятся из равенств $x=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)$, $y=\frac{1}{3}(y_1+

$+y_2+y_3)$, $z=\frac{1}{3}(z_1+z_2+z_3)$. **1.14.** а) $k=-\frac{9}{14}$; б) $k=-\frac{5}{16}$; в) $k=-3$. **1.15.** а) Да, $\mathbf{a}=\frac{3}{2}\mathbf{b}$; б) да, $\mathbf{c}=-\frac{4}{3}\mathbf{d}$. **1.16.** $X=-\frac{5}{3}$, $Y=\frac{6}{5}$. **1.18.** $(4, 0)$, $(5, 2)$. **1.19.** $(-1, 2, 4)$, $(8, -4, -2)$. **1.20.** $\left(\frac{11}{7}, \frac{10}{7}, \frac{18}{7}\right)$. **1.21.** $\alpha=-1$, $\beta=4$. **1.26.** а) 22; б) -200; в) 41; г) $\sqrt{105}$. **1.27.** $\mathbf{e}_1=\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\mathbf{e}_2=\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$. **1.28*.** $\mathbf{x}=\left(\frac{21}{65}, \frac{77}{65}\right)$. Указание. $\mathbf{x}=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2=\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}+\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. **1.29.** -13. **1.30.** а) $|\mathbf{a}|=\sqrt{3}$; б) $|\mathbf{b}|=\sqrt{14}$. **1.31.** $(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ или $(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -\sqrt{3})$. **1.32.** $6\sqrt{2}$. **1.33.** $(6, -2, 4)$ и $(-6, 2, -4)$. **1.34*.** $\frac{\sqrt{85}}{2}$. Указание. $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **1.35.** а) $\arccos\frac{6}{7}$; б) $\arccos\left(-\frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$; в) $\arccos\frac{3}{7}$; г) $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{14}}\right)$; д) $\arccos\frac{2}{7}$; е) $\arccos\left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}\right)$. **1.36.** $\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$; $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)$; $\arccos\left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\right)$; 135°. Указание. $\mathbf{i}=(1, 0)$, $\mathbf{j}=(0, 1)$. **1.37.** $\frac{1}{11}$. **1.38.** а) $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$; б) $0, -\frac{3}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}$; в) $-1, 0, 0$; г) $0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$. Указание. $\mathbf{i}=(1, 0, 0)$, $\mathbf{j}=(0, 1, 0)$, $\mathbf{k}=(0, 0, 1)$. **1.39.** $\mathbf{p}=(-6, 8)$. **1.40.** $\mathbf{b}=(-24, -32, 30)$. **1.41.** 90°, $\sqrt{10}$. **1.42*.** $\mathbf{c}_1=(1, 0, 1)$ или $\mathbf{c}_2=\left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. Указание. Обозначив координаты вектора $\mathbf{c}=(X, Y, Z)$, составить систему уравнений $\mathbf{ca}=1$, $\mathbf{cb}=1$, $\mathbf{c}^2=\mathbf{a}^2=\mathbf{b}^2=2$ и, решив ее, получить ответ. **1.43.** $\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$. **1.44.** $\varphi=\frac{3\pi}{4}$. **1.45.** $Z=4$. **1.46.** $X=0$, $Y=2$. **1.47.** $\mathbf{c}=(-3, 3, 3)$. **1.48.** $\mathbf{c}=\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

1.49*. $\mathbf{a}=(2, -2, -2)$. Указание. Используя длину вектора $\mathbf{a}$ и его перпендикулярность вектору $\mathbf{d}$, составить два уравнения относительно X, Y, Z: $X-Y+2Z=0$, $X^2+Y^2+Z^2=12$. Замечая, что $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$, находим $2XY+YZ-XZ=0$, откуда, решая три уравнения относительно X, Y, Z, получим ответ. **1.50.** $|BD|=$

$= 2\sqrt{6}$. **1.51.** $|AC| = 5$; $\left(\frac{5}{2}, 1, 1\right)$. **1.52.** $\arccos \frac{63}{\sqrt{6441}}$. **1.53.** $\frac{43}{25\sqrt{13}}$. **1.54.** $|AA_1| = \sqrt{\frac{31}{2}}$, $|BB_1| = \frac{\sqrt{53}}{2}$, $|OG| = \frac{\sqrt{182}}{3}$, $\arccos \frac{14}{15}$. **1.55.** $(2+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{3})$ или $(2-\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3})$. **1.56.** $C_1(3, 6)$, $D_1(5, 3)$ или $C_2(-3, 2)$, $D_2(-1, -1)$. **1.57.** $A\left(\frac{1+7\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$, $C\left(\frac{1-7\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$. **1.58.** $|AA_1| = \frac{3}{4}\sqrt{10}$. **1.59.** $D(20, 23, 6)$. **1.60.** $A = 4$. **1.61.** $A = 7$. **1.62.** $|AB| = 5$; $|BC| = 5\sqrt{2}$; $|AC| = 5$; $\widehat{A} = 90°$, $\widehat{B} = \widehat{C} = 45°$. **1.63.** Тупоугольный. **1.64.** $\varphi = 45°$. **1.65*.** $\overrightarrow{AH} = (2; 1)$. Указание. Учесть, что $\overrightarrow{AH} = (X; Y) \perp \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. **1.66.** $|OA_1| = \sqrt{\frac{3}{2}}$. **1.67.** $|AG| = \frac{\sqrt{51}}{3}$. **1.68*.** $A_1'(0, -2, 0)$ и $A_1''(2, 2, 2)$. Указание. Зная объем призмы, найдем ее высоту $H = |AA_1| = \sqrt{6}$ и, обозначив координаты вершины $A_1(x_1, y_1, z_1)$, свяжем координаты вектора $\overrightarrow{AA_1} = (x-1, y, z-1)$ с его длиной. Другое уравнение получим из условия $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{AC}$. **1.69.** 18. **1.70.** 26.

§ 2

2.1. а) $x - y + 1 = 0$; б) $x - 1 = 0$; в) $y - 2 = 0$. **2.2*.** $3x - 2y - 12 = 0$, $3x - 8y + 24 = 0$. Указание. Воспользоваться уравнением прямой в отрезках (4). **2.3.** а) $3x - 2y - 5 = 0$; б) $x - 5y - \frac{7}{6} = 0$. **2.4.** AB: $4x + y - 6 = 0$; CD: $x - 4y - 2 = 0$; $h = \frac{19}{\sqrt{17}}$; $\cos\varphi = \frac{19}{\sqrt{17 \cdot 58}}$; l_1: $\frac{x-1}{\sqrt{26}+5\sqrt{17}} = \frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}}$; l_2: $(\sqrt{26}+5\sqrt{17})(x-1) + (-4\sqrt{26}-17)(y-2) = 0$. **2.5.** $y = 2x - 6$, $y = -2x + 6$. **2.6.** $x - 5y + 3 = 0$ или $5x + y - 11 = 0$ **2.7*.** $C_1(5, 10)$ и $C_2(3, 0)$. Указание. Площадь треугольника ABC найти по формуле

$$S = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|)^2 - (\boldsymbol{ab})^2}.$$

2.8. $D(9, 0)$. **2.9.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$. **2.10.** $y = \frac{\sqrt{15}}{2}$ и $y = -\frac{\sqrt{15}}{2}$.

2.11*. $B(12, 5)$, $C(-5, 12)$, $D(-12, -5)$. Указание. Точка C симметрична точке A относительно начала координат. **2.12**.** $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - \sqrt{2})^2 = \frac{9}{4}$; $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y + \sqrt{2})^2 = \frac{9}{4}$. Решение. Центр искомой окружности лежит на прямой, проходящей через точку (1/2, 0) и перпендикулярной оси Ox (рис. О.1). Диаметр искомой окружности равен радиусу данной. Записав уравнение искомой окружности в виде

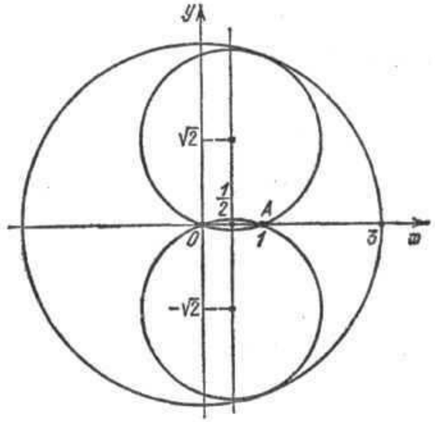


Рис. О.1

$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{9}{4}$ и потребовав, чтобы искомая окружность проходила через точку $A(1, 0)$, найдем y_0. **2.13.** $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$; $(x-5)^2 + (y-5)^2 = 25$. **2.14.** $2x - y - 2z = 0$. **2.15.** а) $3x + 4y + 6z - 29 = 0$; б) $2x - 2y - z + 9 = 0$; в) $x - y + 4z + 11 = 0$. **2.16.** а) $\arccos \frac{5}{6}$; б) $\arccos \frac{5}{14}$; в) $\arccos \frac{5}{11}$. **2.17*.** $\frac{\sqrt{6}}{7}$. Указание. Найти косинус угла между вектором $\boldsymbol{n}$ плоскости и вектором $\overrightarrow{AB}$. Используя определения угла между прямой и плоскостью, найти синус этого угла. **2.18.** а) $\arcsin \frac{18}{35}$; б) $\arcsin \frac{23}{15\sqrt{10}}$. **2.19.** 10. **2.20.** а) $\frac{3}{2}$; б) 0; в) 4. **2.21.** 3. **2.22.** $6x + 2y + 3z \pm 42 = 0$. **2.23.** $(-1, 0, 2)$. **2.24.** а) $(0, 0, -2)$; б) $(2, 3, 1)$. **2.25*.** 3. Указание. Вектор $\boldsymbol{n} = (2, 2, -1)$ параллелен прямой, проходящей через центр сферы перпендикулярно данной плоскости. Расстояние от центра сферы до плоскости равно 5. **2.26.** $(4,\ -3,\ 0)$ и $\left(\frac{4}{21},\ \frac{97}{21},\ \frac{40}{21}\right)$. **2.27.** $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=\frac{m^2}{2}-\frac{33}{4}$; при $m^2>\frac{33}{2}$ — сфера; при $m^2=\frac{33}{2}$ — точка; при $m^2<\frac{33}{2}$ — пустое множество.

§ 3

3.1. $\arccos\frac{3}{\sqrt{14}}$. **3.2.** $\pi-\arccos\left(-\frac{1}{5\sqrt{13}}\right)$. **3.3.** $\arccos\frac{3}{\sqrt{10}}$. **3.4.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{5}}$. **3.5*.** $\frac{1}{3}$. Указание. Выбрать систему координат Oxy так, чтобы оси Ox и Oy проходили соответственно через катеты BC и BA. **3.7*.** $2ax+2by=a^2+b^2$, где a, b — длины катетов. Указание. Выберем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox совпадала с катетом CA, а ось Oy — с катетом CB. **3.14.** $3a^2$, где a — длина стороны квадрата. **3.15.** $4a^2$, где a — длина стороны квадрата. **3.16.** $\frac{6}{\sqrt{170}}$. **3.17.** $\frac{3}{\sqrt{170}}$. **3.18.** $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1121}{170}}$. **3.19.** $\sqrt{\frac{551}{850}}$. **3.20.** $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{1373}{85}}$.

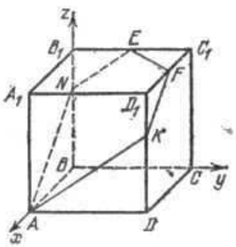


Рис. О.2

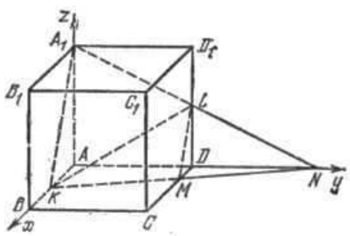


Рис. О.3

3.21. $\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$. **3.22**.** $\frac{7a^2\sqrt{17}}{24}$. Решение. Вводя систему координат $Oxyz$ так, как показано на рис. О.2, находим координаты точек: $A(a,\ 0,\ 0)$, $E\left(0,\ \frac{a}{2},\ a\right)$, $F\left(\frac{a}{2},\ a,\ a\right)$. Уравнение плоскости, проходящей через эти три точки, имеет вид $x+y+\frac{3}{2}z+a=0$. Косинус угла между плоскостью нижнего основания и данной плоскостью: $\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{17}}$. Площадь проекции

пятиугольника, полученного в результате сечения куба секущей плоскостью, на плоскость нижнего основания куба равна $s=a^2-\frac{a^2}{8}=\frac{7a^2}{8}$, и, следовательно, площадь самого пятиугольника — $S=\frac{s}{\cos\varphi}=\frac{7\sqrt{17}\,a^2}{24}$. **3.23**.** $|A_1K|=|A_1L|=\frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|KL|=\frac{\sqrt{6}}{2}a$, $\frac{7}{41}$. Решение. Из условия задачи $K\left(\frac{a}{2},\ 0,\ 0\right)$, $L\left(0,\ a,\ \frac{a}{2}\right)$ (рис. О.3). Тогда $|A_1L|^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$, $|A_1L|=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $|A_1K|^2=\frac{a^2}{4}+a^2$, $|A_1K|=\frac{a\sqrt{5}}{2}$. Рассмотрим две треугольные пирамиды: $NAKA_1$ и $NDML$. У второй пирамиды неизвестные длины ребер ND и DM обозначим через x и y соответственно. Из подобия треугольников AA_1N, DLN следует $x=a$, а из подобия $\triangle AKN$ и $\triangle DMN$ следует $y=\frac{a}{4}$; $|KL|^2=\frac{a^2}{4}+a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{3a^2}{2}$, $|KL|=\frac{a\sqrt{6}}{2}$. Тогда $V_{NAKA_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\times a\cdot 2a=\frac{a^3}{6}$; $V_{NDML}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{4}\cdot a=\frac{a^3}{48}$. Отсюда находим объем одной из частей куба, на которые разбивает его секущая плоскость: $V_1=V_{NAKA_1}-V_{NDML}=\frac{7a^3}{48}$. Тогда объем второй части куба равен $V_2=\frac{41}{48}a^3$, откуда $V_1:V_2=7:41$. **3.24.** $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. **3.25.** а) $\frac{a^2}{4}$; б) $\frac{7}{32}a^2$. **3.26.** $8a^2$, где a — длина стороны куба. **3.27.** $\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$. **3.28.** $\frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.29.** $\frac{\pi}{3}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **3.30.** а) $\frac{a\sqrt{5}}{3}$; б) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. **3.31.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

§ 4

4.1. $-(\overrightarrow{4C}+2CQ)$. **4.2.** $\overrightarrow{BD}=2(b-a)$, $\overrightarrow{AC}=\frac{2}{3}(a+b)$ **4.3.** $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{1+n}(\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD})$. **4.4.** 0. **4.6.** $\lambda=3$; $\lambda=-2$. **4.7.** $\lambda=\frac{1}{3}$. **4.8.** $\lambda=10/7$, $\mu=4/7$. **4.9.** $k=1$, $k=-2$. **4.11.** $p=q=1$. **4.12.** 0. **4.13.** $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$. **4.14.** $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{A_1M} = -\overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. **4.15.** $\overrightarrow{AA_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1} + \overrightarrow{AC_1})$. **4.16.** $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$. **4.17.** $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. **4.18.** $\left(\frac{7}{10}, \frac{3}{20}, \frac{3}{20}\right)$. **4.19.** $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **4.20.** $\left(1, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}\right)$.

§ 5

5.4. $\overrightarrow{DC_1} = \frac{3}{4}\boldsymbol{a} + \frac{1}{4}\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DC_2} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{DC_3} = \frac{1}{4}\boldsymbol{a} + \frac{3}{4}\boldsymbol{b}$. **5.5.** $\overrightarrow{MC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{MB}$. 5.6. $\overrightarrow{MC} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{MA} + \frac{k}{k+1}\overrightarrow{MB}$. **5.17.** $|AB| = 4$. **5.18.** $\frac{2}{11}$. **5.19.** 1,5. **5.20.** $\frac{25}{64}$. **5.21.** $\overrightarrow{AA_1} = \frac{c\boldsymbol{b} + b\boldsymbol{c}}{b+c}$, где $\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{c}$ и $|AC| = b$, $|AB| = c$. **5.22.** $\frac{1}{2}$. **5.23.** $\frac{1}{3}$. **5.24.** $\frac{(a+b)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$. **5.31.** 1 : 8. **5.32.** 3. **5.33.** $\frac{8}{37}$. **5.34.** $\frac{1}{6}$.

§ 6

6.1. а) 9; б) 13; в) −61. **6.2.** −13. **6.3.** Векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ должны быть взаимно перпендикулярны. **6.5.** $k = -\frac{\boldsymbol{ab}}{\boldsymbol{ac}}$. **6.8.** а) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 2bc\cos A + c^2}$; б) $l_a = \frac{2bc\cos(A/2)}{b+c}$. **6.9.** а) $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 + 2b^2 + 2c^2}$; б) $l_a = \frac{2\sqrt{bcp(p-a)}}{b+c}$. **6.10.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$. **6.11.** $\frac{3+\sqrt{73}}{8}$. **6.12.** $\frac{2}{\sqrt{7}}$. **6.24.** $\hat{A} = \hat{B} = 30°$, $\hat{C} = 120°$.

ГЛАВА 15

§ 1

1.1*. 10^7. Указание. Из исходного множества (0, 1, 2, ..., 9) набираются выборки с повторениями, содержащие по семь элементов. **1.2*.** $\frac{10(10^7-1)}{9}$. Указание. Найти сумму чисел, представляющих количество различных выборок по одному, двум и далее до семи элементов исходного множества. **1.3.** 243. **1.4.** 2^{32}. **1.5.** Число делителей q равно произведению

$(k_1+1)(k_2+1)\ldots(k_m+1)$. **1.6.** A_{10}^7. **1.7*.** 2^n. Указание. Исходное множество состоит из двух элементов (Г, Ц), а выборки с повторениями—из n элементов. **1.8.** 720. **1.9.** а) $2\cdot 29!$; б) $28\cdot 29!$ **1.10*.** 968. Указание. Следует найти сумму чисел различных аккордов, содержащих по три, четыре и далее до десяти звуков. Один аккорд, состоящий из k звуков, представляет собой выборку k элементов из исходного множества, содержащего 10 элементов; порядок элементов в выборе несуществен. **1.11*.** $40\cdot 39\cdot C_{38}^5$. Указание. Председатель и секретарь образуют выборку без повторений, состоящую из двух элементов исходного множества, содержащего 40 элементов. 5 членов комиссии образуют выборку без повторений некоторого состава из исходного множества, содержащего 38 членов. **1.12.** $C_8^5\cdot C_{10}^2$. **1.13.** $C_{32}^4\cdot C_4^2$. **1.14.** $C_5^4\cdot C_{15}^2\cdot C_{10}^3$. **1.15.** а) $42\cdot C_6^5$ различных карточек; б) $C_{42}^2\cdot C_6^4$ различных карточек; в) $C_{42}^3\cdot C_6^3$ различных карточек. **1.16.** 120. **1.17*.** $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$. Указание. Искомое число равно разности общего числа способов вынуть 10 карт из 52 и числа способов вынуть 10 карт из 48 таким образом, чтобы среди 10 карт не было туза. **1.18.** $4\cdot C_{44}^4$. **1.19.** $A_{10}^4\cdot A_6^4$. **1.20*.** 1225. Указание. Учесть, что цифровая запись числа не может начинаться с нуля. **1.21.** 750.

§ 2

2.1. 2520. **2.2*.** 165. Указание. Выборка с заданным числом повторений объема 8 набирается из четырех групп однородных элементов. **2.3*.** $C_{16}^7 = C_{16}^9$. Указание. Выборка с заданным числом повторений объема 7 набирается из 10 групп одинаковых элементов. **2.4*.** $\frac{52!}{(13!)^4}$. Указание. Ищется число различных выборок состава (13, 13, 13, 13). **2.5*.** $\frac{12!}{2^6}$. Указание. Шесть различных групп однородных элементов должны составить выборку с заданным числом повторений, содержащую 12 элементов, имеющую состав (2, 2, 2, 2, 2, 2). **2.6*.** C_{m+1}^n. Указание. Следует рассмотреть выборку с заданным числом повторений, имеющую состав $(m+1, n)$, где $m+1$ — число промежутков между m белыми шарами, а n — число черных шаров. Число различных расстановок равно числу всевозможных выборок состава $(m+1, n)$. **2.7*.** $\frac{100!}{48!52!}$. Указание. Находится число различных выборок состава (n_1+n_2), где $n_1 = 52$ — число успехов, а $n_1 + n_2 = 100$. **2.8*.** $2\cdot(6!)^2$. Указание. Число перестановок левых мест ряда следует умножить на число перестановок правых мест. Учесть возможность смены левых мест на правые. **2.9*.** *Указание.* Воспользоваться неравенством $C_{2n+k}^n C_{2n-k}^n \leqslant \left(C_{2n}^n\right)^2$, доказательство которого можно провести непосредственно.

§ 3

3.1*. 1024. *Указание.* Разложить по формуле бинома выражение $(1+1)^{10}$. **3.2.** $k=4$. **3.3*.** $T_2 = C_{18}^2 \cdot x^{6,5} = 153x^{6,5}$. *Указание.* Воспользоваться тем, что наибольший коэффициент имеет средний член разложения. **3.4.** $28x^2a^{-4}$. **3.5*.** *Указание.* Воспользоваться указанием к 3.1*. **3.6.** -1375. **3.7**.** $C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$. *Решение.* Рассмотрим отношение T_{k+1} к T_k. Так как

$$T_{k+1}=C_{100}^{k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{100},\quad T_k = C_{100}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{100},$$

то

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{100!k!\,(100-k+1)!}{(k+1)!\,(100-k)!\cdot 100!} = \frac{100-k+1}{k+1}.$$

Если $\frac{100-k+1}{k+1} > 1$, то $T_{k+1} > T_k$, а если $\frac{100-k+1}{k+1} < 1$, то $T_{k+1} < T_k$. Получаем, что при $k<50$ члены T_k возрастают, а при $k>50$ — убывают. Следовательно, наибольшим членом является $T_{50}=C_{100}^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$. **3.8.** Наибольшим членом разложения является десятый. **3.9*.** $T_3 = C_{10}^3 x^{11}$. *Указание.* Степень бинома можно получить, используя указание к 3.1*. **3.10*.** *Указание.* Использовать разложение $(1-1)^n$. **3.11*.** $-264a^3b^7$. *Указание.* Использовать результат задачи 3.10*. **3.12.** $314\,925\cdot 10^5$. **3.13.** $x=2$. **3.14*.** $5/8 < x < 20/21$. *Указание.* См. решение 3.7**. **3.15*.** 1/2. *Указание.* Используя условие задачи, представить 50-й член разложения как функцию аргумента x и решить задачу на отыскание наибольшего значения полученной функции на промежутке [0; 1]. **3.16.** $x=\frac{n-k}{n}$. **3.17.** $C_{24}^{14}\cdot 3^2\cdot 2^2$. **3.18.** 26. **3.19**.** Рациональными будут первое, пятое и девятое слагаемые разложения. *Решение.* Так как коэффициенты 1, $\frac{n}{2}$, $\frac{n(n-1)}{8}$ образуют арифметическую прогрессию, то можно составить уравнение

$$\frac{n(n-1)}{8}+1=n,$$

корни которого равны соответственно $n=8$ и $n=1$; $n=1$ — посторонний корень. Для $n=8$ общий член разложения имеет вид

$$T_k = C_8^k x^{\frac{k}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{8-k} x^{\frac{8-k}{4}} = 2^{k-8}C_8^k x^{\frac{k+8}{4}}.$$

Этот член будет рациональным, если $k+8$ кратно 4, где $0 \leqslant k \leqslant 8$. Это условие выполняется при $k=0$, 4 8. Следовательно, рациональными будут члены T_0, T_4, T_8. **3.20*.** *Указание.* Использовать биномиальное разложение для $(1-1)^n$. **3.23*.** *Указание.* Рассмотреть биномиальное разложение для $(10-1)^{2n}$. **3.25*.** *Указание.* Найти приращения первообразной функции $(1+x)^n$ на промежутке [0; 1] непосредственно и записав выражение для $(1+x)^n$ по формуле бинома Ньютона. **3.26*.** *Указание.* Найти производную функции $(x-1)^n$ в точке $x=1$. **3.27*.** *Указание.* Сравнить приращения первообразной функции $(x-1)^n$ на промежутке [0; 1], найденные непосредственно и с помощью предварительного разложения $(x-1)^n$ по формуле бинома Ньютона. **3.28*.** $(n+1)!-1$. *Указание.* К искомому выражению прибавить и вычесть $P_1+P_2+\ldots+P_n$. **3.29*.** *Указание.* Использовать тождество $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$.

§ 4

4.1. 12/365. **4.2.** 5/12. **4.3*.** 1/3. *Указание.* Число всех двузначных чисел равно 90. Число двузначных чисел, делящихся на три, находится из уравнения $99=12+3(n-1)$. **4.4.** 0,4. **4.5.** 3/13. **4.6**.** $P(A)=1/8$; $P(B)=3/8$. *Решение.* Пространство элементарных событий состоит из выборок с повторениями, составленных из букв Ц, Г. Оно содержит $2^3=8$ элементов. Событию A благоприятна только одна выборка (Ц, Ц, Ц), а событию B — три: (Ц, Ц, Г), (Ц, Г, Ц), (Г, Ц, Ц). Таким образом, $P(A)=1/8$; $P(B)=3/8$.

4.7. 1/6. **4.8.** 1/2. **4.9.** 89/99. **4.10.** 10/99. **4.11*.** 1/8. *Указание.* См. решение 4.6**. **4.12.** C_n^2/C_{n+m}^2. **4.13.** 1/720. **4.14.** 245/354. **4.15.** $n\cdot m\cdot k/C_{n+m+k}^3$. **4.16.** C_{30}^4/C_{45}^4. **4.17.** $4/C_{15}^2$. **4.18*.** 1/60. *Указание.* Пространство элементарных событий состоит из всех перестановок с заданным числом повторений, имеющих состав (3, 2, 1). Благоприятной будет только одна такая перестановка. **4.19.** $5\cdot 3!4!/7!$ **4.20.** $2\cdot 4!3!/7!$ **4.21*.** $24\cdot 48!13^4/52!$ *Указание.* Пространство элементарных событий состоит из всех выборок, имеющих состав (13, 13, 13, 13). Благоприятными считаются выборки состава (12, 12, 12, 12), к каждой из которых присоединяют один из четырех тузов. **4.22.** $\frac{5!5!}{10!}$.

4.23. $\frac{50}{C_{15}^5}$. **4.24.** $\frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}$. **4.25.** $\frac{1}{C_{48}^6}$, $\frac{C_6^5 C_{42}^1}{C_{48}^6}$, $\frac{C_6^4 C_{42}^2}{C_{48}^6}$, $\frac{C_6^3 C_{42}^3}{C_{48}^6}$. **4.26.** $\frac{C_{48}^5 C_4^1}{C_{52}^6}$, $\frac{C_{44}^4 C_4^1 C_4^1}{C_{52}^6}$. **4.27.** $\frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = 0{,}6$. **4.28.** $\frac{2 \cdot C_{18}^8}{C_{20}^{10}}$.

§ 5

5.1. 0,2. **5.2.** $\frac{r^2}{R^2}$. 5.3. $\frac{1}{2}$. 5.4. $\frac{2}{3}$. 5.5. $\frac{1}{2}$. **5.6*.** $\frac{1+3\ln 2}{8}$. Указание. Рассмотреть отношение общей площади фигур, ограниченных линиями $y = \frac{1}{x}$, $y = 2x$, $x = 2$, $y = 0$, к площади квадрата со стороной 2. **5.7*.** $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{16}$. Указание. См. указание к 5.6*. **5.8*.** $\frac{2}{3}$. Указание. Коэффициенты уравнения параболы $y = ax^2 + bx + c$ найти из условия прохождения ее через три указанные точки, выбрав соответствующую систему координат. **5.9.** $\frac{3\pi - 8}{\pi}$. **5.11*.** $\frac{1}{2}$. Указание. Использовать утверждение задачи 5.10. **5.12.** $\approx 0{,}314$. **5.13*.** $\frac{1}{2}$. Указание. Если обозначить расстояние от точки B до начала координат через x, а от точки C — через y, то пространство элементарных событий будет представлено единичным квадратом, вписанным в первый квадрант координатной плоскости. Элементарные события, благоприятные событию, вероятность которого требуется найти, представляются точками, координаты которых удовлетворяют неравенству $|y - x| \leqslant \min(x, y)$. **5.14.** Поезда направления AC должны приходить через 10 мин после отхода поезда направления CA. **5.15*.** $\frac{2l}{\pi a}$. Указание. Ввести систему координат Oxy, где x — угол, который образует игла с параллелями, а y — расстояние от центра иглы до ближайшей параллели. В этом случае пространству элементарных событий соответствует прямоугольник со сторонами a и $\pi/2$, а элементарным событиям, благоприятным условию пересечения иглою параллельных прямых, — точки, координаты которых удовлетворяют неравенству $l \sin x < y$.

§ 6

6.1. $\frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}$; $\frac{2nm}{(n+m)(n+m-1)}$. **6.2*.** $\frac{n^2}{(n+m)^2}$; $\frac{m^2}{(n+m)^2}$. Указание. Если шары возвращаются обратно, то события, связанные с цветом последовательно вынимаемых шаров, независимы. **6.3.** $\frac{39}{51} \cdot \frac{26}{50} \cdot \frac{13}{49} \approx 0{,}1055$. **6.4.** $\frac{25}{216}$. **6.5.** $\frac{3}{5}$. **6.6.** а) $\frac{20}{25} \times \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19} = \frac{42}{95}$; б) $\frac{81}{190}$. **6.7.** $1 - \frac{6nmk}{(n+m+k)(n+m+k-1)(n+m+k-2)}$. **6.8.** $\frac{67}{91}$. **6.9.** $1 - \frac{(n-l)(n-l-1)\ldots(n-l-k+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}$. **6.10.** $1 - (1-p)^n$. **6.11*.** $n > \ln(1-P)/\ln(1-p)$, где n — число выстрелов. Указание. Число выстрелов находится из условия, что в серии из n выстрелов вероятность поражения цели (хотя бы одного попадания) не меньше P. **6.12.** Вероятность сдачи экзамена не зависит от того, идет ученик отвечать первым или последним. **6.13*.** 2/3. Указание. Рассмотреть следующие гипотезы: A — в урне было два белых шара; B — в урне было два черных шара; C — в урне были разноцветные шары. Вероятности гипотез считать одинаковыми. **6.14.** 0,85. **6.15.** а) $\frac{(m-1)m + nm}{(m+n-1)(m+n)}$; б) $\frac{(k+1)m + kn}{(k+l+1)(m+n)}$. **6.16*.** $\frac{KnM + LmN}{(k+L)MN}$. Указание. См. указание к 6.13*. **6.17*.** $[N(N-1)(N-2)(k+L)(k+L-1)(k+L-2) - k(k-1) \times (k-2)(N-n)(N-n-1)(N-n-2) - k(k-1)L(N-n) \times (N-n-1)(M-m) - k(L-1)(L-2)(N-n)(M-m) \times (M-m-1) - L(L-1)(L-2)(M-m)(M-m-1)(M-m-2)]/N(N-1)(N-2)(k+L)(k+L-1)(k+L-2)$. Указание. Рассмотреть гипотезы: H_0 — все три изделия из первой партии; H_1 — 2 изделия из первой партии и 1 из второй; H_2 — 1 изделие из первой партии и 2 из второй; H_3 — все три изделия из второй партии.

ГЛАВА 16

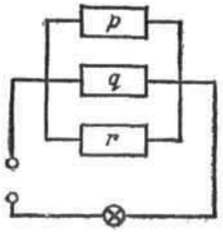
§ 1

1.6. 1) У меня или нет собаки или есть кошка. 2) У меня нет ни кошки, ни собаки. 3) У меня или есть и кошка, и собака или нет ни кошки, ни собаки. 4) Если у меня нет собаки, то у меня есть кошка.

1.7.

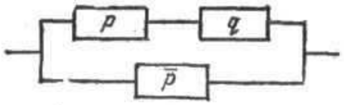
p	q	$p\mid q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

1.8. $(p\wedge\bar q)\vee(\bar p\wedge q)\vee(\bar p\wedge\bar q)$. **1.10.** 1) $p\to q$; 2) $q\to p$; 3) $p\leftrightarrow q$; 4) $q\to\bar p$; 5) $\overline{p\leftrightarrow q}$. **1.11.** $\overline{\bar p\wedge\bar q\wedge\bar r}$. **1.12.** 1) Мишень поражена по крайней мере при одном из выстрелов. 2) Мишень поражена при каждом выстреле. 3) Мишень поражена при третьем выстреле, а при одном из первых двух — нет. **1.13.** Да. **1.14.** Все участвовали. **1.15.** *А* сдал экзамен. **1.16.** а) $(p\wedge q\wedge r)\vee(p\wedge\bar q\wedge r)\vee(\bar p\wedge q\wedge\bar r)$; б) $(\bar p\wedge\bar q\wedge\bar r)$; с) $\overline{(p\wedge\bar q\wedge\bar r)\wedge(\bar p\wedge\bar q\wedge r)}$. **1.17.** а) $(p\wedge q)\vee(\bar p\wedge\bar q)=p\leftrightarrow q$; б) $p\wedge q$; с) $\bar p\wedge q$; д) $p\wedge\bar q$. **1.18.** «Верно ли следующее высказывание: или ты говоришь правду и этот выход ведет на свободу, или ты лжешь и этот выход ведет на смерть?» **1.19.** Высказывание имеет вид $\overline{\bar p\wedge\bar q\wedge\bar r}=p\vee q\vee r$ и может быть реализовано в виде



1.20. $(p\wedge q)\vee((\bar p\wedge\bar q)\vee q)$.

1.21.



1.22. $p\leftrightarrow q$.

§ 2

2.1. а) $[-2;\infty)$; б) $(2;\infty)$; в) $\mathbb{R}$; г) $(-\infty;-2)\cup(2;\infty)$; д) $\varnothing$; е) $\mathbb{R}$. **2.2.** а) $\mathbb{R}$; б) $[-2;\infty)$; в) $[-2;\infty)$; г) $\mathbb{R}$; д) $(-\infty;-2)$; е) $\mathbb{R}$. **2.3.** $\{3;4\}$. **2.4.** а) $0<a<2/3$; б) $a>2/3$. **2.5.** $\{5/2\}$. **2.6.** $a\in\mathbb{R}\setminus\{\{3\}\cup\{1\}\}$. **2.7.** $(-\infty;1/2]$. **2.8.** Истина. **2.9.** Ложь. **2.10.** Истина. **2.11.** Истина. **2.12.** Истина. **2.13.** Ложь. **2.14.** Истина. **2.15.** Ложь. **2.16.** Истина. **2.17.** Ложь. **2.18.** а) $(\exists M>0)(\forall n\in\mathbb{N})\ (|u_n|<M)$; $(\forall M>0)\ (\exists n\in\mathbb{N})\ (|u_n|>M)$; б) $(\forall n\in\mathbb{N})\ (u_{n+1}>u_n)$; $(\exists n\in\mathbb{N})\ (u_n\geqslant u_{n+1})$.

2.19. $(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ (\forall x\in\mathbb{R})\ (0<|x-a|<\delta\to|f(x)-b|<\varepsilon)$.
2.20. а) $M=\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)\Leftrightarrow(((\forall x\in[a;b])\to(f(x)\leqslant M))\wedge\wedge((\forall\varepsilon>0)\ (\exists x\in[a;b])\to(f(x)>M-\varepsilon))$; б) $M\neq\sup\limits_{x\in[a;b]}f(x)\Leftrightarrow\Leftrightarrow((\exists x\in[a;b])\ (f(x)>M))\vee((\exists\varepsilon>0)\ (\forall x\in[a;b])\ (f(x)\leqslant\leqslant M-\varepsilon)$; M не является точной верхней гранью функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если верно одно из двух высказываний: или для некоторого $x\in[a;b]$ $f(x)>M$, или существует такое $\varepsilon>0$, что для всех $x\in[a;b]$ $f(x)<M-\varepsilon$.

§ 4

4.1. $(114144)_6$. **4.2.** 10 000. **4.3.** 9. **4.4.** 19. **4.5.** 4380. **4.6.** $(42\,714)_8$ **4.7.** $(3125)_6$. **4.8.** $(145\,244)_6$.

4.9.

	0	1
0	0	0
1	0	1

4.10. 72. **4.13.** Основание системы равно 5. **4.14.** $(12)_3$. **4.15.** В любой. **4.16*.** У к а з а н и е. Например, если тело имеет вес 19 кг, то, записав число 19 в двоичной системе счисления, имеем $(19)_2=(10\,011)_2$, т. е. для его взвешивания следует взять три гири $2^4=16$ кг, $2^1=2$ кг и $2^0=1$ кг.

4.17.** Р е ш е н и е. Представим любое число $\leqslant 40$ в троичной системе с цифрами -1, 0, 1 следующим образом: если остаток от деления очередного неполного частного на 3 равен 2, то пишется (-1) и получающееся частное увеличивается на единицу.

Например, вместо $\begin{array}{r|l}20 & 3\\ \hline 2 & 6\end{array}$ пишем $\begin{array}{r|l}20 & 3\\ \hline -1 & 7\end{array}$. Таким образом,

в троичной записи любого числа будут 1, 0, —1. Продолжая деление в рассмотренном выше примере, имеем

$$\begin{array}{r|l}20 & 3\\ \hline -1 & 7\ \big|\ 3\\ & \ \,1\ \big|\ 2\ \big|\ 3\\ & \qquad -1\ \big|\ 1\end{array}\qquad (20)_{10}=(1\ -1\ 1\ -1)_{\bar 3}.$$

Черточка над цифрой 3 означает, что число представлено в системе с цифрами —1, 0, 1. Так как $(40)_{10}=(1\ 1\ 1\ 1)_3$, то для любого тела весом $\leqslant 40$ хватит четырех гирь с весами 1, 3, 9, 27.

Алгоритм взвешивания будет представлен в троичной записи числа. Так чтобы взвесить тело в 20 кг, следует на одну чашку весов поставить гири $27 = 3^3$ и $3 = 3^1$ (эти разряды в записи представлены единицами), а на другую — $9 = 3^2$ и $1 = 3^0$ (эти разряды представлены —1). **4.18****. Решение. Вес следующей m_{p+1} гири должен быть не больше чем $2M_p + 1$. Действительно, если $m_{p+1} > 2M_p + 1$, то груз весом $M_p + 1$ не удастся взвесить за счет разности $m_p - M_p$. Если же $m_{p+1} < 2M_{p+1}$, то максимальный вес $M_{p+1} = m_1 + \ldots + m_{p+1}$ будет меньше возможного. Следовательно, m_{p+1} можно получить из уравнения

$$m_{p+1} - M_p = M_p + 1.$$

Учитывая, что $M_{p+1} = m_1 + \ldots + m_{p+1}$, получаем

$$M_{p+1} = 3M_p + 1.$$

4.19**. Решение. Сразу же следует из утверждения предыдущей задачи, так как уравнение

$$M_{p+1} = 3M_p + 1$$

показывает, что при делении M_p на 3 для любого p остается остаток, равный 1. **4.20****. Решение. Из результатов 4.19** и 4.18** следует, что минимальное число гирь находится из неравенства

$$3^{p-1} < n \leqslant 3^p.$$

Алгоритм взвешивания совпадает с тем, который представлен в задаче 4.18** и определяется записью n в троичной системе счисления. **4.21****. Решение. Если система счисления десятичная, то максимальное число, которое можно представить при $r = 30$, равно 999. Действительно, так как $p = 3$, то 999 — максимальное число, которое может быть записано в десятичной системе счисления с использованием трех разрядов.

Если $a > 10$, например 15, то число разрядов p равно двум и, следовательно, максимальное число равно $15 \cdot 14 + 15^0 \cdot 14 = 224$. Если основание равно 2, то максимальное число, записываемое по этому основанию, $2^{15} - 1$; если основание равно 3, то $3^{10} - 1$. Очевидно, что $3^{10} - 1 > 2^{15} - 1 > 6^5 - 1$, так как $9^5 > 8^5 > 6^5$ и, наконец, по основанию 6, $6^5 - 1$. Следовательно, наибольшим является $3^{10} - 1$.

ВАРИАНТЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ РАБОТ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ В МГУ

Ниже приведены варианты экзаменационных работ, предложенные абитуриентам в различные годы на вступительных экзаменах в МГУ.

Вариант 1 (Механико-математический факультет).

1) Решить неравенство

$$98 - 7^{x^2+5x-48} \geqslant 49^{x^2+5x-49}.$$

2) Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию $x > 0$ и системе уравнений

$$\sin\left[(x - \sqrt{\pi})^2 + y^2\right] = 0,$$

$$\log_{\sqrt{2\pi}} \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{2\log_{2\pi}\sqrt{x^2+y^2}} = 2.$$

3) Два равных равнобедренных треугольника ABC и DBE ($AB = BC = BD = BE$) имеют общую вершину B и лежат в одной плоскости так, что точки A и C находятся по разные стороны от прямой BD, а отрезки AC и DE пересекаются в точке K. Известно, что $\angle ABC = \angle DBE = \alpha$, причем $\alpha < \pi/2$, $\angle AKD = \beta$, причем $\beta < \alpha$. В каком отношении прямая BK делит угол ABC?

4) Сфера радиуса $3/8$ вписана в четырехугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$ такой, что $\angle BAD = 60°$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и AD в некоторых точках M, N таких, что $MN = 4/5\sqrt{3}$, касающаяся сферы в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E. Найти длину отрезка SE.

5) Без помощи таблиц найти все значения x в промежутке $-0,5 < x < 1,5$, удовлетворяющие равенству

$$\log_2\left(\sin 3x - \cos 2x - \frac{3}{10}\right) = \log_2\left(\sin 7x - \cos 6x - \frac{3}{10}\right).$$

Вариант 2 (Механико-математический факультет).

1) Произведение четырех целых положительных чисел меньше, чем их сумма, а сумма трех из этих чисел равна 28. Найти все такие числа.

2) Решить систему уравнений:

$$x^2+2x\sin y+3\cos y=0,$$
$$\arcsin\left(\frac{x}{2}+\sin y\right)=y-\frac{\pi}{3}.$$

3) В четырехугольной пирамиде $OABCD$ плоскости боковых граней OAB, OBC, OCD, OAD образуют с плоскостью основания углы, равные соответственно 60°, 90°, 45°, 90°. Основание $ABCD$ — равнобочная трапеция, ребро AB равно 2, площадь основания равна 2. Найти поверхность пирамиды.

4) Найти все значения a, при которых минимум функции

$$f(x)=3|x-a|+|x^2+x-2|$$

меньше двух.

Вариант 3 (Факультет вычислительной математики и кибернетики).

1) Найти точки экстремума функции

$$f(x)=x^3+6x^2-3x+3$$

на интервале $(-5, 1/5)$.

2) Решить уравнение

$$5^{|4x-6|}=25^{3x-4}.$$

3) В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке E. Прямая, проходящая через точку E и перпендикулярная к AB, пересекает сторону CD в точке M. Доказать, что EM — медиана треугольника CED, и найти ее длину, если $AD=8$ см, $AB=4$ см и $\widehat{CDB}=\alpha$.

4) Найти все целые корни уравнения

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\left(3x-\sqrt{9x^2+160x+800}\right)\right)=1.$$

5) Найти все действительные значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a-x^2-\cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8-ax}=0$$

имеет на отрезке $[-2, 3]$ нечетное число различных корней.

Вариант 4 (Физический факультет).

1) Решить уравнение

$$2\sin x+\sin 3x=2\cos x-\cos 3x.$$

2) Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{3x+1}}4>2-\log_{(3x+1)}\frac{1}{25}.$$

3) В треугольнике ABC заданы углы A и B. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке D. Окружность касается сторон угла A и отсекает на продолжении биссектрисы этого угла за точкой D отрезок DE, равный AD. Центр окружности лежит на отрезке AE. Определить отношение площади круга к площади треугольника AEC.

4) В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC (угол C прямой). Ребро SA перпендикулярно плоскости основания. В пирамиду вписан шар, радиус которого равен $^1/_3SA$. Через вершину S и точку касания шара с основанием пирамиды проходит плоскость, параллельная ребру BC. Эта плоскость делит поверхность шара в отношении $1:4$. Найти угол BAC.

5) Вода из цилиндрического бассейна глубины h вытекает по двум трубам разной пропускной способности, первая из которых расположена в дне бассейна, а вторая на боковой стенке. Если при наполненном целиком бассейне открыть только вторую трубу, то вода будет протекать через нее в течение времени, которое в $^1/_3$ раза меньше времени, нужного для слива всей воды из бассейна только через одну первую трубу. При действии обеих труб продолжительность слива всей воды из бассейна, наполненного целиком, в $^1/_3$ раза больше, чем наполненного на $^2/_3$. Пропускная способность труб не зависит от уровня воды над трубой. На какой высоте расположена вторая труба?

Вариант 5 (Физический факультет).

1) Решить неравенство

$$\log_3\sqrt{5-2x}\cdot\log_x 3<1.$$

2) Решить уравнение

$$(1+\cos x)\sqrt{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}-2+\sin x=2\cos x.$$

3) Из пункта A в пункт B выехал велосипедист, который сначала двигался равноускоренно с ускорением 4 км/ч², а после того, как его скорость возросла от 0 до v, продолжал двигаться равномерно со скоростью v. Расстояние между пунктами A и B

равно 32 км. На первую половину пути велосипедист затратил в полтора раза больше времени, чем на вторую. Определить скорость v.

4) В треугольнике ABC даны угол C и отношение стороны BC к стороне AC, равное 3. Из вершины C проведены два луча, делящие угол C на три равные части. Найти отношение отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника ABC.

5) В трехгранном угле $OABC$ (O — вершина) все внутренние двугранные углы равны α. Найти угол между ребром OA и биссектрисой угла BOC.

Вариант 6 (Химический факультет).

1) Имеются два слитка сплавов меди и серебра. Первый весит 3 *кг* и содержит 10 % серебра, второй весит 2 *кг* и содержит 20 % серебра. Какого веса кусок первого слитка нужно переплавить вместе со всем вторым слитком, чтобы получить сплав, содержащий r % серебра? Найти все r, при которых задача имеет решение.

2) Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром $AA' = a$. Точка E' — середина ребра $B'C'$. Найти радиус сферы, проходящей через точки A', E', C', C.

3) Найти все решения уравнения

$$\sqrt{\sin 3x + \cos x - \sin x} = \sqrt{\cos x - \sin 2x}.$$

4) Сравнить без помощи таблиц $\log_{135} 675$ и $\log_{45} 75$.

Вариант 7 (Биологический факультет; отделение почвоведения).

1) Два экскаватора разных марок (один экскаватор марки A и один экскаватор марки $Б$), работая одновременно, выкапывают котлован емкостью 20000 м^3 за 10 суток. Если бы работал только экскаватор марки $Б$, то он выкопал бы этот котлован на $8\frac{1}{3}$ суток скорее, чем тот же котлован выкопал бы один экскаватор марки A. Сколько кубических метров в сутки выкапывает каждый из экскаваторов?

2) Решить уравнение

$$\frac{1}{5}\log_3 (x^5) + \log_3\left(\frac{x+\frac{5}{2}}{x+1}\right) = 3\log_{27}(x+4) - 3\log_3 \sqrt[3]{2}.$$

3) Найти все решения уравнения

$$\frac{(\sqrt{3}+2)\sin x - \sin 2x}{1-\cos x} = 3 + 2\sin x.$$

4) Найти все значения a, при которых неравенство

$$(x+3-2a)(x+3a-2) < 0$$

выполняется для всех x таких, что $2 \leqslant x \leqslant 3$.

5) Дан треугольник ABC, у которого стороны $AB = \sqrt{17}$, $BC = 5$, $AC = 4$. На стороне AC взята точка D так, что BD является высотой треугольника ABC. Найти радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся в точке D окружности, описанной около треугольника BCD.

Вариант 8 (Биолого-почвенный факультет; отделение биологии).

1) Решить уравнение

$$\cos x + 3\sin x = 1 + 2\cos\frac{3x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}.$$

2) Решить неравенство

$$3\cdot 4^{\sqrt{2-x}} + 3 < 10\cdot 2^{\sqrt{2-x}}.$$

3) Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3. Известно, что числа a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3 снова образуют геометрическую прогрессию.

Доказать, что $a_1\cdot b_3 = a_3\cdot b_1$.

4) На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$, площадь которого равна единице, взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD и N на AD. При этом $AK:KB = 2$, $BL:LC = 1:3$, $CM:MD = 1$, $DN:NA = 1:5$.

Найти площадь шестиугольника $AKLCMN$.

5) При каких значениях a и b система

$$a^2x - by = a^2 - b$$
$$bx - b^2y = 2 + 4b$$

имеет бесконечно много решений?

Вариант 9 (Географический факультет).

1) Решить уравнение

$$\cos^2 2x - 5\sin^2 x + 1 = 0.$$

2) Решить неравенство

$$\log_2(\sqrt{x^2-4x}+3) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{x+1}+1}\right) + 1.$$

3) На катете AC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу

AB в точке K. Найти площадь треугольника CKB, если длина катета AC равна b и величина угла ABC равна β.

4) Решить систему

$$2^{|x^2-2x-3|-\log_2 3}=3^{-y-4},$$
$$4|y|-|y-1|+(y+3)^2\leqslant 8.$$

5) Каждое из ребер треугольной пирамиды $ABCD$ имеет длину 1. Точка P на ребре AB, точка Q на ребре BC и точка R на ребре CD взяты так, что длина отрезка AP равна $1/2$, длина отрезка BQ равна $1/3$ и длина отрезка CR равна $1/3$. Плоскость PQR пересекает прямую AD в точке S. Найти величину угла между прямыми SP и SQ.

Вариант 10 (Геологический факультет; отделение общей геологии).

1) Найти все действительные решения уравнения

$$(x+1)\sqrt{x^2+x-2}=2x+2.$$

2) В треугольнике ABC угол BAC прямой, длины сторон AB и BC равны соответственно 1 и 3. Точка K делит сторону AC в отношении $7:1$, считая от точки A. Что больше: длина AC или длина BK?

3) Решить неравенство

$$\log_3(5x^2+6x+1)\leqslant 0.$$

4) Найти все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющие системе уравнений

$$\cos 4x+\sin 2y=-2,$$
$$x-y=2\pi.$$

5) Автобус проходит путь AE, состоящий из участков AB, BC, CD, DE длиной 10 км, 5 км, 5 км, 6 км соответственно. При этом, согласно расписанию, выезжая из пункта A в 9 часов, он проходит пункт B в $9\frac{1}{5}$ часа, пункт C — в $9\frac{3}{8}$ часа, пункт D — в $9\frac{2}{3}$ часа. С какой постоянной скоростью v должен двигаться автобус, чтобы сумма абсолютных величин отклонений от расписания прохождения пунктов B, C, D и времени движения автобуса от A до E при скорости v не превосходила 51,7 минут?

6) В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC, длины сторон AB и AC равны $\sqrt{5}$, ребро SA перпендикулярно плоскости ABC, угол BAC вдвое больше угла BSC. Среди всех прямых круговых цилиндров с образующей, параллельной SA, находящихся внутри пирамиды, рассматривается цилиндр с наибольшей площадью боковой поверхности. Известно, что расстояние от центра его нижнего основания до ребра BC составляет $\frac{11}{16}$ длины медианы AM треугольника ABC. Найти объем пирамиды $SABC$.

Вариант 11 (Факультет психологии).

1) Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2}=2^{5-x}+9.$$

2) Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{51-2x-x^2}}{1-x}<1.$$

3) В треугольниках ABC и $A'B'C'$ длина стороны AB равна длине стороны $A'B'$, длина стороны AC равна длине стороны $A'C'$, величина угла BAC равна 60° и величина угла $B'A'C'$ равна 120°. Известно, что отношение длины $B'C'$ к длине BC равно $\sqrt{n}$ (где n — целое число). Найти отношение длины AB к длине AC. При каких значениях n задача имеет хотя бы одно решение?

4) В окружность радиуса 7 вписан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Длины сторон AB и BC равны. Площадь треугольника ABD относится к площади треугольника BCD как $2:1$. Величина угла ADC равна 120°. Найти длины всех сторон четырехугольника $ABCD$.

5) Найти все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$2\cos x+a\sin y=1,$$
$$\log_z \sin y=(\log_z a)\log_a(2-3\cos x),$$
$$\log_a z+\log_a\left(\frac{1}{2a}-1\right)=0$$

имеет хотя бы одно решение относительно x, y и z. При каждом таком значении a найти все решения.

Вариант 12 (Экономический факультет).

1) Найти все корни уравнения

$$2|x^2+2x-5|=x-1,$$

удовлетворяющие неравенству $x<\sqrt{2}$.

2) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке O. Из-

вестно, что $OB = OC = 1$, $OA = 8$, $OD = 7$. Найти косинус угла между векторами AB и DC. ✓

3) Решить уравнение

$$\frac{1}{\log_{11}\left(\frac{x}{3}\right)} - 3 = \log_{\frac{x}{3}}\left(\frac{114}{x} - 9x\right).$$

4) Имеется три сплава. Первый сплав содержит 60 % алюминия, 15 % меди и 23 % магния, второй — 30 % меди и 70 % магния, третий — 45 % алюминия и 55 % магния. Из них необходимо приготовить новый сплав, содержащий 20 % меди. Какое наименьшее и какое наибольшее процентное содержание алюминия может быть в этом новом сплаве?

5) Найти множество всех чисел a, при каждом из которых функция

$$f(x) = 8(2a+1)\cos x - \sin 2x + (16a^2 + 16a - 18)x$$

является возрастающей на всей числовой прямой и при этом не имеет критических точек.

Вариант 13 (Экономический факультет).

1) Найти все действительные решения уравнения

$$\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^{\sin x} + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^{\sin x} = \frac{10}{3}.$$

2) Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а прямые AB и CD — в точке K. Прямая KO пересекает стороны BC и AD в точках M и N соответственно; $\angle BAD = 30°$. Известно, что в трапеции $ABMN$ и $NMCD$ можно вписать окружность. Найти отношение площадей треугольника BKC и трапеции $ABCD$.

3) Решить неравенство

$$\sqrt{9 - \frac{9}{x}} < x - \sqrt{x - \frac{9}{x}}.$$

4) Зоопарк ежедневно распределяет 111 *кг* мяса между лисами, леопардами и львами. Каждой лисе полагается 2 *кг* мяса, леопарду 14 *кг*, льву 21 *кг*. Известно, что у каждого льва бывает ежедневно 230 посетителей, у каждого леопарда 160, у каждой лисы 20. Сколько должно быть лис, леопардов и львов в зоопарке, чтобы ежедневное число посетителей зоопарка было максимальным?

Вариант 14 (Экономический факультет; отделение политэкономии).

1) Решить уравнение

$$2^{x+4} \cdot 7^{x+4} = 2^{3x} \cdot 7^{3x}.$$

2) Найти все x, удовлетворяющие уравнению

$$\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{ctg} x.$$

3) Решить неравенство

$$\sqrt{(x-4)(5x+41)} < 2(2x-7).$$

4) Сколько точек с целочисленными координатами находится внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = 82$, $x = 730$ и графиком функции $y = \log_3(x-1)$? Точки, лежащие на границе указанной криволинейной трапеции, не учитывать.

5) В группе каждый из учащихся знает хотя бы один иностранный язык (английский, французский или немецкий) и нет ни одного учащегося, который бы знал все три указанные языка, 13 учащихся знают лишь по одному иностранному языку. Никто из группы не знает одновременно французский и немецкий, но половина учащихся, владеющих английским, знает еще один иностранный язык. Девушек, знающих только английский, в 2 раза больше, чем учащихся, знающих только немецкий, и в 4 раза больше, чем учащихся, знающих только французский. Определить, сколько учащихся в группе, если юношей, знающих только английский, в n раз больше, чем учащихся, знающих только французский, причем $3 \leqslant n \leqslant 15$ (n — целое число).

6) Определить, при каких значениях a уравнение

$$x - \frac{a}{2} = 2\,|\,2\,|x| - a^2\,|$$

имеет ровно три корня. Найти эти корни.

Вариант 15 (Филологический факультет; отделение структурной и прикладной лингвистики).

1) Решить уравнение

$$\log_5(x-1) = \log_5 \frac{x}{1+x}.$$

2) Решить систему уравнений

$$y^2 = 4^x + 8,$$
$$2^{x+1} + y + 1 = 0.$$

3) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 24x - \cos 12x - 3 \sin 8x$$

на отрезке $\left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right]$.

4) В трапеции $ABCD$ сторона AD является большим основанием. Известно, что $AD = CD = 4\frac{2}{3}$, $\widehat{BAD} = 90°$ и $\widehat{BCD} = 150°$. На основании AD построен треугольник AED так, что точки B и E лежат по одну сторону от прямой AD, причем $AE = DE$. Длина высоты этого треугольника, проведенной из вершины E, равна $\frac{2}{5}$. Найти площадь общей части трапеции $ABCD$ и треугольника AED.

5) Найти все значения a, при которых уравнение

$$|1 - ax| = 1 + (1 - 2a)x + ax^2$$

имеет ровно одно решение.

Справочное издание

ЦЫПКИН Александр Геннадиевич,
ПИНСКИЙ Александр Иосифович

СПРАВОЧНИК ПО МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Заведующий редакцией *Е. Ю. Ходан*
Редактор *Т. В. Шароватова*
Художественный редактор *Г. М. Коровина*
Технический редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *Т. С. Вайсберг, Л. С. Сомова*

ИБ № 32295

Сдано в набор 28.06.88. Подписано к печати 24.03.89.
Формат 84×108/32. Бумага тип. № 2.
Гарнитура литературная. Печать высокая.
Усл. печ. л. 30,24. Усл. кр.-отт. 30,45. Уч.-изд. л. 35,66.
Тираж 200 000 экз. (2-й завод 100 001—200 000 экз.).
Заказ № 357. Цена 2 р.

Ордена Трудового Красного Знамени
издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052 г. Ленинград Л-52, Измайловский проспект, 29.

SOLUTION MANUAL FOR MATHEMATICAL PROBLEMS FOR COLLEGE STUDENTS

Tsypkin A. G. Pinsky A. I.

In this educational aid, intended for high—school students, an attemp has been made to classify the problems encountered in high—school mathematics by their solution methods.

It was rather difficult to attain the aim the authors set for themselves. On one hand, a detailed classification of problems by methods of solution would require the consideration of a large number of concrete problems and, on the other hand, a schematic classification would not yield a useful aid for solving different kinds of problems. Therefore, alongside a large number of worked problems, the book includes many problems (about 2500) for the reader to solve.

In addition to the traditional problems from the course of high—school mathematics, the book includes methods for solving simple differential and integral calculus problems as well as problems which require the use of coordinates and vector algebra. These sections only include problems whose solutions require knowledge that is beyond the scope of high—school mathematics.

Some problems in the book can only be solved by a combined application of the knowledge from the traditional and new divisions of mathematics. These include, for instance, problems connected with the calculation of limits, derivatives and antiderivatives of functions which must first be simplified by means of identity transformations.

The authors consider all the most frequent methods of solving problems from the high—school course of mathematics. The fact that many problems are not followed by their solutions makes it possible to use the book for preparing for the entrance examinations to higher educational esttablishments.

About the Authors

TSYPKIN Aleksandr Gennadeievich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), is a senior research worker at the Steklov Mathematical Institute of the USSR Academy of Sciences. He is the author of a Manual of Mathematics for High Schools and a number of scientific papers. His most important scientific achievements are in the field of mechanics.

PINSKY Aleksandr Iosifovich, Candidate of Sciences (Physics and Mathematics), is known as an experienced specialist in the methods of teaching mathematics at higher schools. He is a senior lecturer of mathematics at the Moscow Electrotechnical Institute of Communications. The field of his scientific interests is mathematical statistics.

2 р.